La ricorsione in matematica: da Fibonacci al chaos passando per pi-greco.

Simone Zuccher
E-mail: zuccher@sci.univr.it
Web page: http://profs.sci.univr.it/∼zuccher/

Liceo Scientifico "E. Medi" e
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali – Università di Verona

Conferenze per i genitori degli studenti e non
19 Gennaio 2009

Agenda

1 Cos'è e a cosa serve la ricorsione?
- Esempi preliminari

2 La ricorsione in matematica
- La successione di Fibonacci
- E il buon vecchio π?
- La mappa logistica

3 Chaos e matematica
- Ma esiste il chaos matematico?

Agenda

1. Cos'è e a cosa serve la ricorsione?
   - Esempi preliminari
2. La ricorsione in matematica
   - La successione di Fibonacci
   - E il buon vecchio π?
   - La mappa logistica
3. Chaos e matematica
   - Ma esiste il chaos matematico?

Agenda

1. Cos'è e a cosa serve la ricorsione?
   - Esempi preliminari
2. La ricorsione in matematica
   - La successione di Fibonacci
   - E il buon vecchio π?
   - La mappa logistica
3. Chaos e matematica
   - Ma esiste il chaos matematico?

Agenda

1. Cos’è e a cosa serve la ricorsione?
   - Esempi preliminari
2. La ricorsione in matematica
   - La successione di Fibonacci
   - E il buon vecchio π?
   - La mappa logistica
3. Chaos e matematica
   - Ma esiste il chaos matematico?

Un esempio geometrico...

Il triangolo di Sierpinski

Che regola si è seguita per costruirlo?

1. Prendi un triangolo equilatero
2. Dopo aver diviso a metà ciascun lato, costriusci 4 triangoli equilateri e togli quello in mezzo
3. Ripeti il punto 2 *ad libitum*

Un esempio geometrico...

Il triangolo di Sierpinski

Che regola si è seguita per costruirlo?

1. Prendi un triangolo equilatero
2. Dopo aver diviso a metà ciascun lato, costriusci 4 triangoli equilateri e togli quello in mezzo
3. Ripeti il punto 2 *ad libitum*

Un esempio geometrico...

Il triangolo di Sierpinski

Che regola si è seguita per costruirlo?

1. Prendi un triangolo equilatero
2. Dopo aver diviso a metà ciascun lato, costriusci 4 triangoli equilateri e togli quello in mezzo
3. Ripeti il punto 2 *ad libitum*

Un esempio geometrico...

Il triangolo di Sierpinski

Che regola si è seguita per costruirlo?

1. Prendi un triangolo equilatero
2. Dopo aver diviso a metà ciascun lato, costriusci 4 triangoli equilateri e togli quello in mezzo
3. Ripeti il punto 2 *ad libitum*

Un esempio geometrico...

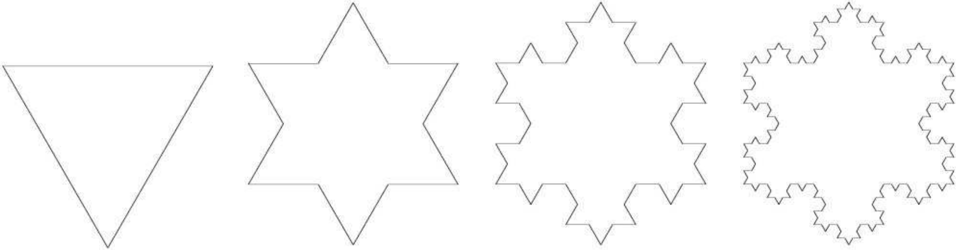
Il triangolo di Sierpinski

Che regola si è seguita per costruirlo?

1. Prendi un triangolo equilatero
2. Dopo aver diviso a metà ciascun lato, costriusci 4 triangoli equilateri e togli quello in mezzo
3. Ripeti il punto 2 *ad libitum*

Un altro esempio geometrico...

Il "fiocco di neve" di Koch

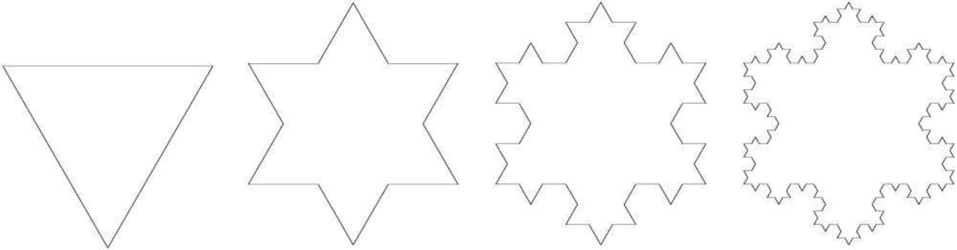


Che regola si è seguita per costruirlo?

1. Prendi un triangolo equilatero
2. Dividi ciascun lato della figura in 3 parti uguali, su quella centrale costruisci un triangolo equilatero che punti verso l'esterno e rimuovi la base del triangolo
3. Ripeti il punto 2 *ad libitum*

Un altro esempio geometrico...

Il “fiocco di neve” di Koch

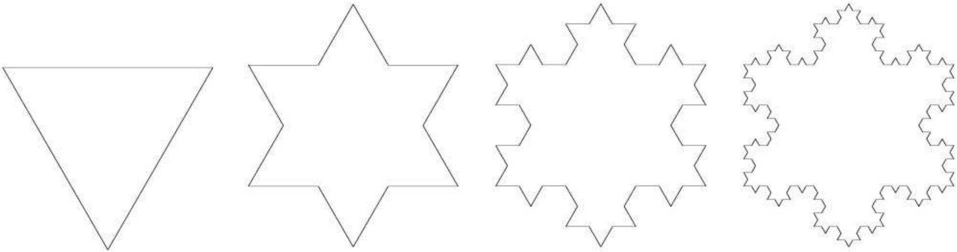


Che regola si è seguita per costruirlo?

1. Prendi un triangolo equilatero
2. Dividi ciascun lato della figura in 3 parti uguali, su quella centrale costruisci un triangolo equilatero che punti verso l'esterno e rimuovi la base del triangolo
3. Ripeti il punto 2 *ad libitum*

Un altro esempio geometrico...

Il "fiocco di neve" di Koch

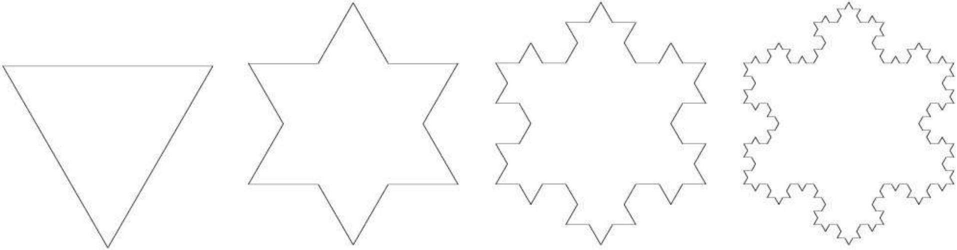


Che regola si è seguita per costruirlo?

1. Prendi un triangolo equilatero
2. Dividi ciascun lato della figura in 3 parti uguali, su quella centrale costruisci un triangolo equilatero che punti verso l'esterno e rimuovi la base del triangolo
3. Ripeti il punto 2 *ad libitum*

Un altro esempio geometrico...

Il “fiocco di neve” di Koch

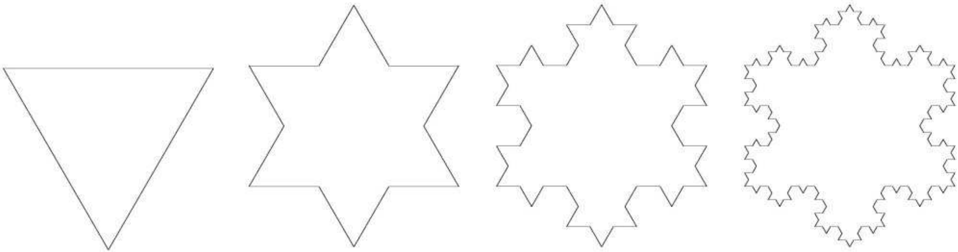


Che regola si è seguita per costruirlo?

1. Prendi un triangolo equilatero
2. Dividi ciascun lato della figura in 3 parti uguali, su quella centrale costruisci un triangolo equilatero che punti verso l'esterno e rimuovi la base del triangolo
3. Ripeti il punto 2 *ad libitum*

Un altro esempio geometrico...

Il "fiocco di neve" di Koch



Che regola si è seguita per costruirlo?

1. Prendi un triangolo equilatero
2. Dividi ciascun lato della figura in 3 parti uguali, su quella centrale costruisci un triangolo equilatero che punti verso l'esterno e rimuovi la base del triangolo
3. Ripeti il punto 2 *ad libitum*

Un esempio finanziario...(1/4)

Problema

Se metto in banca un capitale di centomila euro ad un tasso di interesse del 5% annuo reinvestendolo (se trovate questa banca, ditemelo!), a quanto ammonta il mio capitale dopo 10 anni?

Il tasso di interesse

Se metto in banca un capitale $C = 100\,000$ euro ad un tasso di interesse $I = 5\% = \frac{5}{100} = 0.05$ annuo, dopo 1 anno l'interesse accumulato è:

$$100\,000\frac{5}{100} = 100\,000 \cdot 0.05 = 5000 \quad \text{euro, ovvero}$$

$$C \cdot I, \quad \text{con } C = 100\,000 \text{ e } I = 0.05.$$

Un esempio finanziario...(1/4)

Problema

Se metto in banca un capitale di centomila euro ad un tasso di interesse del 5% annuo reinvestendolo (se trovate questa banca, ditemelo!), a quanto ammonta il mio capitale dopo 10 anni?

Il tasso di interesse

Se metto in banca un capitale $C = 100\,000$ euro ad un tasso di interesse $I = 5\% = \dfrac{5}{100} = 0.05$ annuo, dopo 1 anno l’interesse accumulato è:

$$100\,000\frac{5}{100} = 100\,000 \cdot 0.05 = 5000 \quad \text{euro, ovvero}$$

$$C \cdot I, \quad \text{con } C = 100\,000 \text{ e } I = 0.05.$$

Un esempio finanziario...(2/4)

Che regola segue la banca per il calcolo del capitale finale?

1. Prendi il capitale iniziale di 100 000 euro
2. Alla fine del primo anno l'interesse accumulato è
$$100\,000 \cdot \frac{5}{100} = 5000 \text{ euro},$$
da cui il capitale totale alla fine del primo anno
$$100\,000 + 5000 = 105000 \text{ euro}$$
3. Alla fine del secondo anno l'interesse accumulato è
$$105000 \cdot \frac{5}{100} = 5250 \text{ euro},$$
da cui il capitale totale alla fine del secondo anno
$$105000 + 5250 = 110250 \text{ euro}$$
4. Alla fine del terzo anno...

Un esempio finanziario...(2/4)

Che regola segue la banca per il calcolo del capitale finale?

1. Prendi il capitale iniziale di 100 000 euro
2. Alla fine del primo anno l'interesse accumulato è
$$100\,000 \cdot \frac{5}{100} = 5000 \text{ euro},$$
da cui il capitale totale alla fine del primo anno
$$100\,000 + 5000 = 105000 \text{ euro}$$
3. Alla fine del secondo anno l'interesse accumulato è
$$105000 \cdot \frac{5}{100} = 5250 \text{ euro},$$
da cui il capitale totale alla fine del secondo anno
$$105000 + 5250 = 110250 \text{ euro}$$
4. Alla fine del terzo anno...

Un esempio finanziario...(2/4)

Che regola segue la banca per il calcolo del capitale finale?

1. Prendi il capitale iniziale di 100 000 euro
2. Alla fine del primo anno l'interesse accumulato è
$$100\,000 \cdot \frac{5}{100} = 5000 \text{ euro},$$
da cui il capitale totale alla fine del primo anno
$$100\,000 + 5000 = 105000 \text{ euro}$$
3. Alla fine del secondo anno l'interesse accumulato è
$$105000 \cdot \frac{5}{100} = 5250 \text{ euro},$$
da cui il capitale totale alla fine del secondo anno
$$105000 + 5250 = 110250 \text{ euro}$$
4. Alla fine del terzo anno...

Un esempio finanziario...(2/4)

Che regola segue la banca per il calcolo del capitale finale?

1. Prendi il capitale iniziale di 100 000 euro
2. Alla fine del primo anno l'interesse accumulato è
$$100\,000 \cdot \frac{5}{100} = 5000 \text{ euro},$$
da cui il capitale totale alla fine del primo anno
$$100\,000 + 5000 = 105000 \text{ euro}$$
3. Alla fine del secondo anno l'interesse accumulato è
$$105000 \cdot \frac{5}{100} = 5250 \text{ euro},$$
da cui il capitale totale alla fine del secondo anno
$$105000 + 5250 = 110250 \text{ euro}$$
4. Alla fine del terzo anno...

Un esempio finanziario...(2/4)

Che regola segue la banca per il calcolo del capitale finale?

1. Prendi il capitale iniziale di 100 000 euro
2. Alla fine del primo anno l'interesse accumulato è
$$100\,000 \cdot \frac{5}{100} = 5000 \text{ euro},$$
da cui il capitale totale alla fine del primo anno
$$100\,000 + 5000 = 105000 \text{ euro}$$
3. Alla fine del secondo anno l'interesse accumulato è
$$105000 \cdot \frac{5}{100} = 5250 \text{ euro},$$
da cui il capitale totale alla fine del secondo anno
$$105000 + 5250 = 110250 \text{ euro}$$
4. Alla fine del terzo anno...

Un esempio finanziario...(2/4)

Che regola segue la banca per il calcolo del capitale finale?

1. Prendi il capitale iniziale di 100 000 euro
2. Alla fine del primo anno l'interesse accumulato è
$$100\,000 \cdot \frac{5}{100} = 5000 \text{ euro},$$
da cui il capitale totale alla fine del primo anno
$$100\,000 + 5000 = 105000 \text{ euro}$$
3. Alla fine del secondo anno l'interesse accumulato è
$$105000 \cdot \frac{5}{100} = 5250 \text{ euro},$$
da cui il capitale totale alla fine del secondo anno
$$105000 + 5250 = 110250 \text{ euro}$$
4. Alla fine del terzo anno...

Un esempio finanziario...(2/4)

Che regola segue la banca per il calcolo del capitale finale?

1. Prendi il capitale iniziale di 100 000 euro
2. Alla fine del primo anno l'interesse accumulato è
$$100\,000 \cdot \frac{5}{100} = 5000 \text{ euro},$$
da cui il capitale totale alla fine del primo anno
$$100\,000 + 5000 = 105000 \text{ euro}$$
3. Alla fine del secondo anno l'interesse accumulato è
$$105000 \cdot \frac{5}{100} = 5250 \text{ euro},$$
da cui il capitale totale alla fine del secondo anno
$$105000 + 5250 = 110250 \text{ euro}$$
4. Alla fine del terzo anno...

Un esempio finanziario...(3/4)

Generalizzando...

1. Prendi il capitale iniziale C_0 (il pedice $_0$ indica al tempo zero).
2. Alla fine del primo anno l'interesse accumulato è $C_0 \cdot I$ euro, da cui il capitale totale alla fine del primo anno
$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot I = C_0(1 + I) \text{ euro}$$
3. Alla fine del secondo anno l'interesse accumulato è $C_1 \cdot I$ euro, da cui il capitale totale alla fine del secondo anno
$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot I = C_1(1 + I) \text{ euro}$$
4. Alla fine del terzo anno...

Un esempio finanziario...(3/4)

Generalizzando...

1. Prendi il capitale iniziale C_0 (il pedice $_0$ indica al tempo zero).
2. Alla fine del primo anno l'interesse accumulato è $C_0 \cdot I$ euro, da cui il capitale totale alla fine del primo anno
$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot I = C_0(1 + I) \text{ euro}$$
3. Alla fine del secondo anno l'interesse accumulato è $C_1 \cdot I$ euro, da cui il capitale totale alla fine del secondo anno
$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot I = C_1(1 + I) \text{ euro}$$
4. Alla fine del terzo anno...

Un esempio finanziario...(3/4)

Generalizzando...

1. Prendi il capitale iniziale C_0 (il pedice $_0$ indica al tempo zero).
2. Alla fine del primo anno l'interesse accumulato è $C_0 \cdot I$ euro, da cui il capitale totale alla fine del primo anno
$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot I = C_0(1 + I) \text{ euro}$$
3. Alla fine del secondo anno l'interesse accumulato è $C_1 \cdot I$ euro, da cui il capitale totale alla fine del secondo anno
$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot I = C_1(1 + I) \text{ euro}$$
4. Alla fine del terzo anno...

Un esempio finanziario...(3/4)

Generalizzando...

1. Prendi il capitale iniziale C_0 (il pedice $_0$ indica al tempo zero).
2. Alla fine del primo anno l'interesse accumulato è $C_0 \cdot I$ euro, da cui il capitale totale alla fine del primo anno
$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot I = C_0(1 + I) \text{ euro}$$
3. Alla fine del secondo anno l'interesse accumulato è $C_1 \cdot I$ euro, da cui il capitale totale alla fine del secondo anno
$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot I = C_1(1 + I) \text{ euro}$$
4. Alla fine del terzo anno...

Un esempio finanziario...(3/4)

Generalizzando...

1. Prendi il capitale iniziale C_0 (il pedice $_0$ indica al tempo zero).
2. Alla fine del primo anno l'interesse accumulato è $C_0 \cdot I$ euro, da cui il capitale totale alla fine del primo anno
$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot I = C_0(1 + I) \text{ euro}$$
3. Alla fine del secondo anno l'interesse accumulato è $C_1 \cdot I$ euro, da cui il capitale totale alla fine del secondo anno
$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot I = C_1(1 + I) \text{ euro}$$
4. Alla fine del terzo anno...

Un esempio finanziario...(3/4)

Generalizzando...

1. Prendi il capitale iniziale C_0 (il pedice $_0$ indica al tempo zero).
2. Alla fine del primo anno l'interesse accumulato è $C_0 \cdot I$ euro, da cui il capitale totale alla fine del primo anno
$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot I = C_0(1 + I) \text{ euro}$$
3. Alla fine del secondo anno l'interesse accumulato è $C_1 \cdot I$ euro, da cui il capitale totale alla fine del secondo anno
$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot I = C_1(1 + I) \text{ euro}$$
4. Alla fine del terzo anno...

Un esempio finanziario...(3/4)

Generalizzando...

1. Prendi il capitale iniziale C_0 (il pedice $_0$ indica al tempo zero).
2. Alla fine del primo anno l'interesse accumulato è $C_0 \cdot I$ euro, da cui il capitale totale alla fine del primo anno
$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot I = C_0(1 + I) \text{ euro}$$
3. Alla fine del secondo anno l'interesse accumulato è $C_1 \cdot I$ euro, da cui il capitale totale alla fine del secondo anno
$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot I = C_1(1 + I) \text{ euro}$$
4. Alla fine del terzo anno...

Un esempio finanziario...(4/4)

La procedura per il calcolo dell'interesse può essere schematizzata come nel caso degli esempi geometrici? Certo...

1. Prendi il capitale iniziale
2. Alla fine dell'anno il capitale totale è pari al capitale dell'anno precedente più l'interesse accumulato durante l'anno appena trascorso
3. Ripeti il punto 2 fino alla scadenza dell'investimento.

ATTENZIONE!!!

La **procedura** viene ripetuta ogni anno allo stesso modo, ma per tutti gli anni successivi al primo c'è sempre bisogno del capitale totale dell'anno precedente il quale viene calcolato utilizzando la **procedura stessa**.

Un esempio finanziario...(4/4)

La procedura per il calcolo dell'interesse può essere schematizzata come nel caso degli esempi geometrici? Certo...

1. Prendi il capitale iniziale
2. Alla fine dell'anno il capitale totale è pari al capitale dell'anno precedente più l'interesse accumulato durante l'anno appena trascorso
3. Ripeti il punto 2 fino alla scadenza dell'investimento.

ATTENZIONE!!!

La **procedura** viene ripetuta ogni anno allo stesso modo, ma per tutti gli anni successivi al primo c'è sempre bisogno del capitale totale dell'anno precedente il quale viene calcolato utilizzando la **procedura stessa**.

Un esempio finanziario...(4/4)

La procedura per il calcolo dell'interesse può essere schematizzata come nel caso degli esempi geometrici? Certo...

1. Prendi il capitale iniziale
2. Alla fine dell'anno il capitale totale è pari al capitale dell'anno precedente più l'interesse accumulato durante l'anno appena trascorso
3. Ripeti il punto 2 fino alla scadenza dell'investimento.

ATTENZIONE!!!

La **procedura** viene ripetuta ogni anno allo stesso modo, ma per tutti gli anni successivi al primo c'è sempre bisogno del capitale totale dell'anno precedente il quale viene calcolato utilizzando la **procedura stessa**.

Un esempio finanziario...(4/4)

La procedura per il calcolo dell'interesse può essere schematizzata come nel caso degli esempi geometrici? Certo...

1. Prendi il capitale iniziale
2. Alla fine dell'anno il capitale totale è pari al capitale dell'anno precedente più l'interesse accumulato durante l'anno appena trascorso
3. Ripeti il punto 2 fino alla scadenza dell'investimento.

ATTENZIONE!!!

La **procedura** viene ripetuta ogni anno allo stesso modo, ma per tutti gli anni successivi al primo c'è sempre bisogno del capitale totale dell'anno precedente il quale viene calcolato utilizzando la **procedura stessa**.

Un esempio finanziario...(4/4)

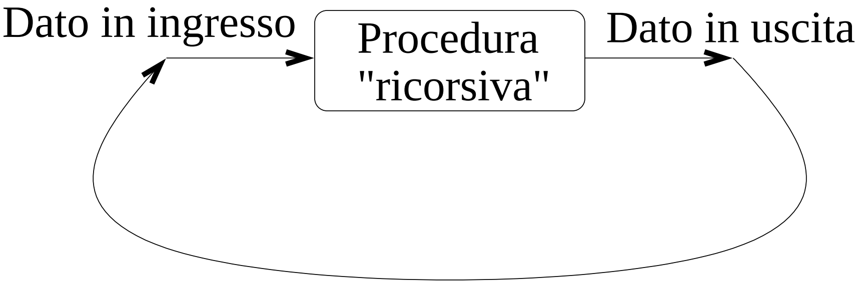
La procedura per il calcolo dell'interesse può essere schematizzata come nel caso degli esempi geometrici? Certo...

1. Prendi il capitale iniziale
2. Alla fine dell'anno il capitale totale è pari al capitale dell'anno precedente più l'interesse accumulato durante l'anno appena trascorso
3. Ripeti il punto 2 fino alla scadenza dell'investimento.

ATTENZIONE!!!

La **procedura** viene ripetuta ogni anno allo stesso modo, ma per tutti gli anni successivi al primo c'è sempre bisogno del capitale totale dell'anno precedente il quale viene calcolato utilizzando la **procedura stessa**.

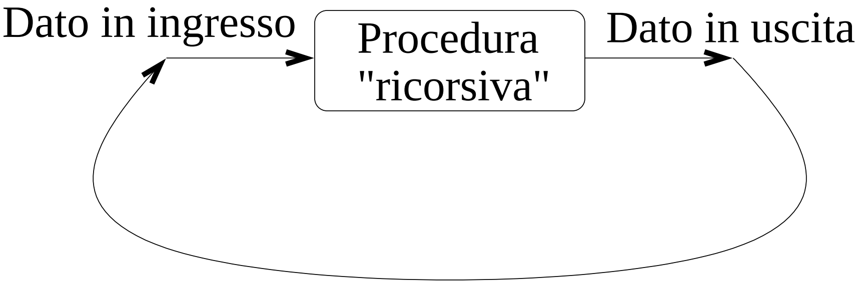
Concetto di ricorsione



Definizione

Una **procedura ricorsiva** è definita in termini di se stessa.
Per calcolare un valore ad un certo punto è necessario risalire all'indietro fino al valore iniziale, che viene dato per definizione (procedura **ben fondata**).
Se così non fosse, si innescherebbe una regressione infinita

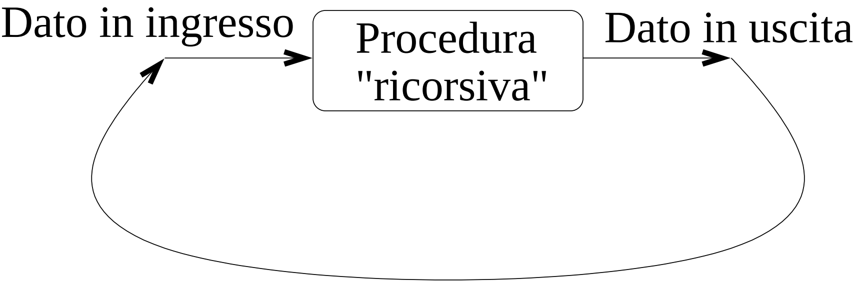
Concetto di ricorsione



Definizione

Una **procedura ricorsiva** è definita in termini di se stessa.
Per calcolare un valore ad un certo punto è necessario risalire all'indietro fino al valore iniziale, che viene dato per definizione (procedura **ben fondata**).
Se così non fosse, si innescherebbe una regressione infinita

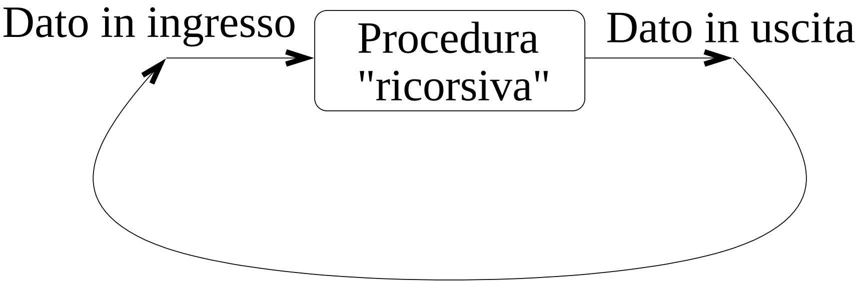
Concetto di ricorsione



Definizione

Una **procedura ricorsiva** è definita in termini di se stessa.
Per calcolare un valore ad un certo punto è necessario risalire all'indietro fino al valore iniziale, che viene dato per definizione (procedura **ben fondata**).
Se così non fosse, si innescherebbe una regressione infinita

Concetto di ricorsione



Definizione

Una **procedura ricorsiva** è definita in termini di se stessa.
Per calcolare un valore ad un certo punto è necessario risalire all'indietro fino al valore iniziale, che viene dato per definizione (procedura **ben fondata**).
Se così non fosse, si innescherebbe una regressione infinita

Tornando all'investimento decennale...

1. $C_0 = 100\,000$ euro (capitale iniziale)
2. $C_n = C_{n-1} \cdot (1 + 0.05)$ (il capitale alla fine dell'anno n-esimo dipende dal capitale dell'anno $(n-1)$-esimo)
3. ripeti il punto 2 per $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

Siccome $C_1 = C_0 \cdot (1 + I)$, ma $C_2 = C_1 \cdot (1 + I) = C_0 \cdot (1 + I) \cdot (1 + I) = C_0 \cdot (1 + I)^2$, si arriva facilmente alla formulina

$$C_N = C_0 \cdot (1 + I)^N,$$

che fornisce il capitale totale alla fine di N anni avendo investito inizialmente il capitale C_0 ad un tasso di interesse I.
Quindi, nel nostro caso, essendo $C_0 = 100\,000$, $I = 5\%$ e $N = 10$, si ottiene

$$C_{10} = 100\,000 \cdot (1 + 0.05)^{10} = 162\,889.46 \quad \text{euro}$$

Tornando all'investimento decennale...

1. $C_0 = 100\,000$ euro (capitale iniziale)
2. $C_n = C_{n-1} \cdot (1 + 0.05)$ (il capitale alla fine dell'anno n-esimo dipende dal capitale dell'anno $(n-1)$-esimo)
3. ripeti il punto 2 per $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

Siccome $C_1 = C_0 \cdot (1 + I)$, ma $C_2 = C_1 \cdot (1 + I) = C_0 \cdot (1 + I) \cdot (1 + I) = C_0 \cdot (1 + I)^2$, si arriva facilmente alla formulina

$$C_N = C_0 \cdot (1 + I)^N,$$

che fornisce il capitale totale alla fine di N anni avendo investito inizialmente il capitale C_0 ad un tasso di interesse I.
Quindi, nel nostro caso, essendo $C_0 = 100\,000$, $I = 5\%$ e $N = 10$, si ottiene

$$C_{10} = 100\,000 \cdot (1 + 0.05)^{10} = 162\,889.46 \quad \text{euro}$$

Tornando all'investimento decennale...

1. $C_0 = 100\,000$ euro (capitale iniziale)
2. $C_n = C_{n-1} \cdot (1 + 0.05)$ (il capitale alla fine dell'anno n-esimo dipende dal capitale dell'anno $(n-1)$-esimo)
3. ripeti il punto 2 per $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

Siccome $C_1 = C_0 \cdot (1 + I)$, ma $C_2 = C_1 \cdot (1 + I) = C_0 \cdot (1 + I) \cdot (1 + I) = C_0 \cdot (1 + I)^2$, si arriva facilmente alla formulina

$$C_N = C_0 \cdot (1 + I)^N,$$

che fornisce il capitale totale alla fine di N anni avendo investito inizialmente il capitale C_0 ad un tasso di interesse I.
Quindi, nel nostro caso, essendo $C_0 = 100\,000$, $I = 5\%$ e $N = 10$, si ottiene

$$C_{10} = 100\,000 \cdot (1 + 0.05)^{10} = 162\,889.46 \quad \text{euro}$$

Tornando all'investimento decennale...

1. $C_0 = 100\,000$ euro (capitale iniziale)
2. $C_n = C_{n-1} \cdot (1 + 0.05)$ (il capitale alla fine dell'anno n-esimo dipende dal capitale dell'anno $(n-1)$-esimo)
3. ripeti il punto 2 per $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

Siccome $C_1 = C_0 \cdot (1 + I)$, ma $C_2 = C_1 \cdot (1 + I) = C_0 \cdot (1 + I) \cdot (1 + I) = C_0 \cdot (1 + I)^2$, si arriva facilmente alla formulina

$$C_N = C_0 \cdot (1 + I)^N,$$

che fornisce il capitale totale alla fine di N anni avendo investito inizialmente il capitale C_0 ad un tasso di interesse I.

Quindi, nel nostro caso, essendo $C_0 = 100\,000$, $I = 5\%$ e $N = 10$, si ottiene

$$C_{10} = 100\,000 \cdot (1 + 0.05)^{10} = 162\,889.46 \quad \text{euro}$$

Tornando all'investimento decennale...

1. $C_0 = 100\,000$ euro (capitale iniziale)
2. $C_n = C_{n-1} \cdot (1 + 0.05)$ (il capitale alla fine dell'anno n-esimo dipende dal capitale dell'anno $(n-1)$-esimo)
3. ripeti il punto 2 per $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

Siccome $C_1 = C_0 \cdot (1 + I)$, ma
$C_2 = C_1 \cdot (1 + I) = C_0 \cdot (1 + I) \cdot (1 + I) = C_0 \cdot (1 + I)^2$, si arriva facilmente alla formulina

$$C_N = C_0 \cdot (1 + I)^N,$$

che fornisce il capitale totale alla fine di N anni avendo investito inizialmente il capitale C_0 ad un tasso di interesse I.
Quindi, nel nostro caso, essendo $C_0 = 100\,000$, $I = 5\%$ e $N = 10$, si ottiene

$$C_{10} = 100\,000 \cdot (1 + 0.05)^{10} = 162\,889.46 \quad \text{euro}$$

Successioni definite per ricorrenza

Il calcolo del capitale alla fine dei 10 anni si riduce a

$$\begin{cases} C_0 = 100\,000 \\ C_n = C_{n-1} \cdot (1 + 0.05) \end{cases}$$

anno (n)	Capitale alla fine di quell'anno (C_n)
$n = 0$	$C_0 = 100\,000.00$
$n = 1$	$C_1 = C_0 \cdot 1.05 = 105\,000.00$
$n = 2$	$C_2 = C_1 \cdot 1.05 = 110\,250.00$
$n = 3$	$C_3 = C_2 \cdot 1.05 = 115\,762.50$
$n = 4$	$C_4 = C_3 \cdot 1.05 = 121\,550.62$
$n = 5$	$C_5 = C_4 \cdot 1.05 = 127\,628.16$
$n = 6$	$C_6 = C_5 \cdot 1.05 = 134\,009.56$
$n = 7$	$C_7 = C_6 \cdot 1.05 = 140\,710.04$
$n = 8$	$C_8 = C_7 \cdot 1.05 = 147\,745.54$
$n = 9$	$C_9 = C_8 \cdot 1.05 = 155\,132.82$
$n = 10$	$C_{10} = C_9 \cdot 1.05 = 162\,889.46$

$(C_{10} = 100\,000 \cdot (1 + 0.05)^{10} = 162889.46)$

Successioni definite per ricorrenza

Il calcolo del capitale alla fine dei 10 anni si riduce a

$$\begin{cases} C_0 = 100\,000 \\ C_n = C_{n-1} \cdot (1 + 0.05) \end{cases}$$

anno (n)	Capitale alla fine di quell'anno (C_n)
$n = 0$	$C_0 = 100\,000.00$
$n = 1$	$C_1 = C_0 \cdot 1.05 = 105\,000.00$
$n = 2$	$C_2 = C_1 \cdot 1.05 = 110\,250.00$
$n = 3$	$C_3 = C_2 \cdot 1.05 = 115\,762.50$
$n = 4$	$C_4 = C_3 \cdot 1.05 = 121\,550.62$
$n = 5$	$C_5 = C_4 \cdot 1.05 = 127\,628.16$
$n = 6$	$C_6 = C_5 \cdot 1.05 = 134\,009.56$
$n = 7$	$C_7 = C_6 \cdot 1.05 = 140\,710.04$
$n = 8$	$C_8 = C_7 \cdot 1.05 = 147\,745.54$
$n = 9$	$C_9 = C_8 \cdot 1.05 = 155\,132.82$
$n = 10$	$C_{10} = C_9 \cdot 1.05 = 162\,889.46$

$(C_{10} = 100\,000 \cdot (1 + 0.05)^{10} = 162889.46)$

Successioni definite per ricorrenza

Il calcolo del capitale alla fine dei 10 anni si riduce a

$$\begin{cases} C_0 = 100\,000 \\ C_n = C_{n-1} \cdot (1 + 0.05) \end{cases}$$

anno (n)	Capitale alla fine di quell'anno (C_n)
$n = 0$	$C_0 = 100\,000.00$
$n = 1$	$C_1 = C_0 \cdot 1.05 = 105\,000.00$
$n = 2$	$C_2 = C_1 \cdot 1.05 = 110\,250.00$
$n = 3$	$C_3 = C_2 \cdot 1.05 = 115\,762.50$
$n = 4$	$C_4 = C_3 \cdot 1.05 = 121\,550.62$
$n = 5$	$C_5 = C_4 \cdot 1.05 = 127\,628.16$
$n = 6$	$C_6 = C_5 \cdot 1.05 = 134\,009.56$
$n = 7$	$C_7 = C_6 \cdot 1.05 = 140\,710.04$
$n = 8$	$C_8 = C_7 \cdot 1.05 = 147\,745.54$
$n = 9$	$C_9 = C_8 \cdot 1.05 = 155\,132.82$
$n = 10$	$C_{10} = C_9 \cdot 1.05 = 162\,889.46$

$(C_{10} = 100\,000 \cdot (1 + 0.05)^{10} = 162889.46)$

Successioni definite per ricorrenza

Il calcolo del capitale alla fine dei 10 anni si riduce a

$$\begin{cases} C_0 = 100\,000 \\ C_n = C_{n-1} \cdot (1 + 0.05) \end{cases}$$

anno (n)	Capitale alla fine di quell'anno (C_n)
$n = 0$	$C_0 = 100\,000.00$
$n = 1$	$C_1 = C_0 \cdot 1.05 = 105\,000.00$
$n = 2$	$C_2 = C_1 \cdot 1.05 = 110\,250.00$
$n = 3$	$C_3 = C_2 \cdot 1.05 = 115\,762.50$
$n = 4$	$C_4 = C_3 \cdot 1.05 = 121\,550.62$
$n = 5$	$C_5 = C_4 \cdot 1.05 = 127\,628.16$
$n = 6$	$C_6 = C_5 \cdot 1.05 = 134\,009.56$
$n = 7$	$C_7 = C_6 \cdot 1.05 = 140\,710.04$
$n = 8$	$C_8 = C_7 \cdot 1.05 = 147\,745.54$
$n = 9$	$C_9 = C_8 \cdot 1.05 = 155\,132.82$
$n = 10$	$C_{10} = C_9 \cdot 1.05 = 162\,889.46$

$(C_{10} = 100\,000 \cdot (1 + 0.05)^{10} = 162889.46)$

Successioni definite per ricorrenza

Il calcolo del capitale alla fine dei 10 anni si riduce a

$$\begin{cases} C_0 = 100\,000 \\ C_n = C_{n-1} \cdot (1 + 0.05) \end{cases}$$

anno (n)	Capitale alla fine di quell'anno (C_n)
$n = 0$	$C_0 = 100\,000.00$
$n = 1$	$C_1 = C_0 \cdot 1.05 = 105\,000.00$
$n = 2$	$C_2 = C_1 \cdot 1.05 = 110\,250.00$
$n = 3$	$C_3 = C_2 \cdot 1.05 = 115\,762.50$
$n = 4$	$C_4 = C_3 \cdot 1.05 = 121\,550.62$
$n = 5$	$C_5 = C_4 \cdot 1.05 = 127\,628.16$
$n = 6$	$C_6 = C_5 \cdot 1.05 = 134\,009.56$
$n = 7$	$C_7 = C_6 \cdot 1.05 = 140\,710.04$
$n = 8$	$C_8 = C_7 \cdot 1.05 = 147\,745.54$
$n = 9$	$C_9 = C_8 \cdot 1.05 = 155\,132.82$
$n = 10$	$C_{10} = C_9 \cdot 1.05 = 162\,889.46$

$(C_{10} = 100\,000 \cdot (1 + 0.05)^{10} = 162889.46)$

Successioni definite per ricorrenza

Il calcolo del capitale alla fine dei 10 anni si riduce a

$$\begin{cases} C_0 = 100\,000 \\ C_n = C_{n-1} \cdot (1 + 0.05) \end{cases}$$

anno (n)	Capitale alla fine di quell'anno (C_n)
$n = 0$	$C_0 = 100\,000.00$
$n = 1$	$C_1 = C_0 \cdot 1.05 = 105\,000.00$
$n = 2$	$C_2 = C_1 \cdot 1.05 = 110\,250.00$
$n = 3$	$C_3 = C_2 \cdot 1.05 = 115\,762.50$
$n = 4$	$C_4 = C_3 \cdot 1.05 = 121\,550.62$
$n = 5$	$C_5 = C_4 \cdot 1.05 = 127\,628.16$
$n = 6$	$C_6 = C_5 \cdot 1.05 = 134\,009.56$
$n = 7$	$C_7 = C_6 \cdot 1.05 = 140\,710.04$
$n = 8$	$C_8 = C_7 \cdot 1.05 = 147\,745.54$
$n = 9$	$C_9 = C_8 \cdot 1.05 = 155\,132.82$
$n = 10$	$C_{10} = C_9 \cdot 1.05 = 162\,889.46$

$(C_{10} = 100\,000 \cdot (1 + 0.05)^{10} = 162889.46)$

Successioni definite per ricorrenza

Il calcolo del capitale alla fine dei 10 anni si riduce a

$$\begin{cases} C_0 = 100\,000 \\ C_n = C_{n-1} \cdot (1 + 0.05) \end{cases}$$

anno (n)	Capitale alla fine di quell'anno (C_n)
$n = 0$	$C_0 = 100\,000.00$
$n = 1$	$C_1 = C_0 \cdot 1.05 = 105\,000.00$
$n = 2$	$C_2 = C_1 \cdot 1.05 = 110\,250.00$
$n = 3$	$C_3 = C_2 \cdot 1.05 = 115\,762.50$
$n = 4$	$C_4 = C_3 \cdot 1.05 = 121\,550.62$
$n = 5$	$C_5 = C_4 \cdot 1.05 = 127\,628.16$
$n = 6$	$C_6 = C_5 \cdot 1.05 = 134\,009.56$
$n = 7$	$C_7 = C_6 \cdot 1.05 = 140\,710.04$
$n = 8$	$C_8 = C_7 \cdot 1.05 = 147\,745.54$
$n = 9$	$C_9 = C_8 \cdot 1.05 = 155\,132.82$
$n = 10$	$C_{10} = C_9 \cdot 1.05 = 162\,889.46$

$(C_{10} = 100\,000 \cdot (1 + 0.05)^{10} = 162889.46)$

Successioni definite per ricorrenza

Il calcolo del capitale alla fine dei 10 anni si riduce a

$$\begin{cases} C_0 = 100\,000 \\ C_n = C_{n-1} \cdot (1 + 0.05) \end{cases}$$

anno (n)	Capitale alla fine di quell'anno (C_n)
$n = 0$	$C_0 = 100\,000.00$
$n = 1$	$C_1 = C_0 \cdot 1.05 = 105\,000.00$
$n = 2$	$C_2 = C_1 \cdot 1.05 = 110\,250.00$
$n = 3$	$C_3 = C_2 \cdot 1.05 = 115\,762.50$
$n = 4$	$C_4 = C_3 \cdot 1.05 = 121\,550.62$
$n = 5$	$C_5 = C_4 \cdot 1.05 = 127\,628.16$
$n = 6$	$C_6 = C_5 \cdot 1.05 = 134\,009.56$
$n = 7$	$C_7 = C_6 \cdot 1.05 = 140\,710.04$
$n = 8$	$C_8 = C_7 \cdot 1.05 = 147\,745.54$
$n = 9$	$C_9 = C_8 \cdot 1.05 = 155\,132.82$
$n = 10$	$C_{10} = C_9 \cdot 1.05 = 162\,889.46$

$(C_{10} = 100\,000 \cdot (1 + 0.05)^{10} = 162889.46)$

Agenda

1 Cos'è e a cosa serve la ricorsione?
- Esempi preliminari

2 La ricorsione in matematica
- La successione di Fibonacci
- E il buon vecchio π?
- La mappa logistica

3 Chaos e matematica
- Ma esiste il chaos matematico?

La successione di Fibonacci (1/4)

Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur?

Leonardo di Pisa
Leonardo Pisano, Leonardo Bonacci, Leonardo Fibonacci
Pisa, 1180–1250

Supponiamo che:

1. una coppia di conigli adulti generi **ogni mese** una coppia di piccoli, un maschio e una femmina
2. la coppia di piccoli inizi a riprodursi a partire dal **secondo mese** di vita
3. i conigli **non muoiano** (perlomeno nell'arco di tempo considerato)

La successione di Fibonacci (1/4)

Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur?

Leonardo di Pisa
Leonardo Pisano, Leonardo Bonacci, Leonardo Fibonacci
Pisa, 1180–1250

Supponiamo che:

1. una coppia di conigli adulti generi **ogni mese** una coppia di piccoli, un maschio e una femmina
2. la coppia di piccoli inizi a riprodursi a partire dal **secondo mese** di vita
3. i conigli **non muoiano** (perlomeno nell'arco di tempo considerato)

La successione di Fibonacci (1/4)

Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur?

Leonardo di Pisa
Leonardo Pisano, Leonardo Bonacci, Leonardo Fibonacci
Pisa, 1180–1250

Supponiamo che:

1. una coppia di conigli adulti generi **ogni mese** una coppia di piccoli, un maschio e una femmina
2. la coppia di piccoli inizi a riprodursi a partire dal **secondo mese** di vita
3. i conigli **non muoiano** (perlomeno nell'arco di tempo considerato)

La successione di Fibonacci (1/4)

Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur?

Leonardo di Pisa
Leonardo Pisano, Leonardo Bonacci, Leonardo Fibonacci
Pisa, 1180–1250

Supponiamo che:

1. una coppia di conigli adulti generi **ogni mese** una coppia di piccoli, un maschio e una femmina
2. la coppia di piccoli inizi a riprodursi a partire dal **secondo mese** di vita
3. i conigli **non muoiano** (perlomeno nell'arco di tempo considerato)

La successione di Fibonacci (1/4)

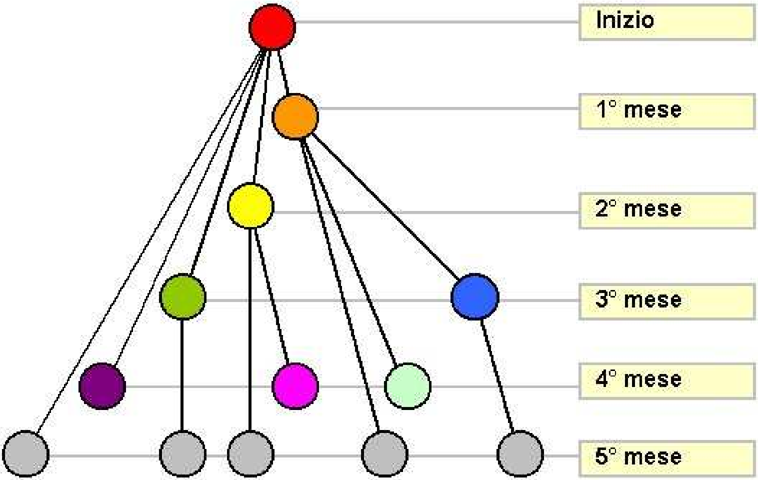
Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur?

Leonardo di Pisa
Leonardo Pisano, Leonardo Bonacci, Leonardo Fibonacci
Pisa, 1180–1250

Supponiamo che:

1. una coppia di conigli adulti generi **ogni mese** una coppia di piccoli, un maschio e una femmina
2. la coppia di piccoli inizi a riprodursi a partire dal **secondo mese** di vita
3. i conigli **non muoiano** (perlomeno nell'arco di tempo considerato)

La successione di Fibonacci (2/4)



La successione di Fibonacci (3/4)

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

	$n = 0$		$F_0 = 0$
	$n = 1$		$F_1 = 1$
inizio	$n = 2$	$\Rightarrow$	$F_2 = F_1 + F_0 = 1$
fine primo mese	$n = 3$	$\Rightarrow$	$F_3 = F_2 + F_1 = 2$
fine secondo mese	$n = 4$	$\Rightarrow$	$F_4 = F_3 + F_2 = 3$
fine terzo mese	$n = 5$	$\Rightarrow$	$F_5 = F_4 + F_3 = 5$
fine quarto mese	$n = 6$	$\Rightarrow$	$F_6 = F_5 + F_4 = 8$
fine quinto mese	$n = 7$	$\Rightarrow$	$F_7 = F_6 + F_5 = 13$
fine sesto mese	$n = 8$	$\Rightarrow$	$F_8 = F_7 + F_6 = 21$
fine settimo mese	$n = 9$	$\Rightarrow$	$F_9 = F_8 + F_7 = 34$
fine ottavo mese	$n = 10$	$\Rightarrow$	$F_{10} = F_9 + F_8 = 55$
fine nono mese	$n = 11$	$\Rightarrow$	$F_{11} = F_{10} + F_9 = 89$
fine decimo mese	$n = 12$	$\Rightarrow$	$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144$
fine undicesimo mese	$n = 13$	$\Rightarrow$	$F_{13} = F_{12} + F_{11} = 233$
fine dodicesimo mese	$n = 14$	$\Rightarrow$	$F_{14} = F_{13} + F_{12} = 377$

La successione di Fibonacci (3/4)

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

	$n = 0$		$F_0 = 0$
	$n = 1$		$F_1 = 1$
inizio	$n = 2$	$\Rightarrow$	$F_2 = F_1 + F_0 = 1$
fine primo mese	$n = 3$	$\Rightarrow$	$F_3 = F_2 + F_1 = 2$
fine secondo mese	$n = 4$	$\Rightarrow$	$F_4 = F_3 + F_2 = 3$
fine terzo mese	$n = 5$	$\Rightarrow$	$F_5 = F_4 + F_3 = 5$
fine quarto mese	$n = 6$	$\Rightarrow$	$F_6 = F_5 + F_4 = 8$
fine quinto mese	$n = 7$	$\Rightarrow$	$F_7 = F_6 + F_5 = 13$
fine sesto mese	$n = 8$	$\Rightarrow$	$F_8 = F_7 + F_6 = 21$
fine settimo mese	$n = 9$	$\Rightarrow$	$F_9 = F_8 + F_7 = 34$
fine ottavo mese	$n = 10$	$\Rightarrow$	$F_{10} = F_9 + F_8 = 55$
fine nono mese	$n = 11$	$\Rightarrow$	$F_{11} = F_{10} + F_9 = 89$
fine decimo mese	$n = 12$	$\Rightarrow$	$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144$
fine undicesimo mese	$n = 13$	$\Rightarrow$	$F_{13} = F_{12} + F_{11} = 233$
fine dodicesimo mese	$n = 14$	$\Rightarrow$	$F_{14} = F_{13} + F_{12} = 377$

La successione di Fibonacci (3/4)

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

	$n = 0$		$F_0 = 0$
	$n = 1$		$F_1 = 1$
inizio	$n = 2$	$\Rightarrow$	$F_2 = F_1 + F_0 = 1$
fine primo mese	$n = 3$	$\Rightarrow$	$F_3 = F_2 + F_1 = 2$
fine secondo mese	$n = 4$	$\Rightarrow$	$F_4 = F_3 + F_2 = 3$
fine terzo mese	$n = 5$	$\Rightarrow$	$F_5 = F_4 + F_3 = 5$
fine quarto mese	$n = 6$	$\Rightarrow$	$F_6 = F_5 + F_4 = 8$
fine quinto mese	$n = 7$	$\Rightarrow$	$F_7 = F_6 + F_5 = 13$
fine sesto mese	$n = 8$	$\Rightarrow$	$F_8 = F_7 + F_6 = 21$
fine settimo mese	$n = 9$	$\Rightarrow$	$F_9 = F_8 + F_7 = 34$
fine ottavo mese	$n = 10$	$\Rightarrow$	$F_{10} = F_9 + F_8 = 55$
fine nono mese	$n = 11$	$\Rightarrow$	$F_{11} = F_{10} + F_9 = 89$
fine decimo mese	$n = 12$	$\Rightarrow$	$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144$
fine undicesimo mese	$n = 13$	$\Rightarrow$	$F_{13} = F_{12} + F_{11} = 233$
fine dodicesimo mese	$n = 14$	$\Rightarrow$	$F_{14} = F_{13} + F_{12} = 377$

La successione di Fibonacci (3/4)

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

	$n = 0$		$F_0 = 0$
	$n = 1$		$F_1 = 1$
inizio	$n = 2$	$\Rightarrow$	$F_2 = F_1 + F_0 = 1$
fine primo mese	$n = 3$	$\Rightarrow$	$F_3 = F_2 + F_1 = 2$
fine secondo mese	$n = 4$	$\Rightarrow$	$F_4 = F_3 + F_2 = 3$
fine terzo mese	$n = 5$	$\Rightarrow$	$F_5 = F_4 + F_3 = 5$
fine quarto mese	$n = 6$	$\Rightarrow$	$F_6 = F_5 + F_4 = 8$
fine quinto mese	$n = 7$	$\Rightarrow$	$F_7 = F_6 + F_5 = 13$
fine sesto mese	$n = 8$	$\Rightarrow$	$F_8 = F_7 + F_6 = 21$
fine settimo mese	$n = 9$	$\Rightarrow$	$F_9 = F_8 + F_7 = 34$
fine ottavo mese	$n = 10$	$\Rightarrow$	$F_{10} = F_9 + F_8 = 55$
fine nono mese	$n = 11$	$\Rightarrow$	$F_{11} = F_{10} + F_9 = 89$
fine decimo mese	$n = 12$	$\Rightarrow$	$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144$
fine undicesimo mese	$n = 13$	$\Rightarrow$	$F_{13} = F_{12} + F_{11} = 233$
fine dodicesimo mese	$n = 14$	$\Rightarrow$	$F_{14} = F_{13} + F_{12} = 377$

La successione di Fibonacci (3/4)

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

	$n = 0$		$F_0 = 0$
	$n = 1$		$F_1 = 1$
inizio	$n = 2$	$\Rightarrow$	$F_2 = F_1 + F_0 = 1$
fine primo mese	$n = 3$	$\Rightarrow$	$F_3 = F_2 + F_1 = 2$
fine secondo mese	$n = 4$	$\Rightarrow$	$F_4 = F_3 + F_2 = 3$
fine terzo mese	$n = 5$	$\Rightarrow$	$F_5 = F_4 + F_3 = 5$
fine quarto mese	$n = 6$	$\Rightarrow$	$F_6 = F_5 + F_4 = 8$
fine quinto mese	$n = 7$	$\Rightarrow$	$F_7 = F_6 + F_5 = 13$
fine sesto mese	$n = 8$	$\Rightarrow$	$F_8 = F_7 + F_6 = 21$
fine settimo mese	$n = 9$	$\Rightarrow$	$F_9 = F_8 + F_7 = 34$
fine ottavo mese	$n = 10$	$\Rightarrow$	$F_{10} = F_9 + F_8 = 55$
fine nono mese	$n = 11$	$\Rightarrow$	$F_{11} = F_{10} + F_9 = 89$
fine decimo mese	$n = 12$	$\Rightarrow$	$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144$
fine undicesimo mese	$n = 13$	$\Rightarrow$	$F_{13} = F_{12} + F_{11} = 233$
fine dodicesimo mese	$n = 14$	$\Rightarrow$	$F_{14} = F_{13} + F_{12} = 377$

La successione di Fibonacci (3/4)

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

	$n = 0$		$F_0 = 0$
	$n = 1$		$F_1 = 1$
inizio	$n = 2$	$\Rightarrow$	$F_2 = F_1 + F_0 = 1$
fine primo mese	$n = 3$	$\Rightarrow$	$F_3 = F_2 + F_1 = 2$
fine secondo mese	$n = 4$	$\Rightarrow$	$F_4 = F_3 + F_2 = 3$
fine terzo mese	$n = 5$	$\Rightarrow$	$F_5 = F_4 + F_3 = 5$
fine quarto mese	$n = 6$	$\Rightarrow$	$F_6 = F_5 + F_4 = 8$
fine quinto mese	$n = 7$	$\Rightarrow$	$F_7 = F_6 + F_5 = 13$
fine sesto mese	$n = 8$	$\Rightarrow$	$F_8 = F_7 + F_6 = 21$
fine settimo mese	$n = 9$	$\Rightarrow$	$F_9 = F_8 + F_7 = 34$
fine ottavo mese	$n = 10$	$\Rightarrow$	$F_{10} = F_9 + F_8 = 55$
fine nono mese	$n = 11$	$\Rightarrow$	$F_{11} = F_{10} + F_9 = 89$
fine decimo mese	$n = 12$	$\Rightarrow$	$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144$
fine undicesimo mese	$n = 13$	$\Rightarrow$	$F_{13} = F_{12} + F_{11} = 233$
fine dodicesimo mese	$n = 14$	$\Rightarrow$	$F_{14} = F_{13} + F_{12} = 377$

La successione di Fibonacci (3/4)

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

	$n = 0$		$F_0 = 0$
	$n = 1$		$F_1 = 1$
inizio	$n = 2$	$\Rightarrow$	$F_2 = F_1 + F_0 = 1$
fine primo mese	$n = 3$	$\Rightarrow$	$F_3 = F_2 + F_1 = 2$
fine secondo mese	$n = 4$	$\Rightarrow$	$F_4 = F_3 + F_2 = 3$
fine terzo mese	$n = 5$	$\Rightarrow$	$F_5 = F_4 + F_3 = 5$
fine quarto mese	$n = 6$	$\Rightarrow$	$F_6 = F_5 + F_4 = 8$
fine quinto mese	$n = 7$	$\Rightarrow$	$F_7 = F_6 + F_5 = 13$
fine sesto mese	$n = 8$	$\Rightarrow$	$F_8 = F_7 + F_6 = 21$
fine settimo mese	$n = 9$	$\Rightarrow$	$F_9 = F_8 + F_7 = 34$
fine ottavo mese	$n = 10$	$\Rightarrow$	$F_{10} = F_9 + F_8 = 55$
fine nono mese	$n = 11$	$\Rightarrow$	$F_{11} = F_{10} + F_9 = 89$
fine decimo mese	$n = 12$	$\Rightarrow$	$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144$
fine undicesimo mese	$n = 13$	$\Rightarrow$	$F_{13} = F_{12} + F_{11} = 233$
fine dodicesimo mese	$n = 14$	$\Rightarrow$	$F_{14} = F_{13} + F_{12} = 377$

La successione di Fibonacci (3/4)

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

	$n = 0$		$F_0 = 0$
	$n = 1$		$F_1 = 1$
inizio	$n = 2$	$\Rightarrow$	$F_2 = F_1 + F_0 = 1$
fine primo mese	$n = 3$	$\Rightarrow$	$F_3 = F_2 + F_1 = 2$
fine secondo mese	$n = 4$	$\Rightarrow$	$F_4 = F_3 + F_2 = 3$
fine terzo mese	$n = 5$	$\Rightarrow$	$F_5 = F_4 + F_3 = 5$
fine quarto mese	$n = 6$	$\Rightarrow$	$F_6 = F_5 + F_4 = 8$
fine quinto mese	$n = 7$	$\Rightarrow$	$F_7 = F_6 + F_5 = 13$
fine sesto mese	$n = 8$	$\Rightarrow$	$F_8 = F_7 + F_6 = 21$
fine settimo mese	$n = 9$	$\Rightarrow$	$F_9 = F_8 + F_7 = 34$
fine ottavo mese	$n = 10$	$\Rightarrow$	$F_{10} = F_9 + F_8 = 55$
fine nono mese	$n = 11$	$\Rightarrow$	$F_{11} = F_{10} + F_9 = 89$
fine decimo mese	$n = 12$	$\Rightarrow$	$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144$
fine undicesimo mese	$n = 13$	$\Rightarrow$	$F_{13} = F_{12} + F_{11} = 233$
fine dodicesimo mese	$n = 14$	$\Rightarrow$	$F_{14} = F_{13} + F_{12} = 377$

La successione di Fibonacci (3/4)

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

	$n = 0$		$F_0 = 0$
	$n = 1$		$F_1 = 1$
inizio	$n = 2$	$\Rightarrow$	$F_2 = F_1 + F_0 = 1$
fine primo mese	$n = 3$	$\Rightarrow$	$F_3 = F_2 + F_1 = 2$
fine secondo mese	$n = 4$	$\Rightarrow$	$F_4 = F_3 + F_2 = 3$
fine terzo mese	$n = 5$	$\Rightarrow$	$F_5 = F_4 + F_3 = 5$
fine quarto mese	$n = 6$	$\Rightarrow$	$F_6 = F_5 + F_4 = 8$
fine quinto mese	$n = 7$	$\Rightarrow$	$F_7 = F_6 + F_5 = 13$
fine sesto mese	$n = 8$	$\Rightarrow$	$F_8 = F_7 + F_6 = 21$
fine settimo mese	$n = 9$	$\Rightarrow$	$F_9 = F_8 + F_7 = 34$
fine ottavo mese	$n = 10$	$\Rightarrow$	$F_{10} = F_9 + F_8 = 55$
fine nono mese	$n = 11$	$\Rightarrow$	$F_{11} = F_{10} + F_9 = 89$
fine decimo mese	$n = 12$	$\Rightarrow$	$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144$
fine undicesimo mese	$n = 13$	$\Rightarrow$	$F_{13} = F_{12} + F_{11} = 233$
fine dodicesimo mese	$n = 14$	$\Rightarrow$	$F_{14} = F_{13} + F_{12} = 377$

La successione di Fibonacci (3/4)

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

	$n = 0$		$F_0 = 0$
	$n = 1$		$F_1 = 1$
inizio	$n = 2$	$\Rightarrow$	$F_2 = F_1 + F_0 = 1$
fine primo mese	$n = 3$	$\Rightarrow$	$F_3 = F_2 + F_1 = 2$
fine secondo mese	$n = 4$	$\Rightarrow$	$F_4 = F_3 + F_2 = 3$
fine terzo mese	$n = 5$	$\Rightarrow$	$F_5 = F_4 + F_3 = 5$
fine quarto mese	$n = 6$	$\Rightarrow$	$F_6 = F_5 + F_4 = 8$
fine quinto mese	$n = 7$	$\Rightarrow$	$F_7 = F_6 + F_5 = 13$
fine sesto mese	$n = 8$	$\Rightarrow$	$F_8 = F_7 + F_6 = 21$
fine settimo mese	$n = 9$	$\Rightarrow$	$F_9 = F_8 + F_7 = 34$
fine ottavo mese	$n = 10$	$\Rightarrow$	$F_{10} = F_9 + F_8 = 55$
fine nono mese	$n = 11$	$\Rightarrow$	$F_{11} = F_{10} + F_9 = 89$
fine decimo mese	$n = 12$	$\Rightarrow$	$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144$
fine undicesimo mese	$n = 13$	$\Rightarrow$	$F_{13} = F_{12} + F_{11} = 233$
fine dodicesimo mese	$n = 14$	$\Rightarrow$	$F_{14} = F_{13} + F_{12} = 377$

La successione di Fibonacci (3/4)

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

	$n = 0$		$F_0 = 0$
	$n = 1$		$F_1 = 1$
inizio	$n = 2$	$\Rightarrow$	$F_2 = F_1 + F_0 = 1$
fine primo mese	$n = 3$	$\Rightarrow$	$F_3 = F_2 + F_1 = 2$
fine secondo mese	$n = 4$	$\Rightarrow$	$F_4 = F_3 + F_2 = 3$
fine terzo mese	$n = 5$	$\Rightarrow$	$F_5 = F_4 + F_3 = 5$
fine quarto mese	$n = 6$	$\Rightarrow$	$F_6 = F_5 + F_4 = 8$
fine quinto mese	$n = 7$	$\Rightarrow$	$F_7 = F_6 + F_5 = 13$
fine sesto mese	$n = 8$	$\Rightarrow$	$F_8 = F_7 + F_6 = 21$
fine settimo mese	$n = 9$	$\Rightarrow$	$F_9 = F_8 + F_7 = 34$
fine ottavo mese	$n = 10$	$\Rightarrow$	$F_{10} = F_9 + F_8 = 55$
fine nono mese	$n = 11$	$\Rightarrow$	$F_{11} = F_{10} + F_9 = 89$
fine decimo mese	$n = 12$	$\Rightarrow$	$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144$
fine undicesimo mese	$n = 13$	$\Rightarrow$	$F_{13} = F_{12} + F_{11} = 233$
fine dodicesimo mese	$n = 14$	$\Rightarrow$	$F_{14} = F_{13} + F_{12} = 377$

La successione di Fibonacci (3/4)

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

	$n = 0$		$F_0 = 0$
	$n = 1$		$F_1 = 1$
inizio	$n = 2$	$\Rightarrow$	$F_2 = F_1 + F_0 = 1$
fine primo mese	$n = 3$	$\Rightarrow$	$F_3 = F_2 + F_1 = 2$
fine secondo mese	$n = 4$	$\Rightarrow$	$F_4 = F_3 + F_2 = 3$
fine terzo mese	$n = 5$	$\Rightarrow$	$F_5 = F_4 + F_3 = 5$
fine quarto mese	$n = 6$	$\Rightarrow$	$F_6 = F_5 + F_4 = 8$
fine quinto mese	$n = 7$	$\Rightarrow$	$F_7 = F_6 + F_5 = 13$
fine sesto mese	$n = 8$	$\Rightarrow$	$F_8 = F_7 + F_6 = 21$
fine settimo mese	$n = 9$	$\Rightarrow$	$F_9 = F_8 + F_7 = 34$
fine ottavo mese	$n = 10$	$\Rightarrow$	$F_{10} = F_9 + F_8 = 55$
fine nono mese	$n = 11$	$\Rightarrow$	$F_{11} = F_{10} + F_9 = 89$
fine decimo mese	$n = 12$	$\Rightarrow$	$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144$
fine undicesimo mese	$n = 13$	$\Rightarrow$	$F_{13} = F_{12} + F_{11} = 233$
fine dodicesimo mese	$n = 14$	$\Rightarrow$	$F_{14} = F_{13} + F_{12} = 377$

La successione di Fibonacci (3/4)

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

	$n = 0$		$F_0 = 0$
	$n = 1$		$F_1 = 1$
inizio	$n = 2$	$\Rightarrow$	$F_2 = F_1 + F_0 = 1$
fine primo mese	$n = 3$	$\Rightarrow$	$F_3 = F_2 + F_1 = 2$
fine secondo mese	$n = 4$	$\Rightarrow$	$F_4 = F_3 + F_2 = 3$
fine terzo mese	$n = 5$	$\Rightarrow$	$F_5 = F_4 + F_3 = 5$
fine quarto mese	$n = 6$	$\Rightarrow$	$F_6 = F_5 + F_4 = 8$
fine quinto mese	$n = 7$	$\Rightarrow$	$F_7 = F_6 + F_5 = 13$
fine sesto mese	$n = 8$	$\Rightarrow$	$F_8 = F_7 + F_6 = 21$
fine settimo mese	$n = 9$	$\Rightarrow$	$F_9 = F_8 + F_7 = 34$
fine ottavo mese	$n = 10$	$\Rightarrow$	$F_{10} = F_9 + F_8 = 55$
fine nono mese	$n = 11$	$\Rightarrow$	$F_{11} = F_{10} + F_9 = 89$
fine decimo mese	$n = 12$	$\Rightarrow$	$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144$
fine undicesimo mese	$n = 13$	$\Rightarrow$	$F_{13} = F_{12} + F_{11} = 233$
fine dodicesimo mese	$n = 14$	$\Rightarrow$	$F_{14} = F_{13} + F_{12} = 377$

La successione di Fibonacci (3/4)

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

	$n = 0$		$F_0 = 0$
	$n = 1$		$F_1 = 1$
inizio	$n = 2$	$\Rightarrow$	$F_2 = F_1 + F_0 = 1$
fine primo mese	$n = 3$	$\Rightarrow$	$F_3 = F_2 + F_1 = 2$
fine secondo mese	$n = 4$	$\Rightarrow$	$F_4 = F_3 + F_2 = 3$
fine terzo mese	$n = 5$	$\Rightarrow$	$F_5 = F_4 + F_3 = 5$
fine quarto mese	$n = 6$	$\Rightarrow$	$F_6 = F_5 + F_4 = 8$
fine quinto mese	$n = 7$	$\Rightarrow$	$F_7 = F_6 + F_5 = 13$
fine sesto mese	$n = 8$	$\Rightarrow$	$F_8 = F_7 + F_6 = 21$
fine settimo mese	$n = 9$	$\Rightarrow$	$F_9 = F_8 + F_7 = 34$
fine ottavo mese	$n = 10$	$\Rightarrow$	$F_{10} = F_9 + F_8 = 55$
fine nono mese	$n = 11$	$\Rightarrow$	$F_{11} = F_{10} + F_9 = 89$
fine decimo mese	$n = 12$	$\Rightarrow$	$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144$
fine undicesimo mese	$n = 13$	$\Rightarrow$	$F_{13} = F_{12} + F_{11} = 233$
fine dodicesimo mese	$n = 14$	$\Rightarrow$	$F_{14} = F_{13} + F_{12} = 377$

La successione di Fibonacci (3/4)

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

	$n = 0$		$F_0 = 0$
	$n = 1$		$F_1 = 1$
inizio	$n = 2$	$\Rightarrow$	$F_2 = F_1 + F_0 = 1$
fine primo mese	$n = 3$	$\Rightarrow$	$F_3 = F_2 + F_1 = 2$
fine secondo mese	$n = 4$	$\Rightarrow$	$F_4 = F_3 + F_2 = 3$
fine terzo mese	$n = 5$	$\Rightarrow$	$F_5 = F_4 + F_3 = 5$
fine quarto mese	$n = 6$	$\Rightarrow$	$F_6 = F_5 + F_4 = 8$
fine quinto mese	$n = 7$	$\Rightarrow$	$F_7 = F_6 + F_5 = 13$
fine sesto mese	$n = 8$	$\Rightarrow$	$F_8 = F_7 + F_6 = 21$
fine settimo mese	$n = 9$	$\Rightarrow$	$F_9 = F_8 + F_7 = 34$
fine ottavo mese	$n = 10$	$\Rightarrow$	$F_{10} = F_9 + F_8 = 55$
fine nono mese	$n = 11$	$\Rightarrow$	$F_{11} = F_{10} + F_9 = 89$
fine decimo mese	$n = 12$	$\Rightarrow$	$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144$
fine undicesimo mese	$n = 13$	$\Rightarrow$	$F_{13} = F_{12} + F_{11} = 233$
fine dodicesimo mese	$n = 14$	$\Rightarrow$	$F_{14} = F_{13} + F_{12} = 377$

La successione di Fibonacci (3/4)

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

	$n = 0$		$F_0 = 0$
	$n = 1$		$F_1 = 1$
inizio	$n = 2$	$\Rightarrow$	$F_2 = F_1 + F_0 = 1$
fine primo mese	$n = 3$	$\Rightarrow$	$F_3 = F_2 + F_1 = 2$
fine secondo mese	$n = 4$	$\Rightarrow$	$F_4 = F_3 + F_2 = 3$
fine terzo mese	$n = 5$	$\Rightarrow$	$F_5 = F_4 + F_3 = 5$
fine quarto mese	$n = 6$	$\Rightarrow$	$F_6 = F_5 + F_4 = 8$
fine quinto mese	$n = 7$	$\Rightarrow$	$F_7 = F_6 + F_5 = 13$
fine sesto mese	$n = 8$	$\Rightarrow$	$F_8 = F_7 + F_6 = 21$
fine settimo mese	$n = 9$	$\Rightarrow$	$F_9 = F_8 + F_7 = 34$
fine ottavo mese	$n = 10$	$\Rightarrow$	$F_{10} = F_9 + F_8 = 55$
fine nono mese	$n = 11$	$\Rightarrow$	$F_{11} = F_{10} + F_9 = 89$
fine decimo mese	$n = 12$	$\Rightarrow$	$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144$
fine undicesimo mese	$n = 13$	$\Rightarrow$	$F_{13} = F_{12} + F_{11} = 233$
fine dodicesimo mese	$n = 14$	$\Rightarrow$	$F_{14} = F_{13} + F_{12} = 377$

La successione di Fibonacci (4/4)

Sotto le nostre ipotesi, dopo i anno (12 mesi) ci sono 377 coppie, ovvero **754 conigli**!!! (beati gli allevatori di conigli!)
Si osservi che siamo partiti da una sola coppia di conigli adulti.

I numeri di Fibonacci godono di numerose proprietà matematiche...

- $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ (rapporto aureo)
- $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n\right]$
- $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$
- ...

La successione di Fibonacci (4/4)

Sotto le nostre ipotesi, dopo i anno (12 mesi) ci sono 377 coppie, ovvero **754 conigli**!!! (beati gli allevatori di conigli!)
Si osservi che siamo partiti da una sola coppia di conigli adulti.

I numeri di Fibonacci godono di numerose proprietà matematiche...

- $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ (rapporto aureo)
- $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n\right]$
- $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$
- ...

La successione di Fibonacci (4/4)

Sotto le nostre ipotesi, dopo i anno (12 mesi) ci sono 377 coppie, ovvero **754 conigli**!!! (beati gli allevatori di conigli!)
Si osservi che siamo partiti da una sola coppia di conigli adulti.

I numeri di Fibonacci godono di numerose proprietà matematiche...

- $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ (rapporto aureo)
- $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi} \right)^n \right]$
- $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$
- ...

La successione di Fibonacci (4/4)

Sotto le nostre ipotesi, dopo i anno (12 mesi) ci sono 377 coppie, ovvero **754 conigli**!!! (beati gli allevatori di conigli!)
Si osservi che siamo partiti da una sola coppia di conigli adulti.

I numeri di Fibonacci godono di numerose proprietà matematiche...

- $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ (rapporto aureo)
- $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi} \right)^n \right]$
- $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$
- ...

La successione di Fibonacci (4/4)

Sotto le nostre ipotesi, dopo i anno (12 mesi) ci sono 377 coppie, ovvero **754 conigli**!!! (beati gli allevatori di conigli!)
Si osservi che siamo partiti da una sola coppia di conigli adulti.

I numeri di Fibonacci godono di numerose proprietà matematiche...

- $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ (rapporto aureo)
- $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi} \right)^n \right]$
- $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$
- ...

La successione di Fibonacci (4/4)

Sotto le nostre ipotesi, dopo i anno (12 mesi) ci sono 377 coppie, ovvero **754 conigli**!!! (beati gli allevatori di conigli!)
Si osservi che siamo partiti da una sola coppia di conigli adulti.

I numeri di Fibonacci godono di numerose proprietà matematiche...

- $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ (rapporto aureo)
- $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n\right]$
- $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$
- ...

La successione di Fibonacci nel numero di petali...

1

2

3

5

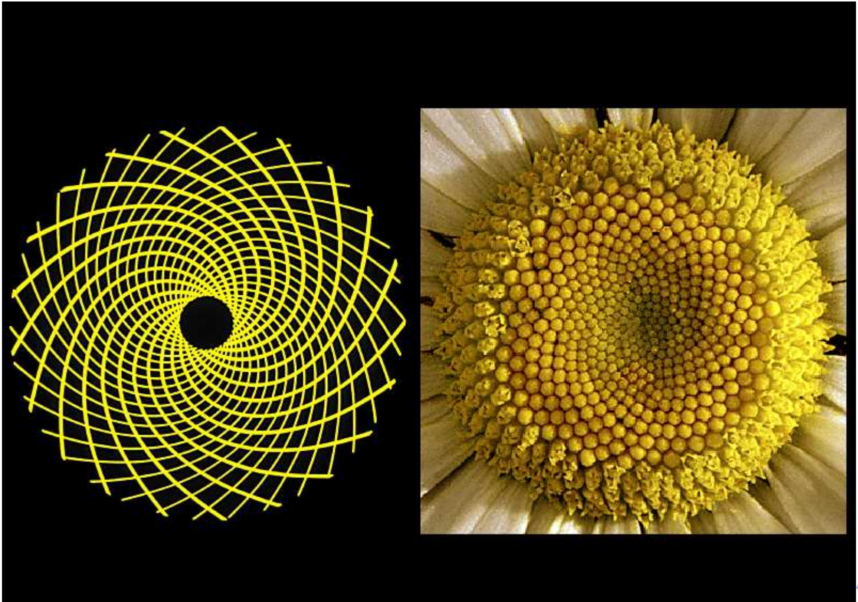
8

13

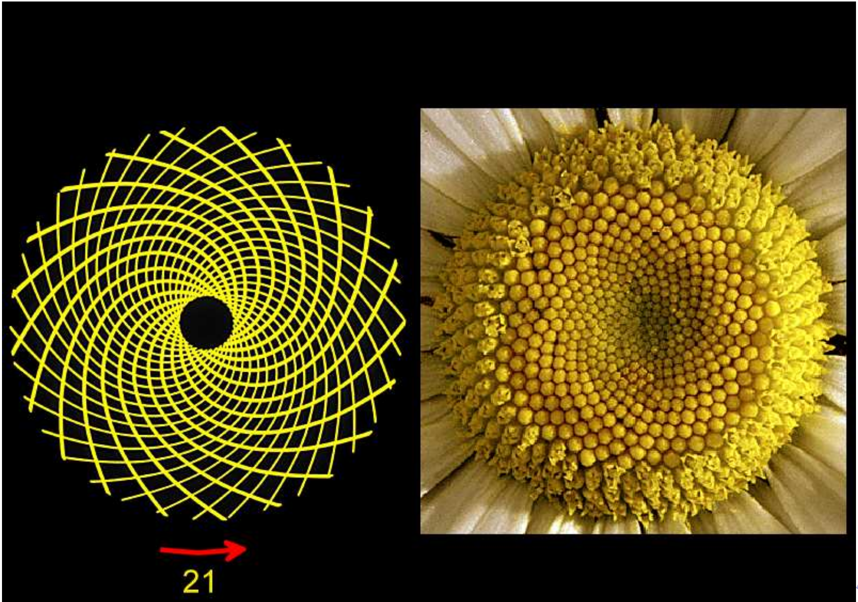
21

34

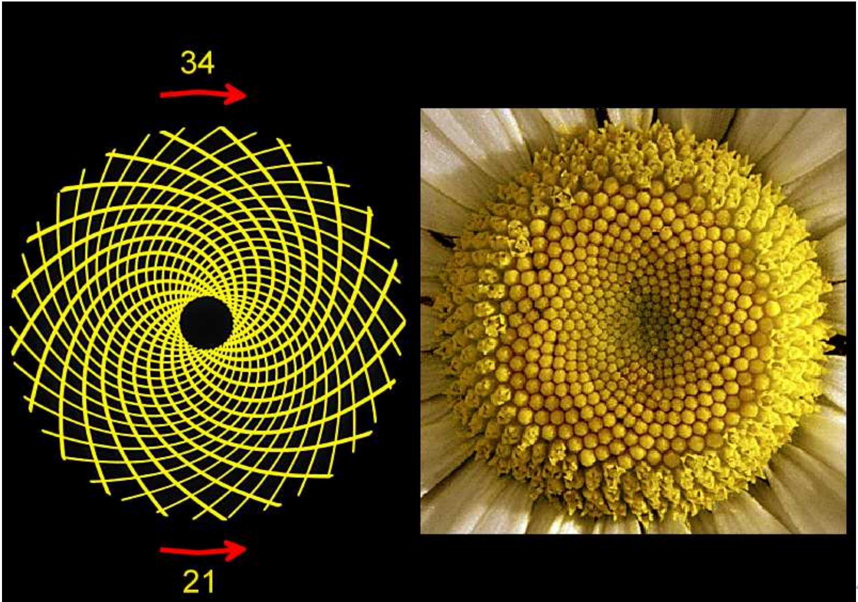
La successione di Fibonacci nelle margherite... (1/3)



La successione di Fibonacci nelle margherite... (2/3)

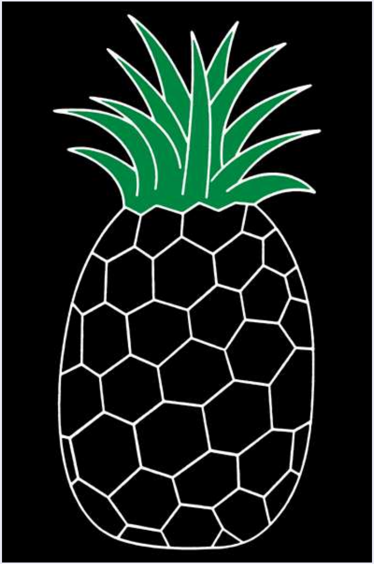


La successione di Fibonacci nelle margherite... (3/3)

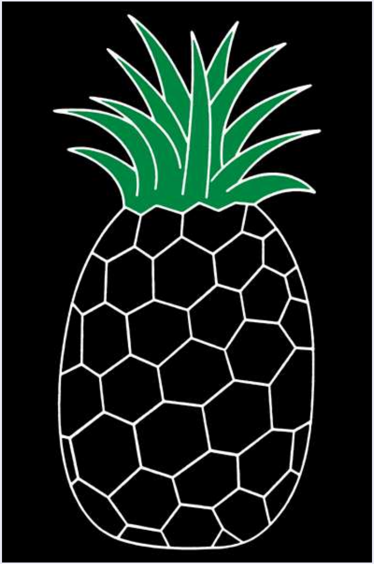


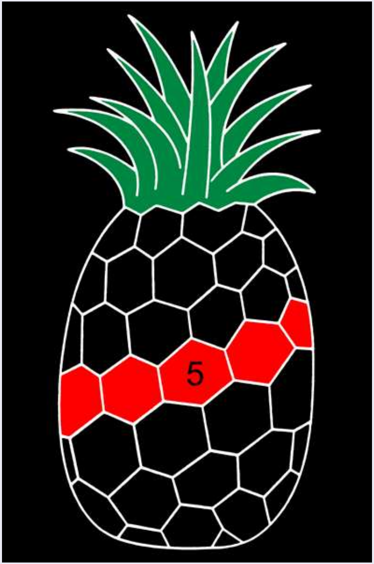
La successione di Fibonacci nell'ananas... (1/3)

La successione di Fibonacci nell'ananas... (2/3)

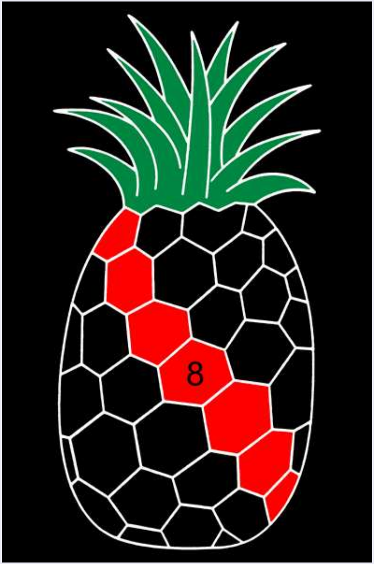


La successione di Fibonacci nell'ananas... (2/3)

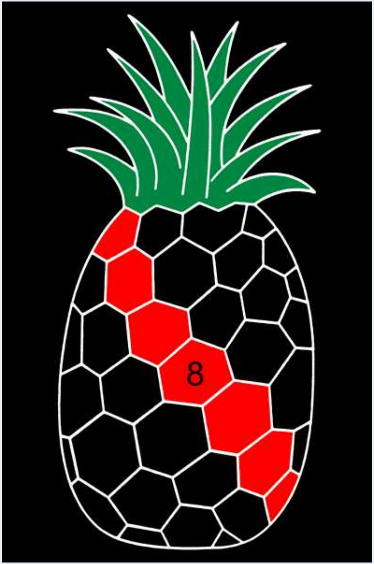


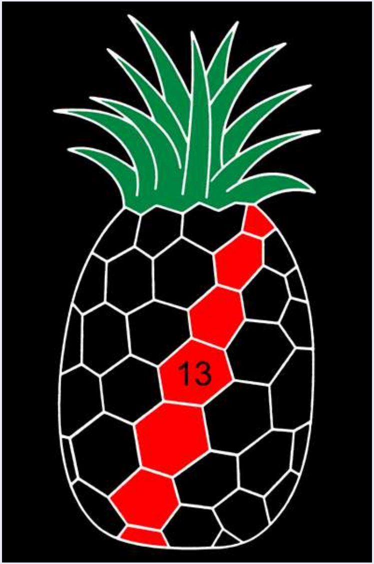


La successione di Fibonacci nell’ananas... (3/3)

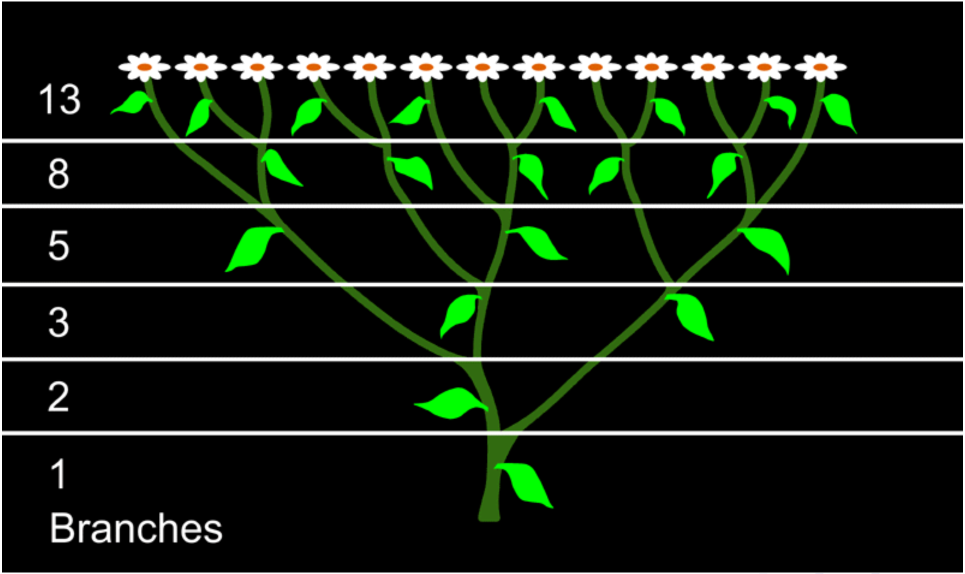


La successione di Fibonacci nell'ananas... (3/3)

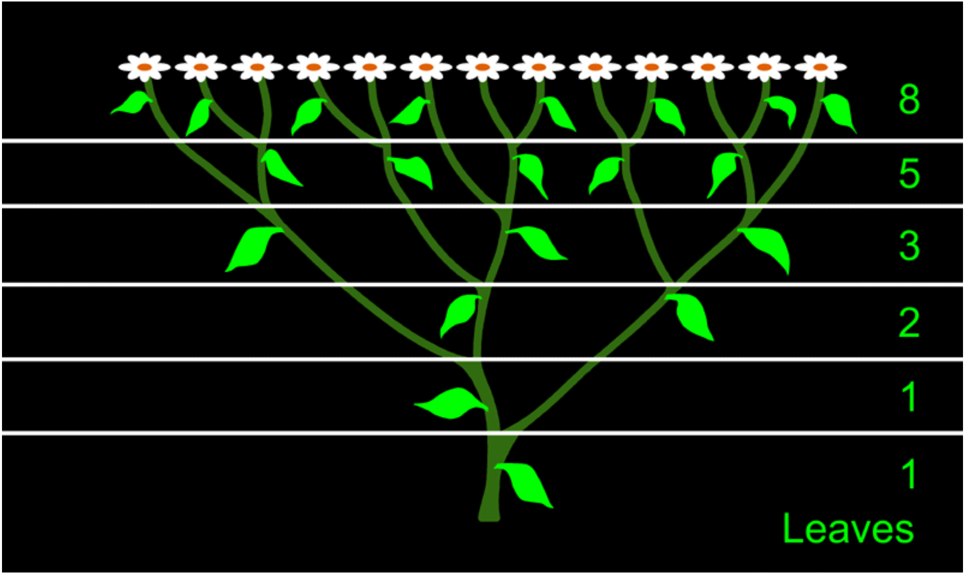




La successione di Fibonacci nell’*Achillea ptarmica*



La successione di Fibonacci nell'*Achillea ptarmica*



Agenda

1 Cos'è e a cosa serve la ricorsione?
- Esempi preliminari

2 La ricorsione in matematica
- La successione di Fibonacci
- E il buon vecchio π?
- La mappa logistica

3 Chaos e matematica
- Ma esiste il chaos matematico?

Pi greco

Domanda:

Chi si ricorda cos'è pi greco (π)? La sua definizione è...

Risposta:

Non è 3.14!!! ...È il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro.
Nota: questo è vero per ogni circonferenza!

Sì, ma quanto vale numericamente π?
...è un numero **irrazionale**...
Cioè? Un numero che "non ragiona"???????

Pi greco

Domanda:

Chi si ricorda cos'è pi greco (π)? La sua definizione è...

Risposta:

Non è 3.14!!! ...È il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro.
Nota: questo è vero per ogni circonferenza!

Sì, ma quanto vale numericamente π?
...è un numero **irrazionale**...
Cioè? Un numero che "non ragiona"???????

Pi greco

Domanda:

Chi si ricorda cos'è pi greco (π)? La sua definizione è...

Risposta:

Non è 3.14!!! ...È il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro.

Nota: questo è vero per ogni circonferenza!

Sì, ma quanto vale numericamente π?

...è un numero **irrazionale**...

Cioè? Un numero che "non ragiona"???????

Pi greco

Domanda:

Chi si ricorda cos'è pi greco (π)? La sua definizione è...

Risposta:

Non è 3.14!!! ...È il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro.
Nota: questo è vero per ogni circonferenza!

Sì, ma quanto vale numericamente π?
...è un numero **irrazionale**...
Cioè? Un numero che "non ragiona"???????

Pi greco

Domanda:

Chi si ricorda cos'è pi greco (π)? La sua definizione è...

Risposta:

Non è 3.14!!! ...È il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro.
Nota: questo è vero per ogni circonferenza!

Sì, ma quanto vale numericamente π?
...è un numero **irrazionale**...
Cioè? Un numero che "non ragiona"???????

Pi greco

Domanda:

Chi si ricorda cos'è pi greco (π)? La sua definizione è...

Risposta:

Non è 3.14!!! ...È il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro.
Nota: questo è vero per ogni circonferenza!

Sì, ma quanto vale numericamente π?
...è un numero **irrazionale**...
Cioè? Un numero che "non ragiona"???????

Pi greco

Domanda:

Chi si ricorda cos'è pi greco (π)? La sua definizione è...

Risposta:

Non è 3.14!!! ...È il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro.
Nota: questo è vero per ogni circonferenza!

Sì, ma quanto vale numericamente π?
...è un numero **irrazionale**...
Cioè? Un numero che "non ragiona"???????

Pi greco, numero irrazionale (1/2)

Definizione:

Un numero si dice irrazionale se non può essere scritto sotto forma di frazione.

In pratica? Un numero irrazionale è formato da infinite cifre (dopo la virgola) che non si ripetono periodicamente. Esempi:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} &\approx 1.41421356237310\ldots \\
\sqrt{3} &\approx 1.73205080756888\ldots \\
e &\approx 2.71828182845905\ldots \\
\pi &\approx 3.14\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Pi greco, numero irrazionale (1/2)

Definizione:

Un numero si dice irrazionale se non può essere scritto sotto forma di frazione.

In pratica? Un numero irrazionale è formato da infinite cifre (dopo la virgola) che non si ripetono periodicamente. Esempi:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &\approx 1.41421356237310\ldots \\ \sqrt{3} &\approx 1.73205080756888\ldots \\ e &\approx 2.71828182845905\ldots \\ \pi &\approx 3.14\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pi greco, numero irrazionale (1/2)

Definizione:

Un numero si dice irrazionale se non può essere scritto sotto forma di frazione.

In pratica? Un numero irrazionale è formato da infinite cifre (dopo la virgola) che non si ripetono periodicamente. Esempi:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} &\approx 1.4142135623731 0\ldots \\
\sqrt{3} &\approx 1.7320508075688 8\ldots \\
e &\approx 2.7182818284590 5\ldots \\
\pi &\approx 3.14\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Pi greco, numero irrazionale (1/2)

Definizione:

Un numero si dice irrazionale se non può essere scritto sotto forma di frazione.

In pratica? Un numero irrazionale è formato da infinite cifre (dopo la virgola) che non si ripetono periodicamente. Esempi:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} &\approx 1.41421356237310\ldots \\
\sqrt{3} &\approx 1.73205080756888\ldots \\
e &\approx 2.71828182845905\ldots \\
\pi &\approx 3.14\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Pi greco, numero irrazionale (1/2)

Definizione:

Un numero si dice irrazionale se non può essere scritto sotto forma di frazione.

In pratica? Un numero irrazionale è formato da infinite cifre (dopo la virgola) che non si ripetono periodicamente. Esempi:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} &\approx 1.41421356237310\ldots \\
\sqrt{3} &\approx 1.73205080756888\ldots \\
e &\approx 2.71828182845905\ldots \\
\pi &\approx 3.14\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Pi greco, numero irrazionale (1/2)

Definizione:

Un numero si dice irrazionale se non può essere scritto sotto forma di frazione.

In pratica? Un numero irrazionale è formato da infinite cifre (dopo la virgola) che non si ripetono periodicamente. Esempi:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} &\approx 1.41421356237310\ldots \\
\sqrt{3} &\approx 1.73205080756888\ldots \\
e &\approx 2.71828182845905\ldots \\
\pi &\approx 3.14\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Pi greco, numero irrazionale (1/2)

Definizione:

Un numero si dice irrazionale se non può essere scritto sotto forma di frazione.

In pratica? Un numero irrazionale è formato da infinite cifre (dopo la virgola) che non si ripetono periodicamente. Esempi:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} &\approx 1.41421356237310\ldots \\
\sqrt{3} &\approx 1.73205080756888\ldots \\
e &\approx 2.71828182845905\ldots \\
\pi &\approx 3.14\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Pi greco, numero irrazionale (1/2)

Definizione:

Un numero si dice irrazionale se non può essere scritto sotto forma di frazione.

In pratica? Un numero irrazionale è formato da infinite cifre (dopo la virgola) che non si ripetono periodicamente. Esempi:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &\approx 1.41421356237310\ldots \\
\sqrt{3} &\approx 1.73205080756888\ldots \\
e &\approx 2.71828182845905\ldots \\
\pi &\approx 3.14\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Pi greco, numero irrazionale (2/2)

Domanda:

E se volessi conoscere l'ottava cifra significativa di π, come faccio?

Risposta:

1. chiedo a Google
2. chiedo alla matematica applicata

Chiediamo alla matematica applicata: basta utilizzare una **procedura ricorsiva**:

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 2 \\ z_{n+1} = \dfrac{z_n\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{1-\left(\frac{2}{2^n}z_n\right)^2}}} \end{cases}$$

Pi greco, numero irrazionale (2/2)

Domanda:

E se volessi conoscere l'ottava cifra significativa di π, come faccio?

Risposta:

1. chiedo a Google
2. chiedo alla matematica applicata

Chiediamo alla matematica applicata: basta utilizzare una **procedura ricorsiva**:

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 2 \\ z_{n+1} = \dfrac{z_n\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{1-\left(\frac{2}{2^n}z_n\right)^2}}} \end{cases}$$

Pi greco, numero irrazionale (2/2)

Domanda:

E se volessi conoscere l'ottava cifra significativa di π, come faccio?

Risposta:

1. chiedo a Google
2. chiedo alla matematica applicata

Chiediamo alla matematica applicata: basta utilizzare una **procedura ricorsiva**:

$$\begin{cases} z_1 & = & 0 \\ z_2 & = & 2 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{z_n\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{1-\left(\frac{2}{2^n}z_n\right)^2}}} \end{cases}$$

Pi greco, numero irrazionale (2/2)

Domanda:

E se volessi conoscere l'ottava cifra significativa di π, come faccio?

Risposta:

1. chiedo a Google
2. chiedo alla matematica applicata

Chiediamo alla matematica applicata: basta utilizzare una **procedura ricorsiva**:

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 2 \\ z_{n+1} = \dfrac{z_n\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{1-\left(\frac{2}{2^n}z_n\right)^2}}} \end{cases}$$

Pi greco, numero irrazionale (2/2)

Domanda:

E se volessi conoscere l'ottava cifra significativa di π, come faccio?

Risposta:

1. chiedo a Google
2. chiedo alla matematica applicata

Chiediamo alla matematica applicata: basta utilizzare una **procedura ricorsiva**:

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 2 \\ z_{n+1} = \dfrac{z_n\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{1-\left(\frac{2}{2^n}z_n\right)^2}}} \end{cases}$$

Pi greco, numero irrazionale (2/2)

Domanda:

E se volessi conoscere l'ottava cifra significativa di π, come faccio?

Risposta:

1. chiedo a Google
2. chiedo alla matematica applicata

Chiediamo alla matematica applicata: basta utilizzare una **procedura ricorsiva**:

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 2 \\ z_{n+1} = \dfrac{z_n\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{1-\left(\frac{2}{2^n}z_n\right)^2}}} \end{cases}$$

Pi greco, numero irrazionale (2/2)

Domanda:

E se volessi conoscere l'ottava cifra significativa di π, come faccio?

Risposta:

1. chiedo a Google
2. chiedo alla matematica applicata

Chiediamo alla matematica applicata: basta utilizzare una **procedura ricorsiva**:

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 2 \\ z_{n+1} = \dfrac{z_n\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{1-\left(\frac{2}{2^n}z_n\right)^2}}} \end{cases}$$

Pi greco, numero irrazionale (2/2)

Domanda:

E se volessi conoscere l'ottava cifra significativa di π, come faccio?

Risposta:

1. chiedo a Google
2. chiedo alla matematica applicata

Chiediamo alla matematica applicata: basta utilizzare una **procedura ricorsiva**:

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 2 \\ z_{n+1} = \dfrac{z_n\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{1-\left(\frac{2}{2^n} z_n\right)^2}}} \end{cases}$$

Pi greco, procedura ricorsiva

$$
\begin{array}{lllllll}
n = 1 & \Rightarrow & \pi = 0.000000000000 & & \\
n = 2 & \Rightarrow & \pi = 2.000000000000 & & \\
n = 3 & \Rightarrow & \pi = 2.828427124746 & & \\
n = 4 & \Rightarrow & \pi = 3.061467458921 & & \\
n = 5 & \Rightarrow & \pi = 3.121445152258 & & \\
n = 6 & \Rightarrow & \pi = 3.136548490546 & & \\
n = 7 & \Rightarrow & \pi = 3.140331156955 & & \\
n = 8 & \Rightarrow & \pi = 3.141277250933 & & \\
n = 9 & \Rightarrow & \pi = 3.141513801144 & \Rightarrow & \pi = 3.1415926 \\
n = 10 & \Rightarrow & \pi = 3.141572940367 & & \\
n = 11 & \Rightarrow & \pi = 3.141587725277 & & \\
n = 12 & \Rightarrow & \pi = 3.141591421511 & & \\
n = 13 & \Rightarrow & \pi = 3.141592345570 & & \\
n = 14 & \Rightarrow & \pi = 3.141592576585 & & \\
n = 15 & \Rightarrow & \pi = 3.141592634339 & & \\
n = 16 & \Rightarrow & \pi = 3.141592648777 & &
\end{array}
$$

Pi greco, procedura ricorsiva

$$
\begin{array}{lllll}
n = 1 & \Rightarrow & \pi = 0.000000000000 & & \\
n = 2 & \Rightarrow & \pi = 2.000000000000 & & \\
n = 3 & \Rightarrow & \pi = 2.828427124746 & & \\
n = 4 & \Rightarrow & \pi = 3.061467458921 & & \\
n = 5 & \Rightarrow & \pi = 3.121445152258 & & \\
n = 6 & \Rightarrow & \pi = 3.136548490546 & & \\
n = 7 & \Rightarrow & \pi = 3.140331156955 & & \\
n = 8 & \Rightarrow & \pi = 3.141277250933 & & \\
n = 9 & \Rightarrow & \pi = 3.141513801144 & \Rightarrow & \pi = 3.1415926 \\
n = 10 & \Rightarrow & \pi = 3.141572940367 & & \\
n = 11 & \Rightarrow & \pi = 3.141587725277 & & \\
n = 12 & \Rightarrow & \pi = 3.141591421511 & & \\
n = 13 & \Rightarrow & \pi = 3.141592345570 & & \\
n = 14 & \Rightarrow & \pi = 3.141592576585 & & \\
n = 15 & \Rightarrow & \pi = 3.141592634339 & & \\
n = 16 & \Rightarrow & \pi = 3.141592648777 & &
\end{array}
$$

Pi greco, procedura ricorsiva

$$n = 1 \Rightarrow \pi = 0.000000000000$$
$$n = 2 \Rightarrow \pi = 2.000000000000$$
$$n = 3 \Rightarrow \pi = 2.828427124746$$
$$n = 4 \Rightarrow \pi = 3.061467458921$$
$$n = 5 \Rightarrow \pi = 3.121445152258$$
$$n = 6 \Rightarrow \pi = 3.136548490546$$
$$n = 7 \Rightarrow \pi = 3.140331156955$$
$$n = 8 \Rightarrow \pi = 3.141277250933$$
$$n = 9 \Rightarrow \pi = 3.141513801144 \Rightarrow \pi = 3.1415926$$
$$n = 10 \Rightarrow \pi = 3.141572940367$$
$$n = 11 \Rightarrow \pi = 3.141587725277$$
$$n = 12 \Rightarrow \pi = 3.141591421511$$
$$n = 13 \Rightarrow \pi = 3.141592345570$$
$$n = 14 \Rightarrow \pi = 3.141592576585$$
$$n = 15 \Rightarrow \pi = 3.141592634339$$
$$n = 16 \Rightarrow \pi = 3.141592648777$$

Pi greco, procedura ricorsiva

$$
\begin{array}{lcrcl}
n & = & 1 & \Rightarrow & \pi = 0.000000000000 \\
n & = & 2 & \Rightarrow & \pi = 2.000000000000 \\
n & = & 3 & \Rightarrow & \pi = 2.828427124746 \\
n & = & 4 & \Rightarrow & \pi = 3.061467458921 \\
n & = & 5 & \Rightarrow & \pi = 3.121445152258 \\
n & = & 6 & \Rightarrow & \pi = 3.136548490546 \\
n & = & 7 & \Rightarrow & \pi = 3.140331156955 \\
n & = & 8 & \Rightarrow & \pi = 3.141277250933 \\
n & = & 9 & \Rightarrow & \pi = 3.141513801144 \quad \Rightarrow \quad \pi = 3.1415926 \\
n & = & 10 & \Rightarrow & \pi = 3.141572940367 \\
n & = & 11 & \Rightarrow & \pi = 3.141587725277 \\
n & = & 12 & \Rightarrow & \pi = 3.141591421511 \\
n & = & 13 & \Rightarrow & \pi = 3.141592345570 \\
n & = & 14 & \Rightarrow & \pi = 3.141592576585 \\
n & = & 15 & \Rightarrow & \pi = 3.141592634339 \\
n & = & 16 & \Rightarrow & \pi = 3.141592648777
\end{array}
$$

Pi greco, procedura ricorsiva

$$
\begin{aligned}
n &= 1 \Rightarrow \pi = 0.000000000000 \\
n &= 2 \Rightarrow \pi = 2.000000000000 \\
n &= 3 \Rightarrow \pi = 2.828427124746 \\
n &= 4 \Rightarrow \pi = 3.061467458921 \\
n &= 5 \Rightarrow \pi = 3.121445152258 \\
n &= 6 \Rightarrow \pi = 3.136548490546 \\
n &= 7 \Rightarrow \pi = 3.140331156955 \\
n &= 8 \Rightarrow \pi = 3.141277250933 \\
n &= 9 \Rightarrow \pi = 3.141513801144 \qquad \Rightarrow \qquad \pi = 3.1415926 \\
n &= 10 \Rightarrow \pi = 3.141572940367 \\
n &= 11 \Rightarrow \pi = 3.141587725277 \\
n &= 12 \Rightarrow \pi = 3.141591421511 \\
n &= 13 \Rightarrow \pi = 3.141592345570 \\
n &= 14 \Rightarrow \pi = 3.141592576585 \\
n &= 15 \Rightarrow \pi = 3.141592634339 \\
n &= 16 \Rightarrow \pi = 3.141592648777
\end{aligned}
$$

Pi greco, procedura ricorsiva

$$
\begin{aligned}
n &= 1 \Rightarrow \pi = 0.000000000000\\
n &= 2 \Rightarrow \pi = 2.000000000000\\
n &= 3 \Rightarrow \pi = 2.828427124746\\
n &= 4 \Rightarrow \pi = 3.061467458921\\
n &= 5 \Rightarrow \pi = 3.121445152258\\
n &= 6 \Rightarrow \pi = 3.136548490546\\
n &= 7 \Rightarrow \pi = 3.140331156955\\
n &= 8 \Rightarrow \pi = 3.141277250933\\
n &= 9 \Rightarrow \pi = 3.141513801144 \quad \Rightarrow \quad \pi = 3.1415926\\
n &= 10 \Rightarrow \pi = 3.141572940367\\
n &= 11 \Rightarrow \pi = 3.141587725277\\
n &= 12 \Rightarrow \pi = 3.141591421511\\
n &= 13 \Rightarrow \pi = 3.141592345570\\
n &= 14 \Rightarrow \pi = 3.141592576585\\
n &= 15 \Rightarrow \pi = 3.141592634339\\
n &= 16 \Rightarrow \pi = 3.141592648777
\end{aligned}
$$

Pi greco, procedura ricorsiva

$$
\begin{array}{lllllll}
n & = & 1 & \Rightarrow & \pi = 0.000000000000 & & \\
n & = & 2 & \Rightarrow & \pi = 2.000000000000 & & \\
n & = & 3 & \Rightarrow & \pi = 2.828427124746 & & \\
n & = & 4 & \Rightarrow & \pi = 3.061467458921 & & \\
n & = & 5 & \Rightarrow & \pi = 3.121445152258 & & \\
n & = & 6 & \Rightarrow & \pi = 3.136548490546 & & \\
n & = & 7 & \Rightarrow & \pi = 3.140331156955 & & \\
n & = & 8 & \Rightarrow & \pi = 3.141277250933 & & \\
n & = & 9 & \Rightarrow & \pi = 3.141513801144 & \Rightarrow & \pi = 3.1415926 \\
n & = & 10 & \Rightarrow & \pi = 3.141572940367 & & \\
n & = & 11 & \Rightarrow & \pi = 3.141587725277 & & \\
n & = & 12 & \Rightarrow & \pi = 3.141591421511 & & \\
n & = & 13 & \Rightarrow & \pi = 3.141592345570 & & \\
n & = & 14 & \Rightarrow & \pi = 3.141592576585 & & \\
n & = & 15 & \Rightarrow & \pi = 3.141592634339 & & \\
n & = & 16 & \Rightarrow & \pi = 3.141592648777 & &
\end{array}
$$

Pi greco, procedura ricorsiva

$$
\begin{array}{llllll}
n & = & 1 & \Rightarrow & \pi = 0.000000000000 & \\
n & = & 2 & \Rightarrow & \pi = 2.000000000000 & \\
n & = & 3 & \Rightarrow & \pi = 2.828427124746 & \\
n & = & 4 & \Rightarrow & \pi = 3.061467458921 & \\
n & = & 5 & \Rightarrow & \pi = 3.121445152258 & \\
n & = & 6 & \Rightarrow & \pi = 3.136548490546 & \\
n & = & 7 & \Rightarrow & \pi = 3.140331156955 & \\
n & = & 8 & \Rightarrow & \pi = 3.141277250933 & \\
n & = & 9 & \Rightarrow & \pi = 3.141513801144 & \Rightarrow \quad \pi = 3.1415926 \\
n & = & 10 & \Rightarrow & \pi = 3.141572940367 & \\
n & = & 11 & \Rightarrow & \pi = 3.141587725277 & \\
n & = & 12 & \Rightarrow & \pi = 3.141591421511 & \\
n & = & 13 & \Rightarrow & \pi = 3.141592345570 & \\
n & = & 14 & \Rightarrow & \pi = 3.141592576585 & \\
n & = & 15 & \Rightarrow & \pi = 3.141592634339 & \\
n & = & 16 & \Rightarrow & \pi = 3.141592648777 &
\end{array}
$$

Pi greco, procedura ricorsiva

$$
\begin{array}{rcrcl}
n & = & 1 & \Rightarrow & \pi = 0.000000000000 \\
n & = & 2 & \Rightarrow & \pi = 2.000000000000 \\
n & = & 3 & \Rightarrow & \pi = 2.828427124746 \\
n & = & 4 & \Rightarrow & \pi = 3.061467458921 \\
n & = & 5 & \Rightarrow & \pi = 3.121445152258 \\
n & = & 6 & \Rightarrow & \pi = 3.136548490546 \\
n & = & 7 & \Rightarrow & \pi = 3.140331156955 \\
n & = & 8 & \Rightarrow & \pi = 3.141277250933 \\
n & = & 9 & \Rightarrow & \pi = 3.141513801144 \quad \Rightarrow \quad \pi = 3.1415926 \\
n & = & 10 & \Rightarrow & \pi = 3.141572940367 \\
n & = & 11 & \Rightarrow & \pi = 3.141587725277 \\
n & = & 12 & \Rightarrow & \pi = 3.141591421511 \\
n & = & 13 & \Rightarrow & \pi = 3.141592345570 \\
n & = & 14 & \Rightarrow & \pi = 3.141592576585 \\
n & = & 15 & \Rightarrow & \pi = 3.141592634339 \\
n & = & 16 & \Rightarrow & \pi = 3.141592648777
\end{array}
$$

Pi greco, procedura ricorsiva

$$
\begin{array}{lcrcl}
n & = & 1 & \Rightarrow & \pi = 0.000000000000 \\
n & = & 2 & \Rightarrow & \pi = 2.000000000000 \\
n & = & 3 & \Rightarrow & \pi = 2.828427124746 \\
n & = & 4 & \Rightarrow & \pi = 3.061467458921 \\
n & = & 5 & \Rightarrow & \pi = 3.121445152258 \\
n & = & 6 & \Rightarrow & \pi = 3.136548490546 \\
n & = & 7 & \Rightarrow & \pi = 3.140331156955 \\
n & = & 8 & \Rightarrow & \pi = 3.141277250933 \\
n & = & 9 & \Rightarrow & \pi = 3.141513801144 \quad \Rightarrow \quad \pi = 3.1415926 \\
n & = & 10 & \Rightarrow & \pi = 3.141572940367 \\
n & = & 11 & \Rightarrow & \pi = 3.141587725277 \\
n & = & 12 & \Rightarrow & \pi = 3.141591421511 \\
n & = & 13 & \Rightarrow & \pi = 3.141592345570 \\
n & = & 14 & \Rightarrow & \pi = 3.141592576585 \\
n & = & 15 & \Rightarrow & \pi = 3.141592634339 \\
n & = & 16 & \Rightarrow & \pi = 3.141592648777
\end{array}
$$

Pi greco, procedura ricorsiva

$$
\begin{array}{rcrcl}
n & = & 1 & \Rightarrow & \pi = 0.000000000000 \\
n & = & 2 & \Rightarrow & \pi = 2.000000000000 \\
n & = & 3 & \Rightarrow & \pi = 2.828427124746 \\
n & = & 4 & \Rightarrow & \pi = 3.061467458921 \\
n & = & 5 & \Rightarrow & \pi = 3.121445152258 \\
n & = & 6 & \Rightarrow & \pi = 3.136548490546 \\
n & = & 7 & \Rightarrow & \pi = 3.140331156955 \\
n & = & 8 & \Rightarrow & \pi = 3.141277250933 \\
n & = & 9 & \Rightarrow & \pi = 3.141513801144 \quad \Rightarrow \quad \pi = 3.1415926 \\
n & = & 10 & \Rightarrow & \pi = 3.141572940367 \\
n & = & 11 & \Rightarrow & \pi = 3.141587725277 \\
n & = & 12 & \Rightarrow & \pi = 3.141591421511 \\
n & = & 13 & \Rightarrow & \pi = 3.141592345570 \\
n & = & 14 & \Rightarrow & \pi = 3.141592576585 \\
n & = & 15 & \Rightarrow & \pi = 3.141592634339 \\
n & = & 16 & \Rightarrow & \pi = 3.141592648777
\end{array}
$$

Pi greco, procedura ricorsiva

$$
\begin{array}{rcrcl}
n & = & 1 & \Rightarrow & \pi = 0.000000000000 \\
n & = & 2 & \Rightarrow & \pi = 2.000000000000 \\
n & = & 3 & \Rightarrow & \pi = 2.828427124746 \\
n & = & 4 & \Rightarrow & \pi = 3.061467458921 \\
n & = & 5 & \Rightarrow & \pi = 3.121445152258 \\
n & = & 6 & \Rightarrow & \pi = 3.136548490546 \\
n & = & 7 & \Rightarrow & \pi = 3.140331156955 \\
n & = & 8 & \Rightarrow & \pi = 3.141277250933 \\
n & = & 9 & \Rightarrow & \pi = 3.141513801144 \quad \Rightarrow \quad \pi = 3.1415926 \\
n & = & 10 & \Rightarrow & \pi = 3.141572940367 \\
n & = & 11 & \Rightarrow & \pi = 3.141587725277 \\
n & = & 12 & \Rightarrow & \pi = 3.141591421511 \\
n & = & 13 & \Rightarrow & \pi = 3.141592345570 \\
n & = & 14 & \Rightarrow & \pi = 3.141592576585 \\
n & = & 15 & \Rightarrow & \pi = 3.141592634339 \\
n & = & 16 & \Rightarrow & \pi = 3.141592648777
\end{array}
$$

Pi greco, procedura ricorsiva

$$
\begin{array}{lcrcl}
n & = & 1 & \Rightarrow & \pi = 0.000000000000 \\
n & = & 2 & \Rightarrow & \pi = 2.000000000000 \\
n & = & 3 & \Rightarrow & \pi = 2.828427124746 \\
n & = & 4 & \Rightarrow & \pi = 3.061467458921 \\
n & = & 5 & \Rightarrow & \pi = 3.121445152258 \\
n & = & 6 & \Rightarrow & \pi = 3.136548490546 \\
n & = & 7 & \Rightarrow & \pi = 3.140331156955 \\
n & = & 8 & \Rightarrow & \pi = 3.141277250933 \\
n & = & 9 & \Rightarrow & \pi = 3.141513801144 \quad \Rightarrow \quad \pi = 3.1415926 \\
n & = & 10 & \Rightarrow & \pi = 3.141572940367 \\
n & = & 11 & \Rightarrow & \pi = 3.141587725277 \\
n & = & 12 & \Rightarrow & \pi = 3.141591421511 \\
n & = & 13 & \Rightarrow & \pi = 3.141592345570 \\
n & = & 14 & \Rightarrow & \pi = 3.141592576585 \\
n & = & 15 & \Rightarrow & \pi = 3.141592634339 \\
n & = & 16 & \Rightarrow & \pi = 3.141592648777
\end{array}
$$

Pi greco, procedura ricorsiva

$$
\begin{aligned}
n &= 1 \Rightarrow \pi = 0.000000000000 \\
n &= 2 \Rightarrow \pi = 2.000000000000 \\
n &= 3 \Rightarrow \pi = 2.828427124746 \\
n &= 4 \Rightarrow \pi = 3.061467458921 \\
n &= 5 \Rightarrow \pi = 3.121445152258 \\
n &= 6 \Rightarrow \pi = 3.136548490546 \\
n &= 7 \Rightarrow \pi = 3.140331156955 \\
n &= 8 \Rightarrow \pi = 3.141277250933 \\
n &= 9 \Rightarrow \pi = 3.141513801144 \quad \Rightarrow \quad \pi = 3.1415926 \\
n &= 10 \Rightarrow \pi = 3.141572940367 \\
n &= 11 \Rightarrow \pi = 3.141587725277 \\
n &= 12 \Rightarrow \pi = 3.141591421511 \\
n &= 13 \Rightarrow \pi = 3.141592345570 \\
n &= 14 \Rightarrow \pi = 3.141592576585 \\
n &= 15 \Rightarrow \pi = 3.141592634339 \\
n &= 16 \Rightarrow \pi = 3.141592648777
\end{aligned}
$$

Pi greco, procedura ricorsiva

$$\begin{array}{rcrcl}
n & = & 1 & \Rightarrow & \pi = 0.000000000000 \\
n & = & 2 & \Rightarrow & \pi = 2.000000000000 \\
n & = & 3 & \Rightarrow & \pi = 2.828427124746 \\
n & = & 4 & \Rightarrow & \pi = 3.061467458921 \\
n & = & 5 & \Rightarrow & \pi = 3.121445152258 \\
n & = & 6 & \Rightarrow & \pi = 3.136548490546 \\
n & = & 7 & \Rightarrow & \pi = 3.140331156955 \\
n & = & 8 & \Rightarrow & \pi = 3.141277250933 \\
n & = & 9 & \Rightarrow & \pi = 3.141513801144 \quad \Rightarrow \quad \pi = 3.1415926 \\
n & = & 10 & \Rightarrow & \pi = 3.141572940367 \\
n & = & 11 & \Rightarrow & \pi = 3.141587725277 \\
n & = & 12 & \Rightarrow & \pi = 3.141591421511 \\
n & = & 13 & \Rightarrow & \pi = 3.141592345570 \\
n & = & 14 & \Rightarrow & \pi = 3.141592576585 \\
n & = & 15 & \Rightarrow & \pi = 3.141592634339 \\
n & = & 16 & \Rightarrow & \pi = 3.141592648777
\end{array}$$

Pi greco, procedura ricorsiva

$$
\begin{aligned}
n &= 1 \Rightarrow \pi = 0.000000000000\\
n &= 2 \Rightarrow \pi = 2.000000000000\\
n &= 3 \Rightarrow \pi = 2.828427124746\\
n &= 4 \Rightarrow \pi = 3.061467458921\\
n &= 5 \Rightarrow \pi = 3.121445152258\\
n &= 6 \Rightarrow \pi = 3.136548490546\\
n &= 7 \Rightarrow \pi = 3.140331156955\\
n &= 8 \Rightarrow \pi = 3.141277250933\\
n &= 9 \Rightarrow \pi = 3.141513801144 \quad \Rightarrow \quad \pi = 3.1415926\\
n &= 10 \Rightarrow \pi = 3.141572940367\\
n &= 11 \Rightarrow \pi = 3.141587725277\\
n &= 12 \Rightarrow \pi = 3.141591421511\\
n &= 13 \Rightarrow \pi = 3.141592345570\\
n &= 14 \Rightarrow \pi = 3.141592576585\\
n &= 15 \Rightarrow \pi = 3.141592634339\\
n &= 16 \Rightarrow \pi = 3.141592648777
\end{aligned}
$$

Pi greco, procedura ricorsiva

$$
\begin{array}{rcrcl}
n & = & 1 & \Rightarrow & \pi = 0.000000000000 \\
n & = & 2 & \Rightarrow & \pi = 2.000000000000 \\
n & = & 3 & \Rightarrow & \pi = 2.828427124746 \\
n & = & 4 & \Rightarrow & \pi = 3.061467458921 \\
n & = & 5 & \Rightarrow & \pi = 3.121445152258 \\
n & = & 6 & \Rightarrow & \pi = 3.136548490546 \\
n & = & 7 & \Rightarrow & \pi = 3.140331156955 \\
n & = & 8 & \Rightarrow & \pi = 3.141277250933 \\
n & = & 9 & \Rightarrow & \pi = 3.141513801144 \qquad \Rightarrow \qquad \pi = 3.1415926 \\
n & = & 10 & \Rightarrow & \pi = 3.141572940367 \\
n & = & 11 & \Rightarrow & \pi = 3.141587725277 \\
n & = & 12 & \Rightarrow & \pi = 3.141591421511 \\
n & = & 13 & \Rightarrow & \pi = 3.141592345570 \\
n & = & 14 & \Rightarrow & \pi = 3.141592576585 \\
n & = & 15 & \Rightarrow & \pi = 3.141592634339 \\
n & = & 16 & \Rightarrow & \pi = 3.141592648777
\end{array}
$$

Agenda

1. Cos'è e a cosa serve la ricorsione?
   - Esempi preliminari
2. La ricorsione in matematica
   - La successione di Fibonacci
   - E il buon vecchio π?
   - La mappa logistica
3. Chaos e matematica
   - Ma esiste il chaos matematico?

La mappa logistica (1/2)

La seguente **procedura ricorsiva** descrive l'evoluzione del numero di individui di una popolazione nel tempo quando le risorse sono limitate e c'è competizione all'interno della popolazione:

$$\begin{cases} z_1 & = & \text{numero a caso compreso tra 0 e 1} \\ z_{n+1} & = & A \cdot z_n \cdot (1 - z_n), \quad 0 < A < 4. \end{cases}$$

In pratica, come si procede? Come al solito:

1. si decidono A e z_1
2. utilizzando la formulina ricorsiva si calcola $A \cdot z_n \cdot (1 - z_n)$
3. si ripete il punto 2 fino a che non si scopre qualcosa... di sensato o che non ha alcun senso...

Questa procedura ricorsiva **sembra** del tutto **innoqua** ma...

La mappa logistica (1/2)

La seguente **procedura ricorsiva** descrive l'evoluzione del numero di individui di una popolazione nel tempo quando le risorse sono limitate e c'è competizione all'interno della popolazione:

$$\begin{cases} z_1 & = & \text{numero a caso compreso tra 0 e 1} \\ z_{n+1} & = & A \cdot z_n \cdot (1 - z_n), \quad 0 < A < 4. \end{cases}$$

In pratica, come si procede? Come al solito:

1. si decidono A e z_1
2. utilizzando la formulina ricorsiva si calcola $A \cdot z_n \cdot (1 - z_n)$
3. si ripete il punto 2 fino a che non si scopre qualcosa... di sensato o che non ha alcun senso...

Questa procedura ricorsiva **sembra** del tutto **innoqua** ma...

La mappa logistica (1/2)

La seguente **procedura ricorsiva** descrive l'evoluzione del numero di individui di una popolazione nel tempo quando le risorse sono limitate e c'è competizione all'interno della popolazione:

$$\begin{cases} z_1 & = & \text{numero a caso compreso tra 0 e 1} \\ z_{n+1} & = & A \cdot z_n \cdot (1 - z_n), \quad 0 < A < 4. \end{cases}$$

In pratica, come si procede? Come al solito:

1. si decidono A e z_1
2. utilizzando la formulina ricorsiva si calcola $A \cdot z_n \cdot (1 - z_n)$
3. si ripete il punto 2 fino a che non si scopre qualcosa... di sensato o che non ha alcun senso...

Questa procedura ricorsiva **sembra** del tutto **innoqua** ma...

La mappa logistica (1/2)

La seguente **procedura ricorsiva** descrive l'evoluzione del numero di individui di una popolazione nel tempo quando le risorse sono limitate e c'è competizione all'interno della popolazione:

$$\begin{cases} z_1 & = & \text{numero a caso compreso tra 0 e 1} \\ z_{n+1} & = & A \cdot z_n \cdot (1 - z_n), \quad 0 < A < 4. \end{cases}$$

In pratica, come si procede? Come al solito:

1. si decidono A e z_1
2. utilizzando la formulina ricorsiva si calcola $A \cdot z_n \cdot (1 - z_n)$
3. si ripete il punto 2 fino a che non si scopre qualcosa... di sensato o che non ha alcun senso...

Questa procedura ricorsiva **sembra** del tutto **innoqua** ma...

La mappa logistica (1/2)

La seguente **procedura ricorsiva** descrive l'evoluzione del numero di individui di una popolazione nel tempo quando le risorse sono limitate e c'è competizione all'interno della popolazione:

$$\begin{cases} z_1 &= \text{numero a caso compreso tra 0 e 1} \\ z_{n+1} &= A \cdot z_n \cdot (1 - z_n), \quad 0 < A < 4. \end{cases}$$

In pratica, come si procede? Come al solito:

1. si decidono A e z_1
2. utilizzando la formulina ricorsiva si calcola $A \cdot z_n \cdot (1 - z_n)$
3. si ripete il punto 2 fino a che non si scopre qualcosa... di sensato o che non ha alcun senso...

Questa procedura ricorsiva **sembra** del tutto **innoqua** ma...

La mappa logistica (1/2)

La seguente **procedura ricorsiva** descrive l'evoluzione del numero di individui di una popolazione nel tempo quando le risorse sono limitate e c'è competizione all'interno della popolazione:

$$\begin{cases} z_1 = \text{numero a caso compreso tra 0 e 1} \\ z_{n+1} = A \cdot z_n \cdot (1 - z_n), \quad 0 < A < 4. \end{cases}$$

In pratica, come si procede? Come al solito:

1. si decidono A e z_1
2. utilizzando la formulina ricorsiva si calcola $A \cdot z_n \cdot (1 - z_n)$
3. si ripete il punto 2 fino a che non si scopre qualcosa... di sensato o che non ha alcun senso...

Questa procedura ricorsiva **sembra** del tutto **innoqua** ma...

La mappa logistica (1/2)

La seguente **procedura ricorsiva** descrive l'evoluzione del numero di individui di una popolazione nel tempo quando le risorse sono limitate e c'è competizione all'interno della popolazione:

$$\begin{cases} z_1 = \text{numero a caso compreso tra 0 e 1} \\ z_{n+1} = A \cdot z_n \cdot (1 - z_n), \quad 0 < A < 4. \end{cases}$$

In pratica, come si procede? Come al solito:

1. si decidono A e z_1
2. utilizzando la formulina ricorsiva si calcola $A \cdot z_n \cdot (1 - z_n)$
3. si ripete il punto 2 fino a che non si scopre qualcosa... di sensato o che non ha alcun senso...

Questa procedura ricorsiva **sembra** del tutto **innoqua** ma...

La mappa logistica (1/2)

La seguente **procedura ricorsiva** descrive l'evoluzione del numero di individui di una popolazione nel tempo quando le risorse sono limitate e c'è competizione all'interno della popolazione:

$$\begin{cases} z_1 & = \text{numero a caso compreso tra 0 e 1} \\ z_{n+1} & = A \cdot z_n \cdot (1 - z_n), \quad 0 < A < 4. \end{cases}$$

In pratica, come si procede? Come al solito:

1. si decidono A e z_1
2. utilizzando la formulina ricorsiva si calcola $A \cdot z_n \cdot (1 - z_n)$
3. si ripete il punto 2 fino a che non si scopre qualcosa... di sensato o che non ha alcun senso...

Questa procedura ricorsiva **sembra** del tutto **innoqua** ma...

La mappa logistica (1/2)

La seguente **procedura ricorsiva** descrive l'evoluzione del numero di individui di una popolazione nel tempo quando le risorse sono limitate e c'è competizione all'interno della popolazione:

$$\begin{cases} z_1 & = & \text{numero a caso compreso tra 0 e 1} \\ z_{n+1} & = & A \cdot z_n \cdot (1 - z_n), \quad 0 < A < 4. \end{cases}$$

In pratica, come si procede? Come al solito:

1. si decidono A e z_1
2. utilizzando la formulina ricorsiva si calcola $A \cdot z_n \cdot (1 - z_n)$
3. si ripete il punto 2 fino a che non si scopre qualcosa... di sensato o che non ha alcun senso...

Questa procedura ricorsiva **sembra** del tutto **innoqua** ma...

La mappa logistica (2/2)

Si scopre che:

- se $0 < A \leq 1$ la popolazione è condannata all'estinzione
- se $1 < A \leq 3$ la popolazione raggiunge un numero costante di individui pari a $1 - 1/A$ (velocemente se $1 < A \leq 2$, oscillando se $2 < A \leq 3$).
  Nota: questo valore dipende solo da A e non da z_1!!!
- se $3 < A < 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$ il numero di individui oscilla tra 2 valori che dipendono solo da A (comportamento periodico).
- se $3.45 < A < 3.54$ il numero di individui oscilla tra 4 valori
- se $3.54 < A < 3.57$ il numero di individui oscilla tra 8 valori, poi 16, etc.
- se $A > 3.57$ non si capisce più niente...**caos matematico!** ma...
- da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.83$ si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)

La mappa logistica (2/2)

Si scopre che:

- se $0 < A \leq 1$ la popolazione è condannata all'estinzione
- se $1 < A \leq 3$ la popolazione raggiunge un numero costante di individui pari a $1 - 1/A$ (velocemente se $1 < A \leq 2$, oscillando se $2 < A \leq 3$).
  Nota: questo valore dipende solo da A e non da z_1!!!
- se $3 < A < 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$ il numero di individui oscilla tra 2 valori che dipendono solo da A (comportamento periodico).
- se $3.45 < A < 3.54$ il numero di individui oscilla tra 4 valori
- se $3.54 < A < 3.57$ il numero di individui oscilla tra 8 valori, poi 16, etc.
- se $A > 3.57$ non si capisce più niente...**caos matematico!** ma...
- da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.83$ si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)

La mappa logistica (2/2)

Si scopre che:

- se $0 < A \leq 1$ la popolazione è condannata all'estinzione
- se $1 < A \leq 3$ la popolazione raggiunge un numero costante di individui pari a $1 - 1/A$ (velocemente se $1 < A \leq 2$, oscillando se $2 < A \leq 3$).
  Nota: questo valore dipende solo da A e non da z_1!!!
- se $3 < A < 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$ il numero di individui oscilla tra 2 valori che dipendono solo da A (comportamento periodico).
- se $3.45 < A < 3.54$ il numero di individui oscilla tra 4 valori
- se $3.54 < A < 3.57$ il numero di individui oscilla tra 8 valori, poi 16, etc.
- se $A > 3.57$ non si capisce più niente...**caos matematico!** ma...
- da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.83$ si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)

La mappa logistica (2/2)

Si scopre che:

- se $0 < A \leq 1$ la popolazione è condannata all'estinzione
- se $1 < A \leq 3$ la popolazione raggiunge un numero costante di individui pari a $1 - 1/A$ (velocemente se $1 < A \leq 2$, oscillando se $2 < A \leq 3$).
  Nota: questo valore dipende solo da A e non da z_1!!!
- se $3 < A < 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$ il numero di individui oscilla tra 2 valori che dipendono solo da A (comportamento periodico).
- se $3.45 < A < 3.54$ il numero di individui oscilla tra 4 valori
- se $3.54 < A < 3.57$ il numero di individui oscilla tra 8 valori, poi 16, etc.
- se $A > 3.57$ non si capisce più niente...**caos matematico!** ma...
- da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.83$ si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)

La mappa logistica (2/2)

Si scopre che:

- se $0 < A \leq 1$ la popolazione è condannata all'estinzione
- se $1 < A \leq 3$ la popolazione raggiunge un numero costante di individui pari a $1 - 1/A$ (velocemente se $1 < A \leq 2$, oscillando se $2 < A \leq 3$).
  Nota: questo valore dipende solo da A e non da z_1!!!
- se $3 < A < 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$ il numero di individui oscilla tra 2 valori che dipendono solo da A (comportamento periodico).
- se $3.45 < A < 3.54$ il numero di individui oscilla tra 4 valori
- se $3.54 < A < 3.57$ il numero di individui oscilla tra 8 valori, poi 16, etc.
- se $A > 3.57$ non si capisce più niente...**caos matematico!** ma...
- da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.83$ si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)

La mappa logistica (2/2)

Si scopre che:

- se $0 < A \leq 1$ la popolazione è condannata all'estinzione
- se $1 < A \leq 3$ la popolazione raggiunge un numero costante di individui pari a $1 - 1/A$ (velocemente se $1 < A \leq 2$, oscillando se $2 < A \leq 3$).
  Nota: questo valore dipende solo da A e non da z_1!!!
- se $3 < A < 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$ il numero di individui oscilla tra 2 valori che dipendono solo da A (comportamento periodico).
- se $3.45 < A < 3.54$ il numero di individui oscilla tra 4 valori
- se $3.54 < A < 3.57$ il numero di individui oscilla tra 8 valori, poi 16, etc.
- se $A > 3.57$ non si capisce più niente...**caos matematico!** ma...
- da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.83$ si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)

La mappa logistica (2/2)

Si scopre che:

- se $0 < A \leq 1$ la popolazione è condannata all'estinzione
- se $1 < A \leq 3$ la popolazione raggiunge un numero costante di individui pari a $1 - 1/A$ (velocemente se $1 < A \leq 2$, oscillando se $2 < A \leq 3$).
  Nota: questo valore dipende solo da A e non da z_1!!!
- se $3 < A < 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$ il numero di individui oscilla tra 2 valori che dipendono solo da A (comportamento periodico).
- se $3.45 < A < 3.54$ il numero di individui oscilla tra 4 valori
- se $3.54 < A < 3.57$ il numero di individui oscilla tra 8 valori, poi 16, etc.
- se $A > 3.57$ non si capisce più niente...caos matematico! ma...
- da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.83$ si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)

La mappa logistica (2/2)

Si scopre che:

- se $0 < A \leq 1$ la popolazione è condannata all'estinzione
- se $1 < A \leq 3$ la popolazione raggiunge un numero costante di individui pari a $1 - 1/A$ (velocemente se $1 < A \leq 2$, oscillando se $2 < A \leq 3$).
  Nota: questo valore dipende solo da A e non da z_1!!!
- se $3 < A < 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$ il numero di individui oscilla tra 2 valori che dipendono solo da A (comportamento periodico).
- se $3.45 < A < 3.54$ il numero di individui oscilla tra 4 valori
- se $3.54 < A < 3.57$ il numero di individui oscilla tra 8 valori, poi 16, etc.
- se $A > 3.57$ non si capisce più niente...**caos matematico!** ma...
- da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.83$ si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)

La mappa logistica (2/2)

Si scopre che:

- se $0 < A \leq 1$ la popolazione è condannata all'estinzione
- se $1 < A \leq 3$ la popolazione raggiunge un numero costante di individui pari a $1 - 1/A$ (velocemente se $1 < A \leq 2$, oscillando se $2 < A \leq 3$).
  Nota: questo valore dipende solo da A e non da z_1!!!
- se $3 < A < 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$ il numero di individui oscilla tra 2 valori che dipendono solo da A (comportamento periodico).
- se $3.45 < A < 3.54$ il numero di individui oscilla tra 4 valori
- se $3.54 < A < 3.57$ il numero di individui oscilla tra 8 valori, poi 16, etc.
- se $A > 3.57$ non si capisce più niente...**caos matematico!** ma...
- da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.83$ si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)

Agenda

1. Cos'è e a cosa serve la ricorsione?
   - Esempi preliminari
2. La ricorsione in matematica
   - La successione di Fibonacci
   - E il buon vecchio π?
   - La mappa logistica
3. Chaos e matematica
   - Ma esiste il chaos matematico?

Il caos matematico

- In matematica, come in Natura, esistono delle **leggi** che descrivono l'**evoluzione** di un fenomeno nel tempo (costruzione del triangolo di Sierpinski, del fiocco di neve, aumento del capitale reinvestito, andamento del numero di individui di una popolazione, etc.)
- Queste leggi hanno sempre bisogno del **dato iniziale**, detto anche **condizione iniziale** (triangolo iniziale per Sierpinski e fiocco di neve, capitale iniziale, numero iniziale di individui, etc.)
- In certi casi, variando di pochissimo il dato iniziale si ottengono **evoluzioni completamente diverse**. Questo fenomeno si chiama **dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali**.

Il caos matematico

- In matematica, come in Natura, esistono delle **leggi** che descrivono l'**evoluzione** di un fenomeno nel tempo (costruzione del triangolo di Sierpinski, del fiocco di neve, aumento del capitale reinvestito, andamento del numero di individui di una popolazione, etc.)
- Queste leggi hanno sempre bisogno del **dato iniziale**, detto anche **condizione iniziale** (triangolo iniziale per Sierpinski e fiocco di neve, capitale iniziale, numero iniziale di individui, etc.)
- In certi casi, variando di pochissimo il dato iniziale si ottengono **evoluzioni completamente diverse**. Questo fenomeno si chiama **dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali**.

Il caos matematico

- In matematica, come in Natura, esistono delle **leggi** che descrivono l'**evoluzione** di un fenomeno nel tempo (costruzione del triangolo di Sierpinski, del fiocco di neve, aumento del capitale reinvestito, andamento del numero di individui di una popolazione, etc.)
- Queste leggi hanno sempre bisogno del **dato iniziale**, detto anche **condizione iniziale** (triangolo iniziale per Sierpinski e fiocco di neve, capitale iniziale, numero iniziale di individui, etc.)
- In certi casi, variando di pochissimo il dato iniziale si ottengono **evoluzioni completamente diverse**. Questo fenomeno si chiama **dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali**.

Il caos matematico

- In matematica, come in Natura, esistono delle **leggi** che descrivono l’**evoluzione** di un fenomeno nel tempo (costruzione del triangolo di Sierpinski, del fiocco di neve, aumento del capitale reinvestito, andamento del numero di individui di una popolazione, etc.)
- Queste leggi hanno sempre bisogno del **dato iniziale**, detto anche **condizione iniziale** (triangolo iniziale per Sierpinski e fiocco di neve, capitale iniziale, numero iniziale di individui, etc.)
- In certi casi, variando di pochissimo il dato iniziale si ottengono **evoluzioni completamente diverse**. Questo fenomeno si chiama **dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali**.

Il caos matematico

Se cambio di poco il dato iniziale, solitamente, mi aspetto che il risultato cambi di poco.

In alcuni casi questo non è affatto vero: cambiando di poco le condizioni iniziali si ottengono evoluzioni che non sono per nulla correlate.
Ci **sembra** che tutto ad un tratto l'ordine sia sparito dalla matematica e dalla Natura: questo è il **chaos**. Tuttavia il chaos (apparente) scaturisce da una **legge deterministica**.

Esempi in Natura:

- le previsioni metereologiche (effetto farfalla)
- la turbolenza (argomento irrisolto della fisica classica)

Il caos matematico

Se cambio di poco il dato iniziale, solitamente, mi aspetto che il risultato cambi di poco.

In alcuni casi questo non è affatto vero: cambiando di poco le condizioni iniziali si ottengono evoluzioni che non sono per nulla correlate.
Ci **sembra** che tutto ad un tratto l'ordine sia sparito dalla matematica e dalla Natura: questo è il **chaos**. Tuttavia il chaos (apparente) scaturisce da una **legge deterministica**.

Esempi in Natura:

- le previsioni metereologiche (effetto farfalla)
- la turbolenza (argomento irrisolto della fisica classica)

Il caos matematico

Se cambio di poco il dato iniziale, solitamente, mi aspetto che il risultato cambi di poco.

In alcuni casi questo non è affatto vero: cambiando di poco le condizioni iniziali si ottengono evoluzioni che non sono per nulla correlate.
Ci **sembra** che tutto ad un tratto l'ordine sia sparito dalla matematica e dalla Natura: questo è il **chaos**. Tuttavia il chaos (apparente) scaturisce da una **legge deterministica**.

Esempi in Natura:

- le previsioni metereologiche (effetto farfalla)
- la turbolenza (argomento irrisolto della fisica classica)

Il caos matematico

Se cambio di poco il dato iniziale, solitamente, mi aspetto che il risultato cambi di poco.

In alcuni casi questo non è affatto vero: cambiando di poco le condizioni iniziali si ottengono evoluzioni che non sono per nulla correlate.
Ci **sembra** che tutto ad un tratto l'ordine sia sparito dalla matematica e dalla Natura: questo è il **chaos**. Tuttavia il chaos (apparente) scaturisce da una **legge deterministica**.

Esempi in Natura:

- le previsioni metereologiche (effetto farfalla)
- la turbolenza (argomento irrisolto della fisica classica)

Il caos matematico

Se cambio di poco il dato iniziale, solitamente, mi aspetto che il risultato cambi di poco.

In alcuni casi questo non è affatto vero: cambiando di poco le condizioni iniziali si ottengono evoluzioni che non sono per nulla correlate.
Ci **sembra** che tutto ad un tratto l'ordine sia sparito dalla matematica e dalla Natura: questo è il **chaos**. Tuttavia il chaos (apparente) scaturisce da una **legge deterministica**.

Esempi in Natura:

- le previsioni metereologiche (effetto farfalla)
- la turbolenza (argomento irrisolto della fisica classica)

Il caos matematico

Se cambio di poco il dato iniziale, solitamente, mi aspetto che il risultato cambi di poco.

In alcuni casi questo non è affatto vero: cambiando di poco le condizioni iniziali si ottengono evoluzioni che non sono per nulla correlate.
Ci **sembra** che tutto ad un tratto l'ordine sia sparito dalla matematica e dalla Natura: questo è il **chaos**. Tuttavia il chaos (apparente) scaturisce da una **legge deterministica**.

Esempi in Natura:

- le previsioni metereologiche (effetto farfalla)
- la turbolenza (argomento irrisolto della fisica classica)

Conclusioni

Abbiamo visto:

- cos'è e a cosa serve la ricorsione
- la ricorsione è presente nella vita di tutti i giorni e nella Natura, consente di creare figure geometriche intriganti, di prevedere il numero di individui di una popolazione o l'interesse accumulato in banca, permette il calcolo di π, spiega il concetto di chaos matematico, e molto altro...

Cosa vorrei vi rimanesse:

- poche certezze (dubbio motore della conoscenza!)
- tanta curiosità nei confronti della matematica
- la consapevolezza che la matematica (applicata) c'entra eccome nella vita di tutti i giorni

Conclusioni

Abbiamo visto:

- cos'è e a cosa serve la ricorsione
- la ricorsione è presente nella vita di tutti i giorni e nella Natura, consente di creare figure geometriche intriganti, di prevedere il numero di individui di una popolazione o l'interesse accumulato in banca, permette il calcolo di π, spiega il concetto di chaos matematico, e molto altro...

Cosa vorrei vi rimanesse:

- poche certezze (dubbio motore della conoscenza!)
- tanta curiosità nei confronti della matematica
- la consapevolezza che la matematica (applicata) c'entra eccome nella vita di tutti i giorni

Conclusioni

Abbiamo visto:

- cos'è e a cosa serve la ricorsione
- la ricorsione è presente nella vita di tutti i giorni e nella Natura, consente di creare figure geometriche intriganti, di prevedere il numero di individui di una popolazione o l'interesse accumulato in banca, permette il calcolo di π, spiega il concetto di chaos matematico, e molto altro...

Cosa vorrei vi rimanesse:

- poche certezze (dubbio motore della conoscenza!)
- tanta curiosità nei confronti della matematica
- la consapevolezza che la matematica (applicata) c'entra eccome nella vita di tutti i giorni

Conclusioni

Abbiamo visto:

- cos'è e a cosa serve la ricorsione
- la ricorsione è presente nella vita di tutti i giorni e nella Natura, consente di creare figure geometriche intriganti, di prevedere il numero di individui di una popolazione o l'interesse accumulato in banca, permette il calcolo di π, spiega il concetto di chaos matematico, e molto altro...

Cosa vorrei vi rimanesse:

- poche certezze (dubbio motore della conoscenza!)
- tanta curiosità nei confronti della matematica
- la consapevolezza che la matematica (applicata) c'entra eccome nella vita di tutti i giorni

Conclusioni

Abbiamo visto:

- cos'è e a cosa serve la ricorsione
- la ricorsione è presente nella vita di tutti i giorni e nella Natura, consente di creare figure geometriche intriganti, di prevedere il numero di individui di una popolazione o l'interesse accumulato in banca, permette il calcolo di π, spiega il concetto di chaos matematico, e molto altro...

Cosa vorrei vi rimanesse:

- poche certezze (dubbio motore della conoscenza!)
- tanta curiosità nei confronti della matematica
- la consapevolezza che la matematica (applicata) c'entra eccome nella vita di tutti i giorni

Conclusioni

Abbiamo visto:

- cos'è e a cosa serve la ricorsione
- la ricorsione è presente nella vita di tutti i giorni e nella Natura, consente di creare figure geometriche intriganti, di prevedere il numero di individui di una popolazione o l'interesse accumulato in banca, permette il calcolo di π, spiega il concetto di chaos matematico, e molto altro...

Cosa vorrei vi rimanesse:

- poche certezze (dubbio motore della conoscenza!)
- tanta curiosità nei confronti della matematica
- la consapevolezza che la matematica (applicata) c'entra eccome nella vita di tutti i giorni

Conclusioni

Abbiamo visto:

- cos'è e a cosa serve la ricorsione
- la ricorsione è presente nella vita di tutti i giorni e nella Natura, consente di creare figure geometriche intriganti, di prevedere il numero di individui di una popolazione o l'interesse accumulato in banca, permette il calcolo di π, spiega il concetto di chaos matematico, e molto altro...

Cosa vorrei vi rimanesse:

- poche certezze (dubbio motore della conoscenza!)
- tanta curiosità nei confronti della matematica
- la consapevolezza che la matematica (applicata) c'entra eccome nella vita di tutti i giorni

Domande?