# La mappa logistica discreta: origine e comportamento

Simone Zuccher

Piano Lauree Scientifiche per la Matematica
16 Novembre 2016

# Agenda

# Agenda

# Agenda

# Agenda

# Evoluzione di una popolazione (1/2)

Indichiamo con $p_n$ il numero di individui di una popolazione al tempo $t_n$ ($n$-esimo passo temporale), $p_n \geq 0$.

Introduciamo:

- il *tasso di natalità* $\tau^{\text{nati}}$, definito come il numero di individui nati durante il passo $n$ diviso per il numero di individui $p_n$
- il *tasso di mortalità* $\tau^{\text{morti}}$, definito come il numero di individui morti durante il passo $n$ diviso per il numero di individui $p_n$

Tassi costanti nel tempo? **Risorse limitate**: al crescere della popolazione il tasso di natalità diminuisce e/o quello di mortalità cresce.

$$\tau_n^{\text{nati}} = \tau_0^{\text{nati}} - ap_n \qquad \text{e} \qquad \tau_n^{\text{morti}} = \tau_0^{\text{morti}} + bp_n,$$

dove $\tau_0^{\text{nati}}, \tau_0^{\text{morti}}$, $a$ e $b$ sono tutte costanti positive.

$a$ e $b$ misurano il ***grado di competizione per le risorse*** all'interno della specie.

# Evoluzione di una popolazione (1/2)

Indichiamo con $p_n$ il numero di individui di una popolazione al tempo $t_n$ ($n$-esimo passo temporale), $p_n \geq 0$.
Introduciamo:

- il *tasso di natalità* $\tau^{\text{nati}}$, definito come il numero di individui nati durante il passo $n$ diviso per il numero di individui $p_n$
- il *tasso di mortalità* $\tau^{\text{morti}}$, definito come il numero di individui morti durante il passo $n$ diviso per il numero di individui $p_n$

Tassi costanti nel tempo? **Risorse limitate**: al crescere della popolazione il tasso di natalità diminuisce e/o quello di mortalità cresce.

$$\tau_n^{\text{nati}} = \tau_0^{\text{nati}} - ap_n \qquad \text{e} \qquad \tau_n^{\text{morti}} = \tau_0^{\text{morti}} + bp_n,$$

dove $\tau_0^{\text{nati}}$, $\tau_0^{\text{morti}}$, $a$ e $b$ sono tutte costanti positive.
$a$ e $b$ misurano il ***grado di competizione per le risorse*** all'interno della specie.

# Evoluzione di una popolazione (1/2)

Indichiamo con $p_n$ il numero di individui di una popolazione al tempo $t_n$ ($n$-esimo passo temporale), $p_n \geq 0$.
Introduciamo:

- il *tasso di natalità* $\tau^{\text{nati}}$, definito come il numero di individui nati durante il passo $n$ diviso per il numero di individui $p_n$
- il *tasso di mortalità* $\tau^{\text{morti}}$, definito come il numero di individui morti durante il passo $n$ diviso per il numero di individui $p_n$

Tassi costanti nel tempo? **Risorse limitate**: al crescere della popolazione il tasso di natalità diminuisce e/o quello di mortalità cresce.

$$\tau_n^{\text{nati}} = \tau_0^{\text{nati}} - ap_n \qquad \text{e} \qquad \tau_n^{\text{morti}} = \tau_0^{\text{morti}} + bp_n,$$

dove $\tau_0^{\text{nati}}$, $\tau_0^{\text{morti}}$, $a$ e $b$ sono tutte costanti positive.
$a$ e $b$ misurano il ***grado di competizione per le risorse*** all'interno della specie.

# Evoluzione di una popolazione (1/2)

Indichiamo con $p_n$ il numero di individui di una popolazione al tempo $t_n$ ($n$-esimo passo temporale), $p_n \geq 0$.
Introduciamo:

- il *tasso di natalità* $\tau^{\text{nati}}$, definito come il numero di individui nati durante il passo $n$ diviso per il numero di individui $p_n$
- il *tasso di mortalità* $\tau^{\text{morti}}$, definito come il numero di individui morti durante il passo $n$ diviso per il numero di individui $p_n$

Tassi costanti nel tempo? **Risorse limitate**: al crescere della popolazione il tasso di natalità diminuisce e/o quello di mortalità cresce.

$$\tau_n^{\text{nati}} = \tau_0^{\text{nati}} - ap_n \qquad \text{e} \qquad \tau_n^{\text{morti}} = \tau_0^{\text{morti}} + bp_n,$$

dove $\tau_0^{\text{nati}}, \tau_0^{\text{morti}}$, $a$ e $b$ sono tutte costanti positive.
$a$ e $b$ misurano il ***grado di competizione per le risorse*** all'interno della specie.

# Evoluzione di una popolazione (2/2)

In assenza di flusso migratorio:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + \tau_n^{\text{nati}} p_n - \tau_n^{\text{morti}} p_n \\ &= (1 + \tau_n^{\text{nati}} - \tau_n^{\text{morti}}) p_n \\ &= (1 + \tau_0^{\text{nati}} - a p_n - \tau_0^{\text{morti}} - b p_n) p_n \\ &= [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) - (a + b) p_n] p_n, \end{aligned} \tag{1}$$

**Questo è solo un *modello*** di evoluzione di una popolazione, detto modello *logistico* o *di Verhulst*.

Domande:

1. Esiste un valore *asintotico* $p_\infty$ della popolazione?
2. Esiste un valore *massimo* $p_{\max}$ della popolazione?

# Evoluzione di una popolazione (2/2)

In assenza di flusso migratorio:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + \tau_n^{\text{nati}} p_n - \tau_n^{\text{morti}} p_n \\ &= (1 + \tau_n^{\text{nati}} - \tau_n^{\text{morti}}) p_n \\ &= (1 + \tau_0^{\text{nati}} - a p_n - \tau_0^{\text{morti}} - b p_n) p_n \\ &= [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) - (a + b) p_n] p_n, \end{aligned} \tag{1}$$

**Questo è solo un *modello*** di evoluzione di una popolazione, detto modello *logistico* o *di Verhulst*.
Domande:

1. Esiste un valore *asintotico* $p_\infty$ della popolazione?
2. Esiste un valore *massimo* $p_{\max}$ della popolazione?

# Domanda 1: calcolo di $p_\infty$

$$p_\infty = [(1+\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}})-(a+b)p_\infty]p_\infty \quad \Longrightarrow \quad p_\infty = \frac{\tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}}{a+b}.$$

Considerazioni:

- se $\tau_0^{\text{nati}} \leq \tau_0^{\text{morti}}$ allora $p_\infty = 0$: la popolazione si **estingue**
- se $\tau_0^{\text{nati}} > \tau_0^{\text{morti}}$ allora $p_\infty \neq 0$: la popolazione si **stabilizza**; "comportamenti strani"?
- al crescere di $a$ e $b$ (competizione) $p_\infty$ **diminuisce**
- limite $a = b = 0$: $p_{n+1} = [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}})]p_n$, da cui

$$p_{n+1} = [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}})]^n p_1$$

**esplosione** ($\tau_0^{\text{nati}} > \tau_0^{\text{morti}}$) o **estinzione** ($\tau_0^{\text{nati}} < \tau_0^{\text{morti}}$).

# Domanda 1: calcolo di $p_\infty$

$$p_\infty = [(1+\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}})-(a+b)p_\infty]p_\infty \quad \Longrightarrow \quad p_\infty = \frac{\tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}}{a+b}.$$

Considerazioni:

- se $\tau_0^{\text{nati}} \leq \tau_0^{\text{morti}}$ allora $p_\infty = 0$: la popolazione si **estingue**
- se $\tau_0^{\text{nati}} > \tau_0^{\text{morti}}$ allora $p_\infty \neq 0$: la popolazione si **stabilizza**; "comportamenti strani"?
- al crescere di $a$ e $b$ (competizione) $p_\infty$ **diminuisce**
- limite $a = b = 0$: $p_{n+1} = [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}})]p_n$, da cui

$$p_{n+1} = [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}})]^n p_1$$

**esplosione** ($\tau_0^{\text{nati}} > \tau_0^{\text{morti}}$) o **estinzione** ($\tau_0^{\text{nati}} < \tau_0^{\text{morti}}$).

# Domanda 1: calcolo di $p_\infty$

$$p_\infty = [(1+\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}})-(a+b)p_\infty]p_\infty \quad \Longrightarrow \quad p_\infty = \frac{\tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}}{a+b}.$$

Considerazioni:

- se $\tau_0^{\text{nati}} \leq \tau_0^{\text{morti}}$ allora $p_\infty = 0$: la popolazione si **estingue**
- se $\tau_0^{\text{nati}} > \tau_0^{\text{morti}}$ allora $p_\infty \neq 0$: la popolazione si **stabilizza**; "comportamenti strani"?
- al crescere di $a$ e $b$ (competizione) $p_\infty$ **diminuisce**
- limite $a = b = 0$: $p_{n+1} = [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}})]p_n$, da cui

$$p_{n+1} = [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}})]^n p_1$$

**esplosione** ($\tau_0^{\text{nati}} > \tau_0^{\text{morti}}$) o **estinzione** ($\tau_0^{\text{nati}} < \tau_0^{\text{morti}}$).

# Domanda 1: calcolo di $p_\infty$

$$p_\infty = [(1+\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}})-(a+b)p_\infty]p_\infty \quad \Longrightarrow \quad p_\infty = \frac{\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}}}{a+b}.$$

Considerazioni:

- se $\tau_0^{\text{nati}} \leq \tau_0^{\text{morti}}$ allora $p_\infty = 0$: la popolazione si **estingue**
- se $\tau_0^{\text{nati}} > \tau_0^{\text{morti}}$ allora $p_\infty \neq 0$: la popolazione si **stabilizza**; "comportamenti strani"?
- al crescere di $a$ e $b$ (competizione) $p_\infty$ **diminuisce**
- limite $a = b = 0$: $p_{n+1} = [(1+\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}})]p_n$, da cui

$$p_{n+1} = [(1+\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}})]^n p_1$$

**esplosione** ($\tau_0^{\text{nati}} > \tau_0^{\text{morti}}$) o **estinzione** ($\tau_0^{\text{nati}} < \tau_0^{\text{morti}}$).

# Domanda 1: calcolo di $p_\infty$

$$p_\infty = [(1+\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}})-(a+b)p_\infty]p_\infty \quad\Longrightarrow\quad p_\infty = \frac{\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}}}{a+b}.$$

Considerazioni:

- se $\tau_0^{\text{nati}} \leq \tau_0^{\text{morti}}$ allora $p_\infty = 0$: la popolazione si **estingue**
- se $\tau_0^{\text{nati}} > \tau_0^{\text{morti}}$ allora $p_\infty \neq 0$: la popolazione si **stabilizza**; "comportamenti strani"?
- al crescere di $a$ e $b$ (competizione) $p_\infty$ **diminuisce**
- limite $a = b = 0$: $p_{n+1} = [(1+\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}})]p_n$, da cui

$$p_{n+1} = [(1+\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}})]^n p_1$$

**esplosione** ($\tau_0^{\text{nati}} > \tau_0^{\text{morti}}$) o **estinzione** ($\tau_0^{\text{nati}} < \tau_0^{\text{morti}}$).

# Domanda 2: calcolo di $p_{\max}$

Sotto l'ipotesi $p_n \geq 0$, si ha

$$p_{n+1} \geq 0 \iff [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) - (a+b)p_n]p_n \geq 0$$

da cui

$$0 \leq p_n \leq \frac{1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}}{a+b},$$

pertanto

$$p_{\max} = \frac{1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}}{a+b} > p_\infty.$$

$p_{\max} > p_\infty$?

Sì: possibili fenomeni di *overshooting*, l'assestamento della popolazione avviene in maniera **non monotòna.**

# Domanda 2: calcolo di $p_{\mathrm{max}}$

Sotto l'ipotesi $p_n \geq 0$, si ha

$$p_{n+1} \geq 0 \iff [(1 + \tau_0^{\mathrm{nati}} - \tau_0^{\mathrm{morti}}) - (a+b)p_n]p_n \geq 0$$

da cui

$$0 \leq p_n \leq \frac{1 + \tau_0^{\mathrm{nati}} - \tau_0^{\mathrm{morti}}}{a+b},$$

pertanto

$$p_{\mathrm{max}} = \frac{1 + \tau_0^{\mathrm{nati}} - \tau_0^{\mathrm{morti}}}{a+b} > p_\infty.$$

$p_{\mathrm{max}} > p_\infty$?
Sì: possibili fenomeni di *overshooting*, l'assestamento della popolazione avviene in maniera **non monotòna.**

# Domanda 2: calcolo di $p_{\max}$

Sotto l'ipotesi $p_n \geq 0$, si ha

$$p_{n+1} \geq 0 \iff [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) - (a+b)p_n]p_n \geq 0$$

da cui

$$0 \leq p_n \leq \frac{1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}}{a+b},$$

pertanto

$$p_{\max} = \frac{1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}}{a+b} > p_\infty.$$

$p_{\max} > p_\infty$?

Sì: possibili fenomeni di *overshooting*, l'assestamento della popolazione avviene in maniera **non monotòna.**

# Domanda 2: calcolo di $p_{\max}$

Sotto l'ipotesi $p_n \geq 0$, si ha

$$p_{n+1} \geq 0 \iff [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) - (a+b)p_n]p_n \geq 0$$

da cui

$$0 \leq p_n \leq \frac{1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}}{a+b},$$

pertanto

$$p_{\max} = \frac{1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}}{a+b} > p_\infty.$$

$p_{\max} > p_\infty$?
Sì: possibili fenomeni di *overshooting*, l'assestamento della popolazione avviene in maniera **non monotòna.**

# Agenda

# La mappa logistica (1/2)

Siccome esiste $p_{\max}$, anziché utilizzare il numero "assoluto" di individui $p_n$, introduciamo una **popolazione "riscalata"** $x_n = p_n/p_{\max}$ tale che $0 \leq x_n \leq 1$. Da

$$p_{n+1} = [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) - (a+b)p_n]p_n,$$

dividendo entrambi i membri per $p_{\max}$ e rielaborando si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{p_{n+1}}{p_{\max}} &= [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) - (a+b)p_n]\frac{p_n}{p_{\max}} \\
&= (1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) \left[1 - \frac{a+b}{1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}} p_n\right] \frac{p_n}{p_{\max}} \\
&= (1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) \left[1 - \frac{p_n}{p_{\max}}\right] \frac{p_n}{p_{\max}}
\end{aligned}$$

# La mappa logistica (1/2)

Siccome esiste $p_{\max}$, anziché utilizzare il numero "assoluto" di individui $p_n$, introduciamo una **popolazione "riscalata"** $x_n = p_n/p_{\max}$ tale che $0 \leq x_n \leq 1$. Da

$$p_{n+1} = [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) - (a+b)p_n]p_n,$$

dividendo entrambi i membri per $p_{\max}$ e rielaborando si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{p_{n+1}}{p_{\max}} &= [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) - (a+b)p_n]\frac{p_n}{p_{\max}} \\
&= (1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) \left[1 - \frac{a+b}{1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}} p_n\right] \frac{p_n}{p_{\max}} \\
&= (1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) \left[1 - \frac{p_n}{p_{\max}}\right] \frac{p_n}{p_{\max}}
\end{aligned}$$

# La mappa logistica (1/2)

Siccome esiste $p_{\max}$, anziché utilizzare il numero "assoluto" di individui $p_n$, introduciamo una **popolazione "riscalata"** $x_n = p_n/p_{\max}$ tale che $0 \leq x_n \leq 1$. Da

$$p_{n+1} = [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) - (a+b)p_n]p_n,$$

dividendo entrambi i membri per $p_{\max}$ e rielaborando si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{p_{n+1}}{p_{\max}} &= [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) - (a+b)p_n]\frac{p_n}{p_{\max}} \\
&= (1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) \left[1 - \frac{a+b}{1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}} p_n\right] \frac{p_n}{p_{\max}} \\
&= (1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) \left[1 - \frac{p_n}{p_{\max}}\right] \frac{p_n}{p_{\max}}
\end{aligned}$$

# La mappa logistica (2/2)

Introducendo

$$A = 1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}} > 0 \qquad \text{e} \qquad x_n = \frac{p_n}{p_{\max}} = \frac{a+b}{1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}} p_n,$$

si ottiene semplicemente

$$x_{n+1} = A x_n (1 - x_n), \tag{2}$$

nota come *equazione logistica discreta*.

Domande:

1. Quanto vale $x_\infty$ (valore asintotico normalizzato)?
2. Quali valori può assumere $A$ in modo che la popolazione normalizzata $x_n$ sia sempre $0 \le x_n \le 1$?
3. Si può pensare ad un *metodo grafico* per determinare il destino della popolazione normalizzata $x_n$?

# La mappa logistica (2/2)

Introducendo

$$A = 1+\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}} > 0 \qquad \text{e} \qquad x_n = \frac{p_n}{p_{\text{max}}} = \frac{a+b}{1+\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}}} p_n,$$

si ottiene semplicemente

$$x_{n+1} = Ax_n(1-x_n), \tag{2}$$

nota come *equazione logistica discreta*.
Domande:

1. Quanto vale $x_\infty$ (valore asintotico normalizzato)?
2. Quali valori può assumere $A$ in modo che la popolazione normalizzata $x_n$ sia sempre $0 \leq x_n \leq 1$?
3. Si può pensare ad un *metodo grafico* per determinare il destino della popolazione normalizzata $x_n$?

# La mappa logistica (2/2)

Introducendo

$$A = 1+\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}} > 0 \qquad \text{e} \qquad x_n = \frac{p_n}{p_{\text{max}}} = \frac{a+b}{1+\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}}} p_n,$$

si ottiene semplicemente

$$x_{n+1} = Ax_n(1-x_n), \tag{2}$$

nota come *equazione logistica discreta*.
Domande:

1. Quanto vale $x_\infty$ (valore asintotico normalizzato)?
2. Quali valori può assumere $A$ in modo che la popolazione normalizzata $x_n$ sia sempre $0 \leq x_n \leq 1$?
3. Si può pensare ad un *metodo grafico* per determinare il destino della popolazione normalizzata $x_n$?

# La mappa logistica (2/2)

Introducendo

$$A = 1+\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}} > 0 \qquad \text{e} \qquad x_n = \frac{p_n}{p_{\max}} = \frac{a+b}{1+\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}}}p_n,$$

si ottiene semplicemente

$$x_{n+1} = Ax_n(1-x_n), \tag{2}$$

nota come *equazione logistica discreta*.
Domande:

1. Quanto vale $x_\infty$ (valore asintotico normalizzato)?
2. Quali valori può assumere $A$ in modo che la popolazione normalizzata $x_n$ sia sempre $0 \leq x_n \leq 1$?
3. Si può pensare ad un *metodo grafico* per determinare il destino della popolazione normalizzata $x_n$?

# Domande 1 e 2 (1/2)

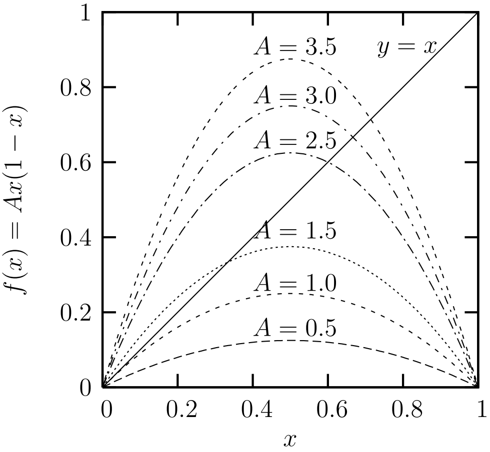
1. calcolo di $x_\infty$:
$$x_\infty = Ax_\infty(1 - x_\infty)$$
da cui
$$x_\infty = 0 \qquad \text{e} \qquad x_\infty = 1 - 1/A.$$
Affinché la specie non si estingua ($x_\infty > 0$), deve essere $1 - 1/A > 0$ che implica $A > 1$.
2. valori ammissibili di $A$: il vertice della parabola $y = Ax(1 - x)$ è $V(1/2, A/4)$, per avere $0 < x_n \leq 1$ deve essere $0 < A/4 \leq 1$ che implica $0 < A \leq 4$.

## Domande 1 e 2 (1/2)

1. calcolo di $x_\infty$:
$$x_\infty = Ax_\infty(1 - x_\infty)$$
da cui
$$x_\infty = 0 \qquad \text{e} \qquad x_\infty = 1 - 1/A.$$
Affinché la specie non si estingua ($x_\infty > 0$), deve essere $1 - 1/A > 0$ che implica $A > 1$.
2. valori ammissibili di $A$: il vertice della parabola $y = Ax(1 - x)$ è $V(1/2, A/4)$, per avere $0 < x_n \leq 1$ deve essere $0 < A/4 \leq 1$ che implica $0 < A \leq 4$.

# Domande 1 e 2 (2/2)

- per $0 \leq A \leq 1$ si ha $x_\infty = 0$
- per $1 < A \leq 4$ si hanno $x_\infty = 0$ oppure $x_\infty = 1 - 1/A$.



# Domanda 3: metodo grafico per calcolare $x_{n+1}$?

**Sì**: basta riportare sullo stesso grafico $y = f(x)$ e $y = x$ e poi

1. partire dal dato iniziale $x_1$ e calcolare $x_2 = f(x_1)$
2. riportare il valore di $x_2$ sull'asse delle ascisse sfruttando la bisettrice $y = x$
3. calcolare $x_3 = f(x_2)$
4. ...
5. calcolare $x_{n+1} = f(x_n)$
6. se $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$, esci dal ciclo
7. riportare il valore di $x_{n+1}$ sull'asse delle ascisse sfruttando la bisettrice $y = x$ e ripetere dal punto 5

# Domanda 3: metodo grafico per calcolare $x_{n+1}$?

**Sì**: basta riportare sullo stesso grafico $y = f(x)$ e $y = x$ e poi

1. partire dal dato iniziale $x_1$ e calcolare $x_2 = f(x_1)$
2. riportare il valore di $x_2$ sull'asse delle ascisse sfruttando la bisettrice $y = x$
3. calcolare $x_3 = f(x_2)$
4. ...
5. calcolare $x_{n+1} = f(x_n)$
6. se $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$, esci dal ciclo
7. riportare il valore di $x_{n+1}$ sull'asse delle ascisse sfruttando la bisettrice $y = x$ e ripetere dal punto 5

# Domanda 3: metodo grafico per calcolare $x_{n+1}$?

**Sì**: basta riportare sullo stesso grafico $y = f(x)$ e $y = x$ e poi

1. partire dal dato iniziale $x_1$ e calcolare $x_2 = f(x_1)$
2. riportare il valore di $x_2$ sull'asse delle ascisse sfruttando la bisettrice $y = x$
3. calcolare $x_3 = f(x_2)$
4. ...
5. calcolare $x_{n+1} = f(x_n)$
6. se $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$, esci dal ciclo
7. riportare il valore di $x_{n+1}$ sull'asse delle ascisse sfruttando la bisettrice $y = x$ e ripetere dal punto 5

# Domanda 3: metodo grafico per calcolare $x_{n+1}$?

**Sì**: basta riportare sullo stesso grafico $y = f(x)$ e $y = x$ e poi

1. partire dal dato iniziale $x_1$ e calcolare $x_2 = f(x_1)$
2. riportare il valore di $x_2$ sull'asse delle ascisse sfruttando la bisettrice $y = x$
3. calcolare $x_3 = f(x_2)$
4. ...
5. calcolare $x_{n+1} = f(x_n)$
6. se $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$, esci dal ciclo
7. riportare il valore di $x_{n+1}$ sull'asse delle ascisse sfruttando la bisettrice $y = x$ e ripetere dal punto 5

# Domanda 3: metodo grafico per calcolare $x_{n+1}$?

**Sì**: basta riportare sullo stesso grafico $y = f(x)$ e $y = x$ e poi

1. partire dal dato iniziale $x_1$ e calcolare $x_2 = f(x_1)$
2. riportare il valore di $x_2$ sull'asse delle ascisse sfruttando la bisettrice $y = x$
3. calcolare $x_3 = f(x_2)$
4. ...
5. calcolare $x_{n+1} = f(x_n)$
6. se $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$, esci dal ciclo
7. riportare il valore di $x_{n+1}$ sull'asse delle ascisse sfruttando la bisettrice $y = x$ e ripetere dal punto 5

## Domanda 3: metodo grafico per calcolare $x_{n+1}$?

**Sì**: basta riportare sullo stesso grafico $y = f(x)$ e $y = x$ e poi

1. partire dal dato iniziale $x_1$ e calcolare $x_2 = f(x_1)$
2. riportare il valore di $x_2$ sull'asse delle ascisse sfruttando la bisettrice $y = x$
3. calcolare $x_3 = f(x_2)$
4. ...
5. calcolare $x_{n+1} = f(x_n)$
6. se $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$, esci dal ciclo
7. riportare il valore di $x_{n+1}$ sull'asse delle ascisse sfruttando la bisettrice $y = x$ e ripetere dal punto 5

# Domanda 3: metodo grafico per calcolare $x_{n+1}$?

**Sì**: basta riportare sullo stesso grafico $y = f(x)$ e $y = x$ e poi

1. partire dal dato iniziale $x_1$ e calcolare $x_2 = f(x_1)$
2. riportare il valore di $x_2$ sull'asse delle ascisse sfruttando la bisettrice $y = x$
3. calcolare $x_3 = f(x_2)$
4. ...
5. calcolare $x_{n+1} = f(x_n)$
6. se $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$, esci dal ciclo
7. riportare il valore di $x_{n+1}$ sull'asse delle ascisse sfruttando la bisettrice $y = x$ e ripetere dal punto 5

# Domanda 3: metodo grafico per calcolare $x_{n+1}$?

**Sì**: basta riportare sullo stesso grafico $y = f(x)$ e $y = x$ e poi

1. partire dal dato iniziale $x_1$ e calcolare $x_2 = f(x_1)$
2. riportare il valore di $x_2$ sull'asse delle ascisse sfruttando la bisettrice $y = x$
3. calcolare $x_3 = f(x_2)$
4. $\ldots$
5. calcolare $x_{n+1} = f(x_n)$
6. se $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$, esci dal ciclo
7. riportare il valore di $x_{n+1}$ sull'asse delle ascisse sfruttando la bisettrice $y = x$ e ripetere dal punto 5

# Vediamo cosa succede per $A \leq 3$...

Giochiamo un po' con Octave o Excel: per $0 < A < 3$ si osservano varie *transizioni*, in ogni caso c'è *almeno* una soluzione di equilibrio stabile:

- Se $0 < A \leq 1$, ovvero se $\tau_0^{\text{nati}} \leq \tau_0^{\text{morti}}$, allora $x_\infty = 1 - 1/A = 0$ e la specie si estingue.
- Se $1 < A \leq 2$ la popolazione si stabilizza velocemente al valore $1 - 1/A$, indipendentemente dal valore iniziale della popolazione.
- Se $2 < A \leq 3$ la popolazione si stabilizza comunque al valore $1 - 1/A$ ma oscillando attorno ad esso per un po' di tempo. La convergenza risulta molto lenta per $A = 3$.

**Cosa succede per $3 < A \leq 4$?**

# Agenda

# Cosa succede per $3 < A \leq 4$? (1/3)

- per $3 < A < 1 + \sqrt{6}$: $x_n$ oscilla tra 2 valori stabili
- per $1 + \sqrt{6} < A < 3.54409$: $x_n$ oscilla tra 4 valori stabili
- per $3.54409 < A < 3.56995$: $x_n$ oscilla tra 8 valori stabili, poi 16, 32 etc.: ***period-doubling cascade***.
- per $A \approx 3.56995$: si raggiunge una condizione in cui $x_n$ assume tutti valori diversi con l'impossibilità di riconoscere delle oscillazioni periodiche: **caos matematico!** ma...
- da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.82843$: si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)
- per $3.848 < A \leq 4$: ritorna il comportamento caotico

## Cosa succede per $3 < A \leq 4$? (1/3)

- per $3 < A < 1+\sqrt{6}$: $x_n$ oscilla tra 2 valori stabili
- per $1+\sqrt{6} < A < 3.54409$: $x_n$ oscilla tra 4 valori stabili
- per $3.54409 < A < 3.56995$: $x_n$ oscilla tra 8 valori stabili, poi 16, 32 etc.: ***period-doubling cascade***.
- per $A \approx 3.56995$: si raggiunge una condizione in cui $x_n$ assume tutti valori diversi con l'impossibilità di riconoscere delle oscillazioni periodiche: **caos matematico!** ma...
- da $A = 1+\sqrt{8} \approx 3.82843$: si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)
- per $3.848 < A \leq 4$: ritorna il comportamento caotico

## Cosa succede per $3 < A \leq 4$? (1/3)

- per $3 < A < 1 + \sqrt{6}$: $x_n$ oscilla tra 2 valori stabili
- per $1 + \sqrt{6} < A < 3.54409$: $x_n$ oscilla tra 4 valori stabili
- per $3.54409 < A < 3.56995$: $x_n$ oscilla tra 8 valori stabili, poi 16, 32 etc.: ***period-doubling cascade***.
- per $A \approx 3.56995$: si raggiunge una condizione in cui $x_n$ assume tutti valori diversi con l'impossibilità di riconoscere delle oscillazioni periodiche: **caos matematico!** ma...
- da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.82843$: si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)
- per $3.848 < A \leq 4$: ritorna il comportamento caotico

# Cosa succede per $3 < A \leq 4$? (1/3)

- per $3 < A < 1 + \sqrt{6}$: $x_n$ oscilla tra 2 valori stabili
- per $1 + \sqrt{6} < A < 3.54409$: $x_n$ oscilla tra 4 valori stabili
- per $3.54409 < A < 3.56995$: $x_n$ oscilla tra 8 valori stabili, poi 16, 32 etc.: ***period-doubling cascade***.
- per $A \approx 3.56995$: si raggiunge una condizione in cui $x_n$ assume tutti valori diversi con l'impossibilità di riconoscere delle oscillazioni periodiche: **caos matematico!** ma...
- da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.82843$: si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)
- per $3.848 < A \leq 4$: ritorna il comportamento caotico

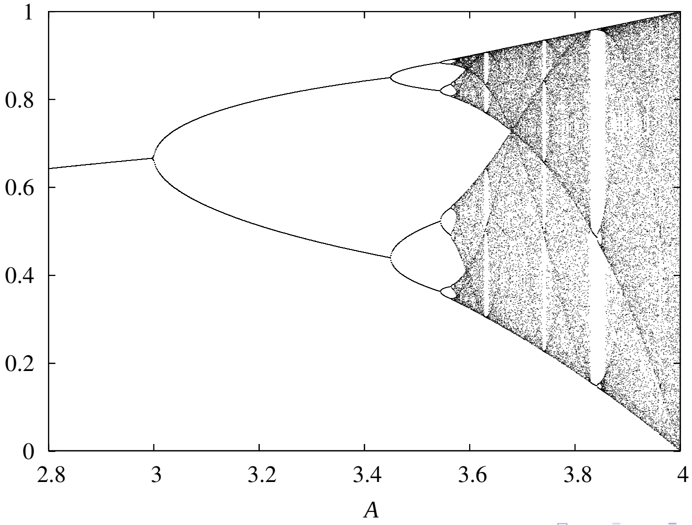
# Cosa succede per $3 < A \leq 4$? (1/3)

- per $3 < A < 1+\sqrt{6}$: $x_n$ oscilla tra 2 valori stabili
- per $1+\sqrt{6} < A < 3.54409$: $x_n$ oscilla tra 4 valori stabili
- per $3.54409 < A < 3.56995$: $x_n$ oscilla tra 8 valori stabili, poi 16, 32 etc.: ***period-doubling cascade***.
- per $A \approx 3.56995$: si raggiunge una condizione in cui $x_n$ assume tutti valori diversi con l'impossibilità di riconoscere delle oscillazioni periodiche: **caos matematico!** ma...
- da $A = 1+\sqrt{8} \approx 3.82843$: si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)
- per $3.848 < A \leq 4$: ritorna il comportamento caotico

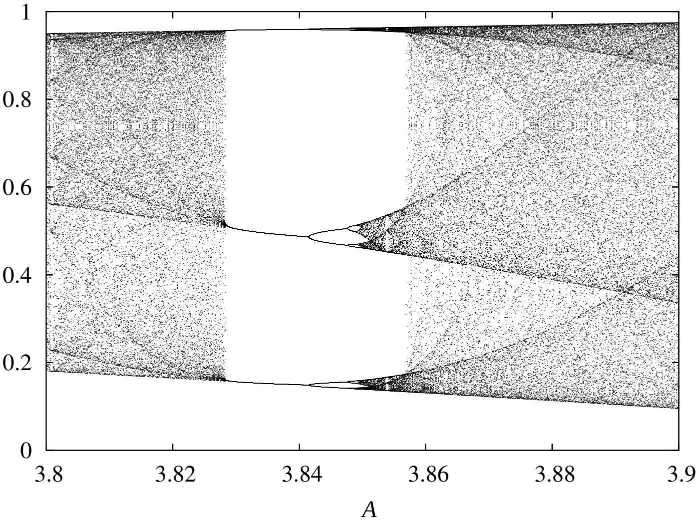
# Cosa succede per $3 < A \leq 4$? (1/3)

- per $3 < A < 1 + \sqrt{6}$: $x_n$ oscilla tra 2 valori stabili
- per $1 + \sqrt{6} < A < 3.54409$: $x_n$ oscilla tra 4 valori stabili
- per $3.54409 < A < 3.56995$: $x_n$ oscilla tra 8 valori stabili, poi 16, 32 etc.: ***period-doubling cascade***.
- per $A \approx 3.56995$: si raggiunge una condizione in cui $x_n$ assume tutti valori diversi con l'impossibilità di riconoscere delle oscillazioni periodiche: **caos matematico!** ma...
- da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.82843$: si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)
- per $3.848 < A \leq 4$: ritorna il comportamento caotico

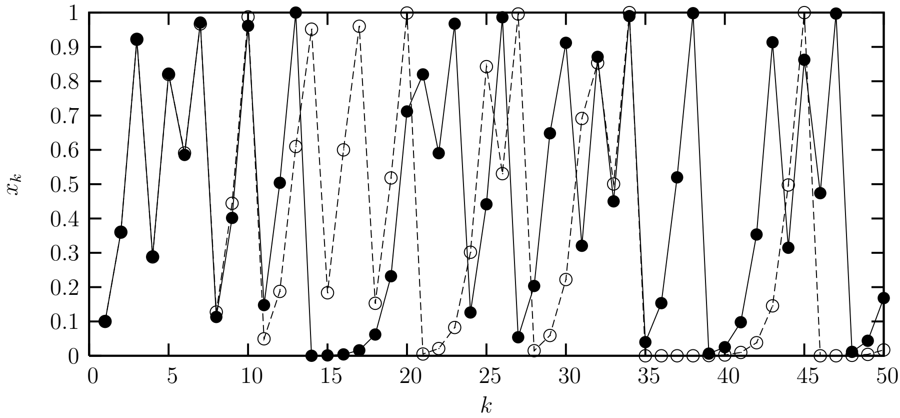
# Cosa succede per $3 < A \leq 4$? (2/3)



# Cosa succede per $3 < A \leq 4$? (3/3)



# Sensibilità alle condizioni iniziali




$A = 4.0$, confronto tra $x_1 = 0.1000$ (linea continua, pallini pieni) e $x_1 = 0.1001$ (linea tratteggiata, pallini vuoti). Si noti che le due soluzioni sono praticamente sovrapposte fino a $k = 6$, ma poi si allontanano l'una dall'altra.

# Riassumendo

- se $0 < A \leq 1$ la popolazione è condannata all'estinzione
- se $1 < A \leq 3$ la popolazione raggiunge il valore asintotico $1 - 1/A$ (velocemente se $1 < A \leq 2$, oscillando se $2 < A \leq 3$).
- se $3 < A < 1 + \sqrt{6} \approx 3.44948$ la popolazione oscilla tra 2 (valori che dipendono solo da $A$): comportamento periodico.
- se $1 + \sqrt{6} < A < 3.54409$ il numero di individui oscilla tra 4 valori
- se $3.54409 < A < 3.56995$ il numero di individui oscilla tra 8 valori, poi 16, etc.
- se $A \approx 3.56995$ non si capisce più niente... **caos matematico!**
- da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.82843$ si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)
- se $3.848 < A \leq 4$ ritorna il comportamento caotico

# Riassumendo

- se $0 < A \leq 1$ la popolazione è condannata all'estinzione
- se $1 < A \leq 3$ la popolazione raggiunge il valore asintotico $1 - 1/A$ (velocemente se $1 < A \leq 2$, oscillando se $2 < A \leq 3$).
- se $3 < A < 1 + \sqrt{6} \approx 3.44948$ la popolazione oscilla tra 2 (valori che dipendono solo da $A$): comportamento periodico.
- se $1 + \sqrt{6} < A < 3.54409$ il numero di individui oscilla tra 4 valori
- se $3.54409 < A < 3.56995$ il numero di individui oscilla tra 8 valori, poi 16, etc.
- se $A \approx 3.56995$ non si capisce più niente... **caos matematico!**
- da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.82843$ si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)
- se $3.848 < A \leq 4$ ritorna il comportamento caotico

# Riassumendo

- se $0 < A \leq 1$ la popolazione è condannata all'estinzione
- se $1 < A \leq 3$ la popolazione raggiunge il valore asintotico $1 - 1/A$ (velocemente se $1 < A \leq 2$, oscillando se $2 < A \leq 3$).
- se $3 < A < 1 + \sqrt{6} \approx 3.44948$ la popolazione oscilla tra 2 (valori che dipendono solo da $A$): comportamento periodico.
- se $1 + \sqrt{6} < A < 3.54409$ il numero di individui oscilla tra 4 valori
- se $3.54409 < A < 3.56995$ il numero di individui oscilla tra 8 valori, poi 16, etc.
- se $A \approx 3.56995$ non si capisce più niente... **caos matematico!**
- da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.82843$ si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)
- se $3.848 < A \leq 4$ ritorna il comportamento caotico

## Riassumendo

- se $0 < A \leq 1$ la popolazione è condannata all'estinzione
- se $1 < A \leq 3$ la popolazione raggiunge il valore asintotico $1 - 1/A$ (velocemente se $1 < A \leq 2$, oscillando se $2 < A \leq 3$).
- se $3 < A < 1 + \sqrt{6} \approx 3.44948$ la popolazione oscilla tra 2 (valori che dipendono solo da $A$): comportamento periodico.
- se $1 + \sqrt{6} < A < 3.54409$ il numero di individui oscilla tra 4 valori
- se $3.54409 < A < 3.56995$ il numero di individui oscilla tra 8 valori, poi 16, etc.
- se $A \approx 3.56995$ non si capisce più niente... **caos matematico!**
- da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.82843$ si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)
- se $3.848 < A \leq 4$ ritorna il comportamento caotico

# Riassumendo

- se $0 < A \leq 1$ la popolazione è condannata all'estinzione
- se $1 < A \leq 3$ la popolazione raggiunge il valore asintotico $1 - 1/A$ (velocemente se $1 < A \leq 2$, oscillando se $2 < A \leq 3$).
- se $3 < A < 1 + \sqrt{6} \approx 3.44948$ la popolazione oscilla tra 2 (valori che dipendono solo da $A$): comportamento periodico.
- se $1 + \sqrt{6} < A < 3.54409$ il numero di individui oscilla tra 4 valori
- se $3.54409 < A < 3.56995$ il numero di individui oscilla tra 8 valori, poi 16, etc.
- se $A \approx 3.56995$ non si capisce più niente... **caos matematico!**
- da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.82843$ si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)
- se $3.848 < A \leq 4$ ritorna il comportamento caotico

# Riassumendo

- se $0 < A \leq 1$ la popolazione è condannata all'estinzione
- se $1 < A \leq 3$ la popolazione raggiunge il valore asintotico $1 - 1/A$ (velocemente se $1 < A \leq 2$, oscillando se $2 < A \leq 3$).
- se $3 < A < 1 + \sqrt{6} \approx 3.44948$ la popolazione oscilla tra 2 (valori che dipendono solo da $A$): comportamento periodico.
- se $1 + \sqrt{6} < A < 3.54409$ il numero di individui oscilla tra 4 valori
- se $3.54409 < A < 3.56995$ il numero di individui oscilla tra 8 valori, poi 16, etc.
- se $A \approx 3.56995$ non si capisce più niente... **caos matematico!**
- da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.82843$ si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)
- se $3.848 < A \leq 4$ ritorna il comportamento caotico

# Riassumendo

- se $0 < A \leq 1$ la popolazione è condannata all'estinzione
- se $1 < A \leq 3$ la popolazione raggiunge il valore asintotico $1 - 1/A$ (velocemente se $1 < A \leq 2$, oscillando se $2 < A \leq 3$).
- se $3 < A < 1 + \sqrt{6} \approx 3.44948$ la popolazione oscilla tra 2 (valori che dipendono solo da $A$): comportamento periodico.
- se $1 + \sqrt{6} < A < 3.54409$ il numero di individui oscilla tra 4 valori
- se $3.54409 < A < 3.56995$ il numero di individui oscilla tra 8 valori, poi 16, etc.
- se $A \approx 3.56995$ non si capisce più niente... **caos matematico!**
- da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.82843$ si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)
- se $3.848 < A \leq 4$ ritorna il comportamento caotico

# Riassumendo

- se $0 < A \leq 1$ la popolazione è condannata all'estinzione
- se $1 < A \leq 3$ la popolazione raggiunge il valore asintotico $1 - 1/A$ (velocemente se $1 < A \leq 2$, oscillando se $2 < A \leq 3$).
- se $3 < A < 1 + \sqrt{6} \approx 3.44948$ la popolazione oscilla tra 2 (valori che dipendono solo da $A$): comportamento periodico.
- se $1 + \sqrt{6} < A < 3.54409$ il numero di individui oscilla tra 4 valori
- se $3.54409 < A < 3.56995$ il numero di individui oscilla tra 8 valori, poi 16, etc.
- se $A \approx 3.56995$ non si capisce più niente... **caos matematico!**
- da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.82843$ si osservano oscillazioni tra 3 valori, poi 6, poi 12 etc. (isole di stabilità)
- se $3.848 < A \leq 4$ ritorna il comportamento caotico

# Conclusioni

- Modelliamo il comportamento della Natura con delle **leggi deterministiche**, spesso all'apparenza semplici, che hanno sempre bisogno di una **condizione iniziale**.
- Al variare dei parametri queste leggi possono esibire un **comportamento *strano*** (soluzioni periodiche, caotiche).
- Se cambio di poco il dato iniziale, solitamente, **mi aspetto che il risultato cambi di poco**. Per soluzioni caotiche no: variando di pochissimo il dato iniziale si ottengono evoluzioni completamente diverse. **Dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali**.
- Ci **sembra** che l'ordine sia sparito: il chaos apparente scaturisce da una **legge deterministica**.
- Esempi in Natura:
  - le previsioni metereologiche (effetto farfalla)
  - la turbolenza (argomento irrisolto della fisica classica)

# Conclusioni

- Modelliamo il comportamento della Natura con delle **leggi deterministiche**, spesso all'apparenza semplici, che hanno sempre bisogno di una **condizione iniziale.**
- Al variare dei parametri queste leggi possono esibire un **comportamento *strano*** (soluzioni periodiche, caotiche)**.**
- Se cambio di poco il dato iniziale, solitamente, **mi aspetto che il risultato cambi di poco.** Per soluzioni caotiche no: variando di pochissimo il dato iniziale si ottengono evoluzioni completamente diverse. **Dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali.**
- Ci **sembra** che l'ordine sia sparito: il chaos apparente scaturisce da una **legge deterministica.**
- Esempi in Natura:
  - le previsioni metereologiche (effetto farfalla)
  - la turbolenza (argomento irrisolto della fisica classica)

# Conclusioni

- Modelliamo il comportamento della Natura con delle **leggi deterministiche**, spesso all'apparenza semplici, che hanno sempre bisogno di una **condizione iniziale**.
- Al variare dei parametri queste leggi possono esibire un **comportamento *strano*** (soluzioni periodiche, caotiche).
- Se cambio di poco il dato iniziale, solitamente, **mi aspetto che il risultato cambi di poco**. Per soluzioni caotiche no: variando di pochissimo il dato iniziale si ottengono evoluzioni completamente diverse. **Dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali**.
- Ci **sembra** che l'ordine sia sparito: il chaos apparente scaturisce da una **legge deterministica**.
- Esempi in Natura:
  - le previsioni metereologiche (effetto farfalla)
  - la turbolenza (argomento irrisolto della fisica classica)

# Conclusioni

- Modelliamo il comportamento della Natura con delle **leggi deterministiche**, spesso all'apparenza semplici, che hanno sempre bisogno di una **condizione iniziale**.
- Al variare dei parametri queste leggi possono esibire un **comportamento *strano*** (soluzioni periodiche, caotiche).
- Se cambio di poco il dato iniziale, solitamente, **mi aspetto che il risultato cambi di poco.** Per soluzioni caotiche no: variando di pochissimo il dato iniziale si ottengono evoluzioni completamente diverse. **Dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali**.
- Ci **sembra** che l'ordine sia sparito: il chaos apparente scaturisce da una **legge deterministica**.
- Esempi in Natura:
  - le previsioni metereologiche (effetto farfalla)
  - la turbolenza (argomento irrisolto della fisica classica)

# Conclusioni

- Modelliamo il comportamento della Natura con delle **leggi deterministiche**, spesso all'apparenza semplici, che hanno sempre bisogno di una **condizione iniziale**.
- Al variare dei parametri queste leggi possono esibire un **comportamento *strano*** (soluzioni periodiche, caotiche).
- Se cambio di poco il dato iniziale, solitamente, **mi aspetto che il risultato cambi di poco**. Per soluzioni caotiche no: variando di pochissimo il dato iniziale si ottengono evoluzioni completamente diverse. **Dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali**.
- Ci **sembra** che l'ordine sia sparito: il chaos apparente scaturisce da una **legge deterministica**.
- Esempi in Natura:
  - le previsioni metereologiche (effetto farfalla)
  - la turbolenza (argomento irrisolto della fisica classica)

# Conclusioni

- Modelliamo il comportamento della Natura con delle **leggi deterministiche**, spesso all'apparenza semplici, che hanno sempre bisogno di una **condizione iniziale**.
- Al variare dei parametri queste leggi possono esibire un **comportamento *strano*** (soluzioni periodiche, caotiche).
- Se cambio di poco il dato iniziale, solitamente, **mi aspetto che il risultato cambi di poco**. Per soluzioni caotiche no: variando di pochissimo il dato iniziale si ottengono evoluzioni completamente diverse. **Dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali**.
- Ci **sembra** che l'ordine sia sparito: il chaos apparente scaturisce da una **legge deterministica**.
- Esempi in Natura:
  - le previsioni metereologiche (effetto farfalla)
  - la turbolenza (argomento irrisolto della fisica classica)

# Domande?