L'ottimizzazione nella storia e ….. nella leggenda

Il primo problema di ottimizzazione è contenuto nella leggenda della fondazione dell'antica **Cartagine** da parte di Didone, raccontata nel I libro dell'Eneide.

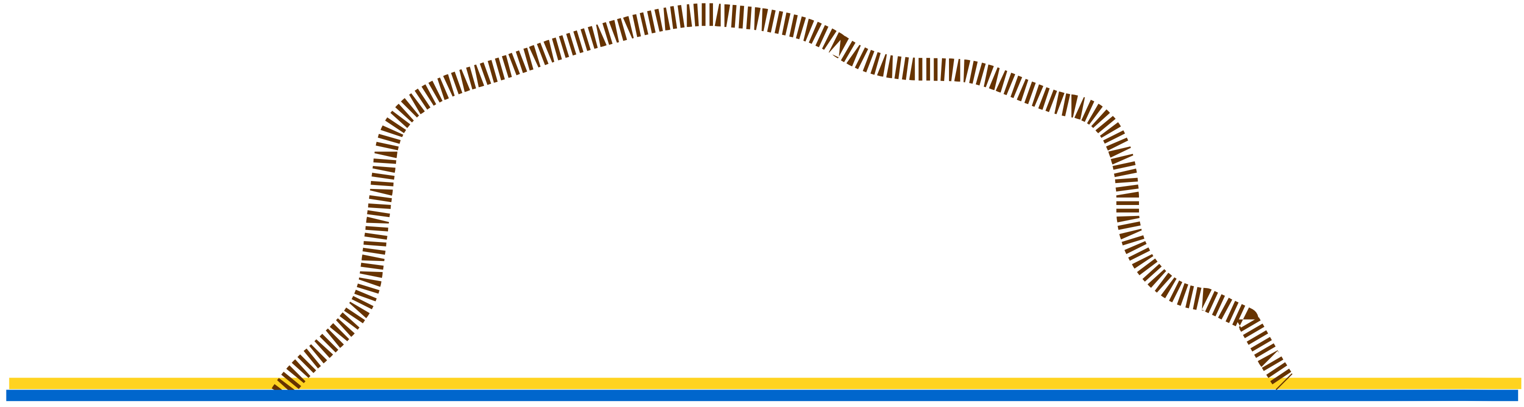
Nell'880 a.C. la regina fenicia ***Didone****, fuggita da Tiro insieme a pochi fedeli, approdò sulle coste settentrionali dell'Africa.*

*Qui chiese a Iarba, re dei Getuli, un appezzamento di terreno su cui costruire una nuova città. Il re, in tutta risposta, le offrì una pelle di toro dicendole che poteva appropriarsi di tanto terreno quanto poteva comprenderne con quella pelle ("****quanto cerchiar di bue potesse un tergo****").*

Il problema di Didone

Il *problema di Didone* è un problema di ottimizzazione:

Fra tutte le curve piane di lunghezza assegnata ed aventi i due estremi su una retta, determinare quella che racchiude la superficie di area massima



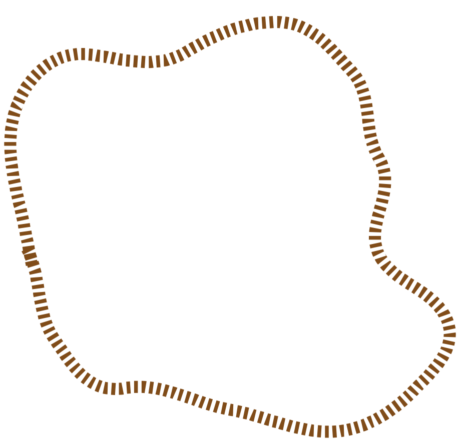
L'ottimizzazione nella storia

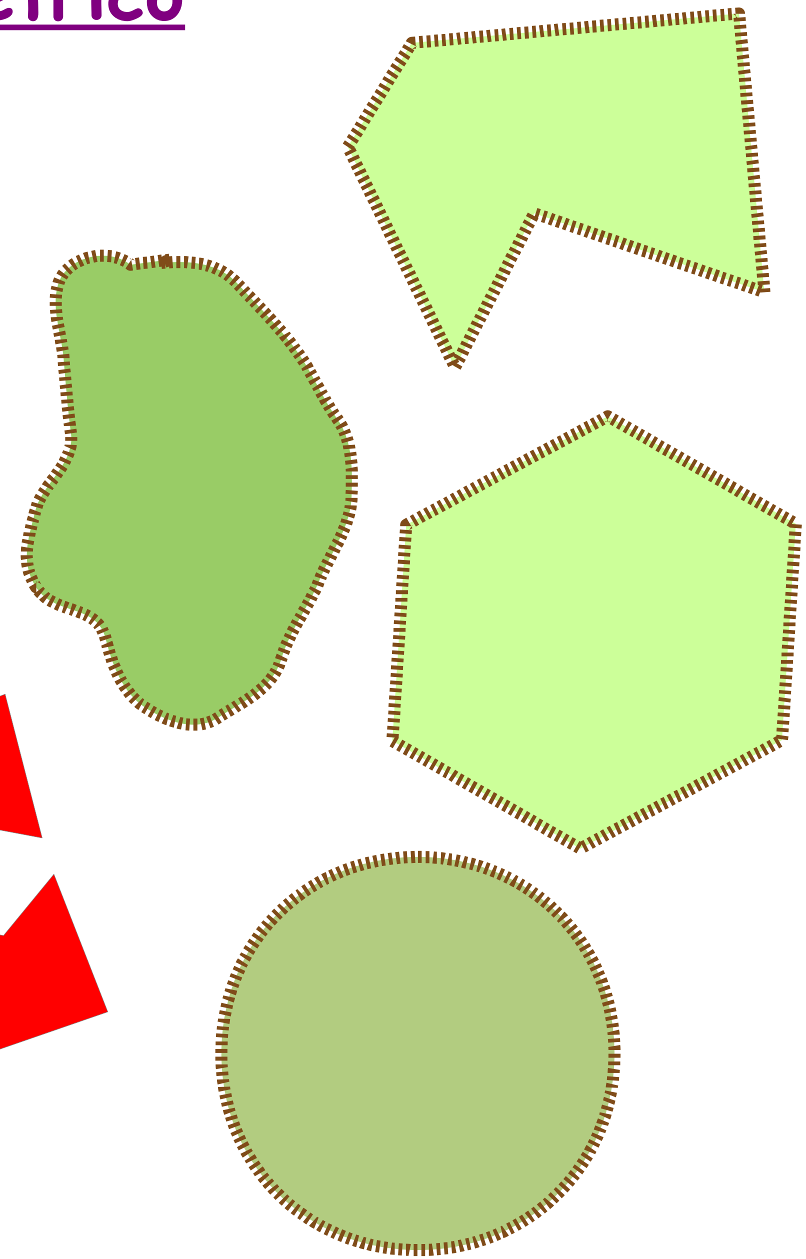
Il problema isoperimetrico

Il problema di Didone è equivalente
al famoso ***problema isoperimetrico***:

Fra tutte le figure piane di egual perimetro, anche non poligonali, determinare quella avente area massima

Ad esempio, si dispone di una **corda lunga un metro** e le si deve dare una forma tale da racchiudere **quanta più area è possibile**

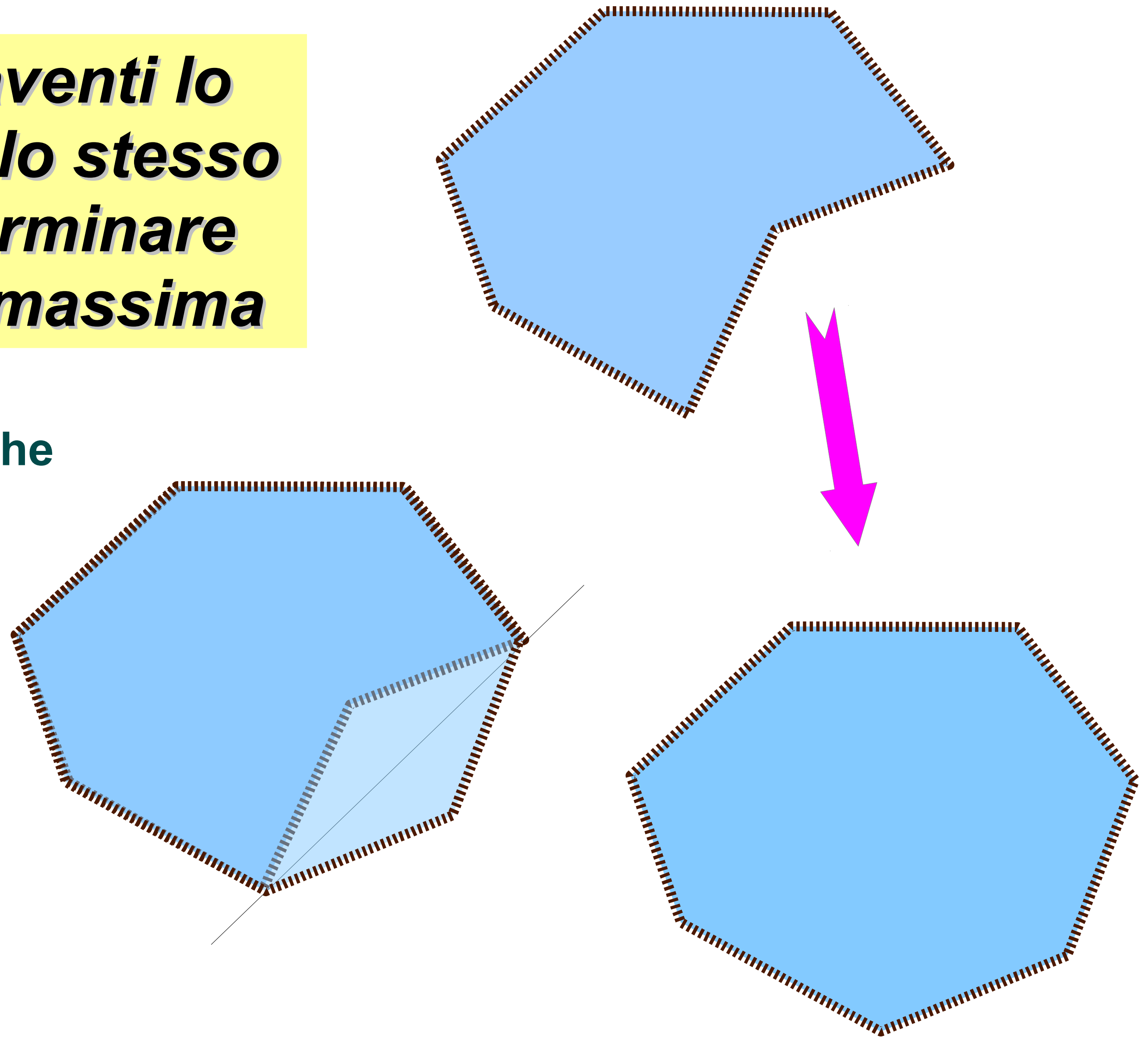




Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi di geometria

Fra tutti i poligoni aventi lo stesso perimetro e lo stesso numero di lati, determinare quello che ha area massima



Una prima osservazione è che *la soluzione non può mai essere rappresentata da un poligono concavo*: se un poligono ha un angolo concavo, con i suoi stessi lati se ne può costruire uno convesso avente area maggiore

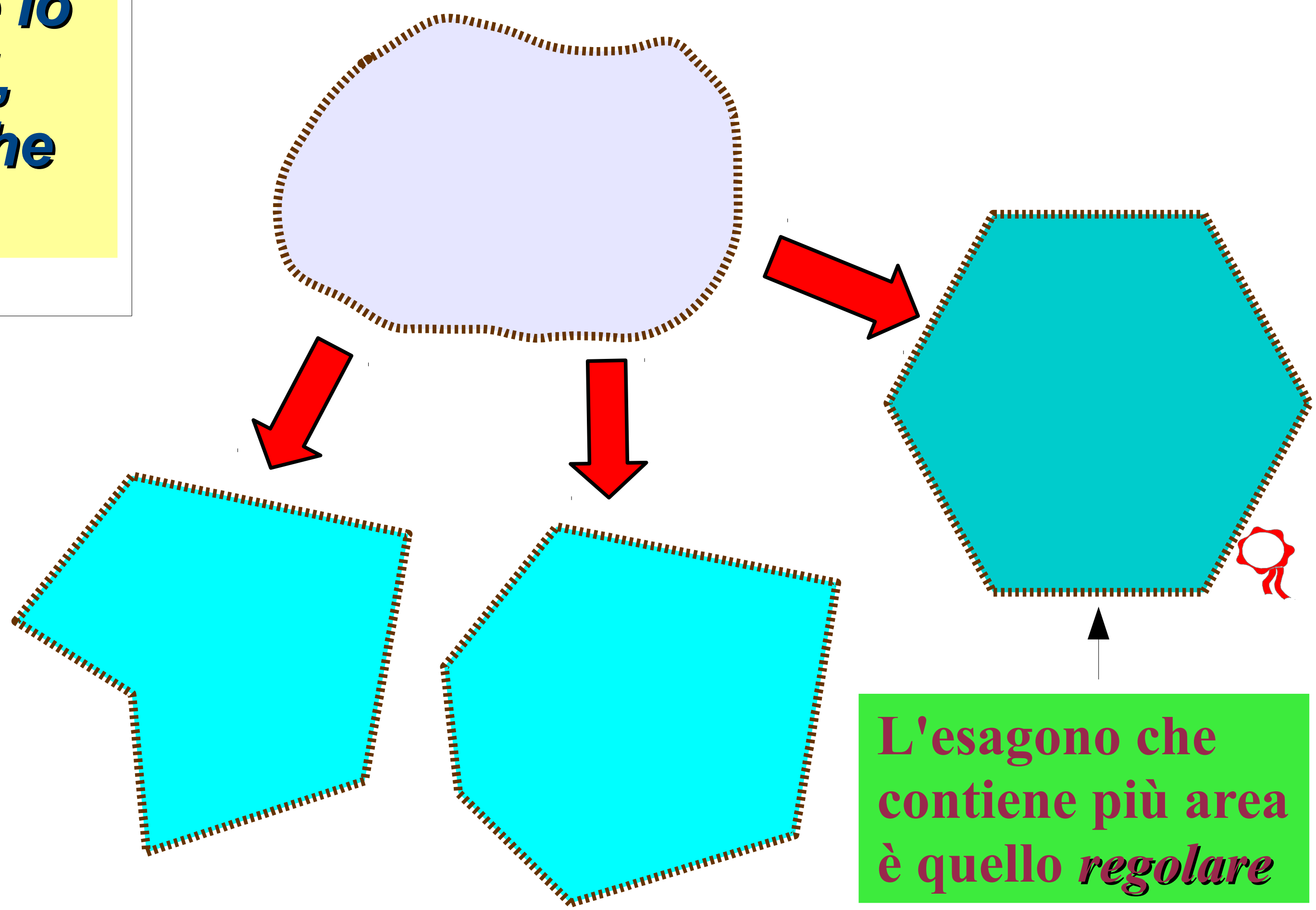
Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi di geometria

Ritorniamo al problema

Fra tutti i poligoni aventi lo stesso perimetro e lo stesso numero di lati, determinare quello che ha area massima

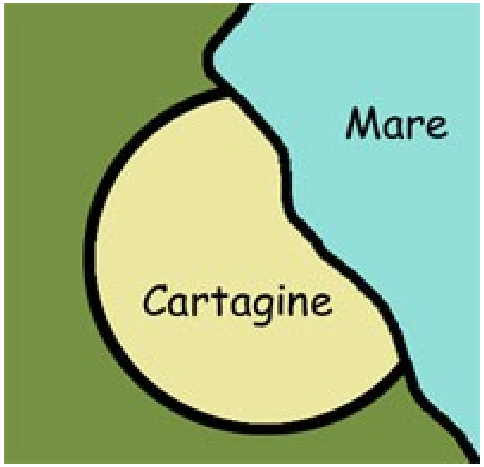
Ad esempio, si dispone di una **corda chiusa** e si formano con essa dei **poligoni esagonali**



La soluzione è il ***poligono regolare*** con quel dato perimetro e quel dato numero di lati

L'ottimizzazione nella storia e ….. nella leggenda

L'astuta Didone accettò la sfida, fece tagliare la pelle in tante strisce sottili che legò una dietro l'altra ed ottenne una corda con la quale potè delimitare una vasta zona, a forma di semicerchio, affacciata sul mare.

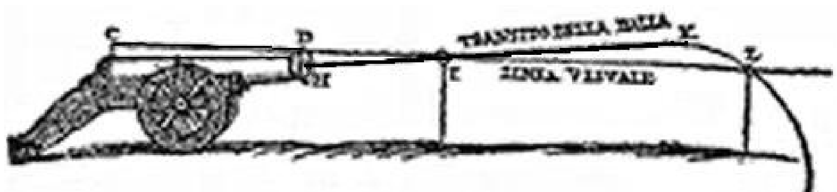


Qualcuno ha calcolato che in questo modo si potrebbe verosimilmente comprendere un semicerchio equivalente per estensione a 15 campi di calcio.

Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi di fisica

Che inclinazione bisogna dare al cannone se si vuole che la gittata sia massima?



Un pizzico di storia

Nel "Nuova Scientia", del 1537, Tartaglia scrive:

«Ogni transito […] sempre sarà in parte retto e in parte curvo, e la parte curva sarà parte d'una circonferentia di cerchio»

Ma subito dopo precisa:

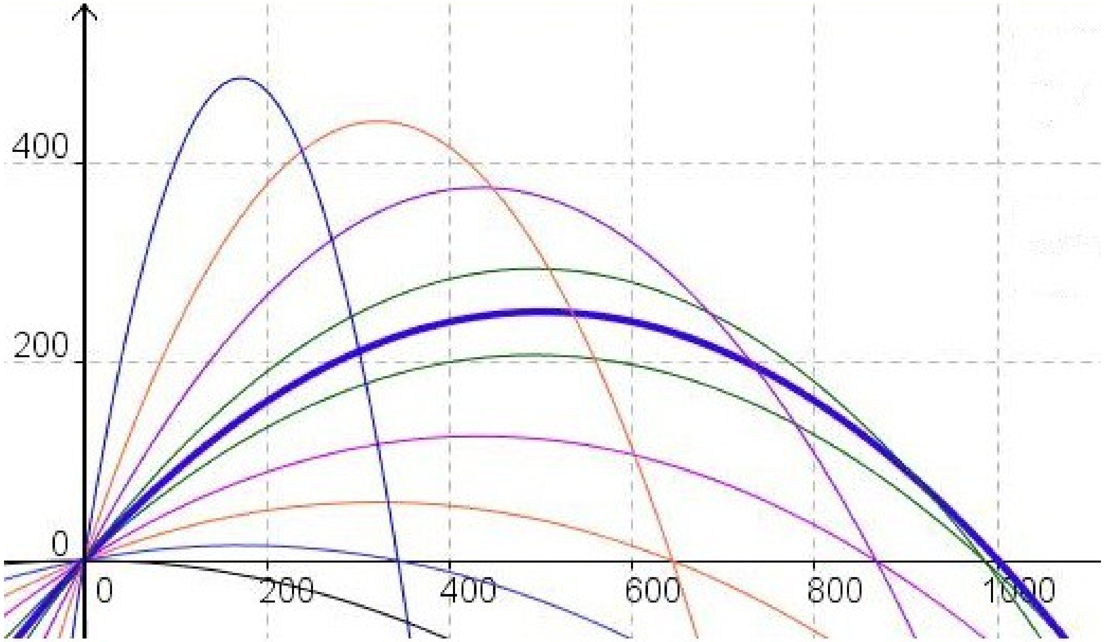
«niun transito […] mai puol aver alcuna parte che sia perfettamente retta, per causa della gravità che se ritrova in quel tal corpo: la quale continuamente lo va stimulando e tirando verso il centro del mondo»

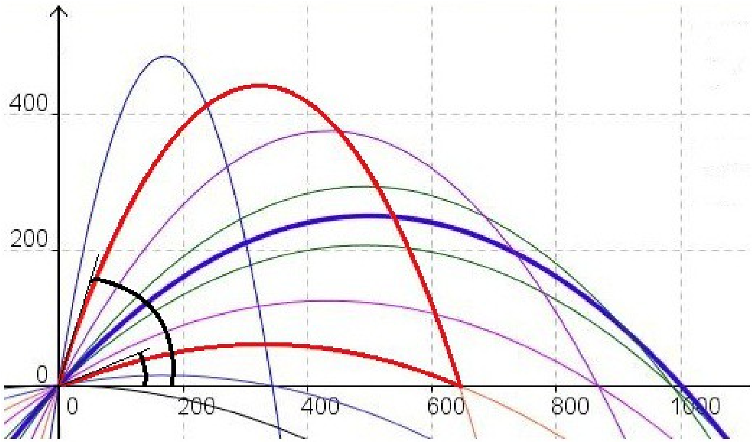
Un piccolo ma importante passo avanti rispetto alle credenze degli aristotelici!
Ma per arrivare alla scoperta del moto parabolico bisogna aspettare gli studi di Galilei, almeno un altro mezzo secolo.

Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi di fisica

Si calcola che l'angolo di lancio per la gittata massima è l'angolo di 45 gradi





E' interessante osservare che ad **angoli complementari** corrisponde la **stessa gittata**

Ancora Tartaglia:

«Se una medesima possanza movente eiettarà corpi egualmente gravi [...], quello che farà il suo transito elevato a 45 gradi sopra l'orizzonte farà ancora il suo effetto più lontan dal suo principio [...] che in qualunque altro modo elevato»

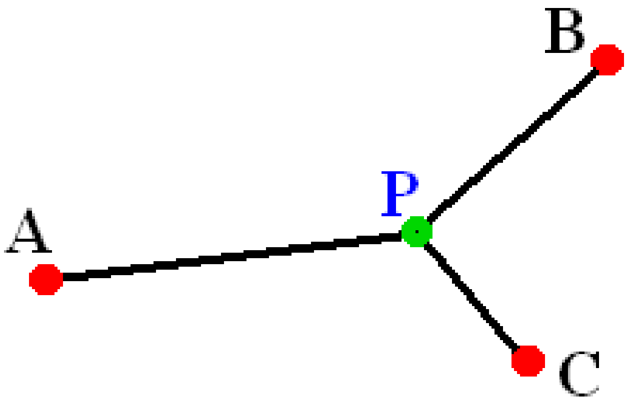
L'ottimizzazione nella storia

Il problema della rete stradale

Sono dati tre villaggi e si vuole determinare la più corta fra tutte le reti stradali che li collegano

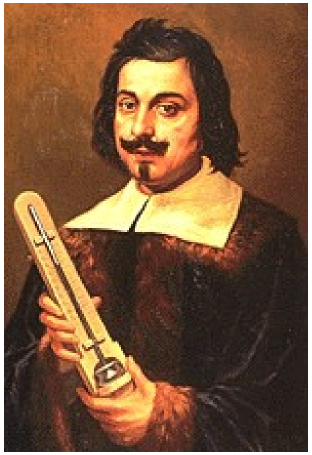
Matematicamente il problema si può formulare così:

Dati tre punti A, B e C, trovare un punto P tale che sia minima la somma delle distanze fra questo punto e quelli assegnati



Fermat

Il problema fu proposto intorno alla metà del XVII secolo da **Pierre de Fermat** in una lettera inviata ad **Evangelista Torricelli**, che in breve tempo trovò la soluzione.

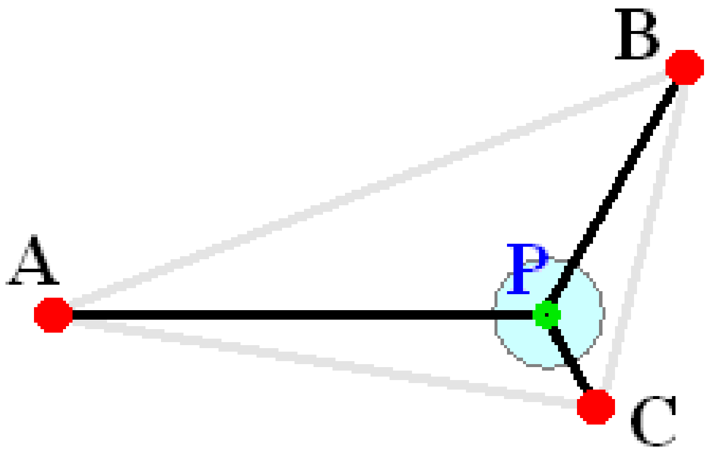


Torricelli

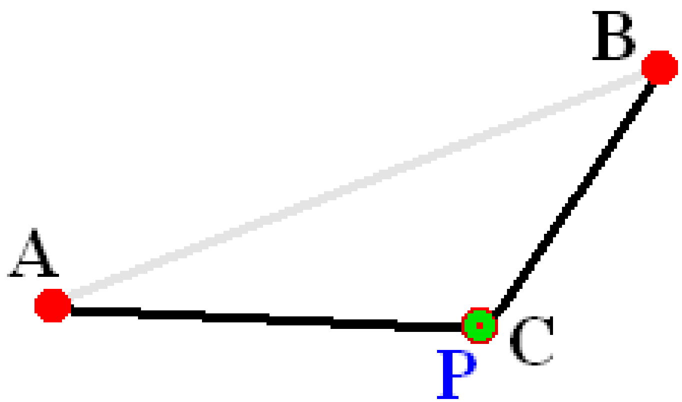
Cosimo De Mitri

Il problema della rete stradale

La soluzione è rappresentata dal punto *P* dal quale i lati del triangolo *ABC* si vedono sotto angoli uguali tra loro (120° ciascuno).

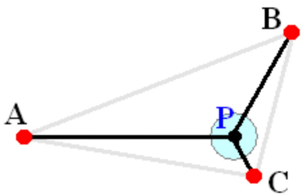


Se però uno degli angoli del triangolo è uguale o maggiore di 120°, allora il punto *P* deve coincidere con il vertice di quest'angolo.



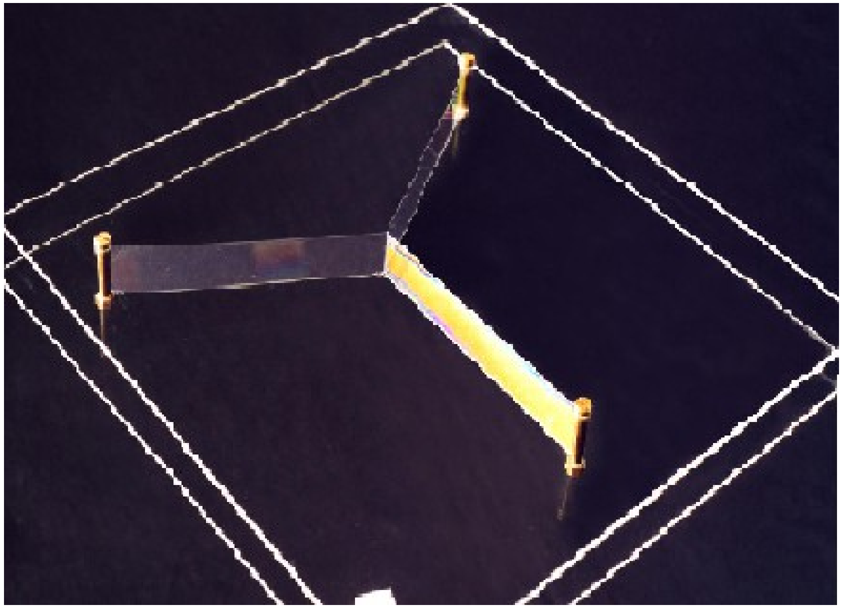
Il punto P è chiamato *punto di Torricelli-Fermat*

Questo punto ha talmente tante proprietà che meriterebbe di essere considerato alla pari dei famosi quattro punti notevoli del triangolo, *baricentro*, *ortocentro*, *incentro* e *circocentro*

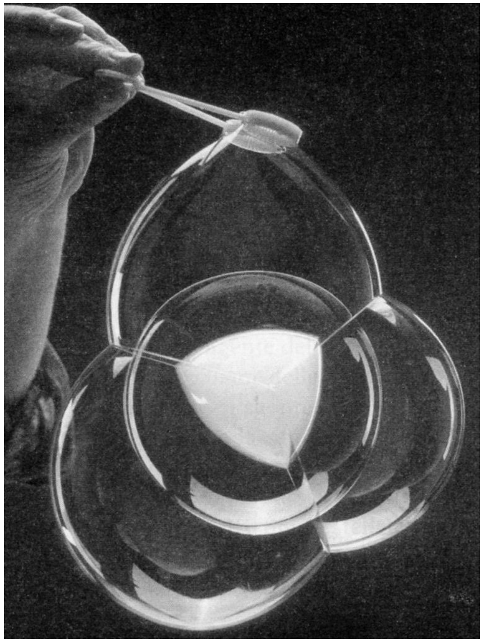


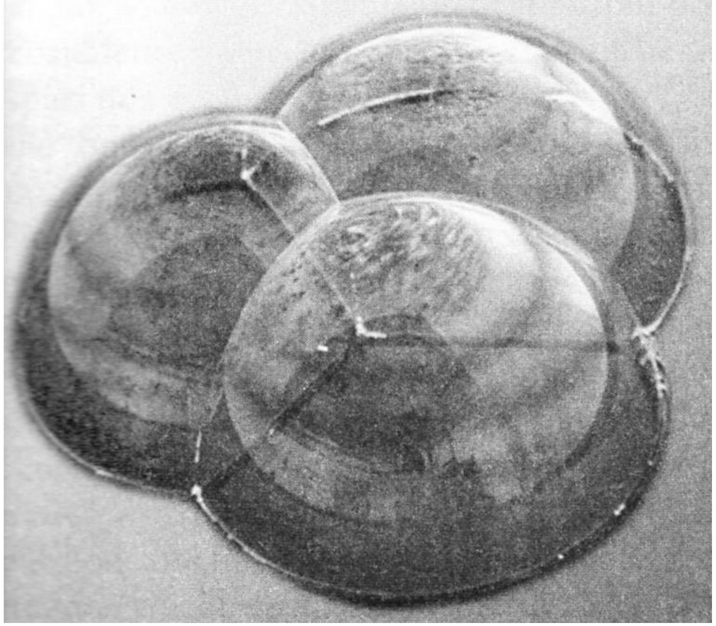
Il problema della rete stradale

La natura conosce bene la soluzione



Angoli diedri di 120° formati dalle lamine di liquido saponoso, per ridurre il più possibile la tensione superficiale

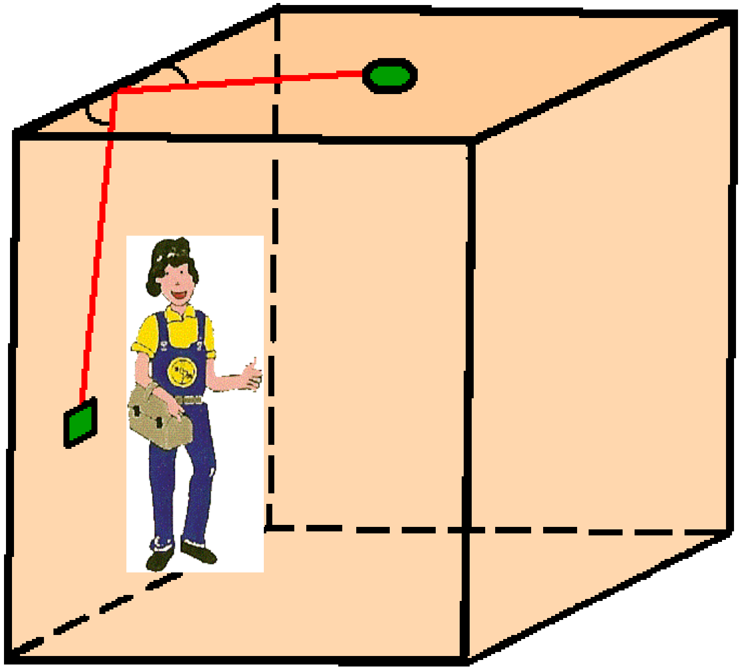




Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi di geometria

Si pensi ad un elettricista che deve stabilire un tracciato che parta dall'interruttore e arrivi al lampadario minimizzando la lunghezza del filo.



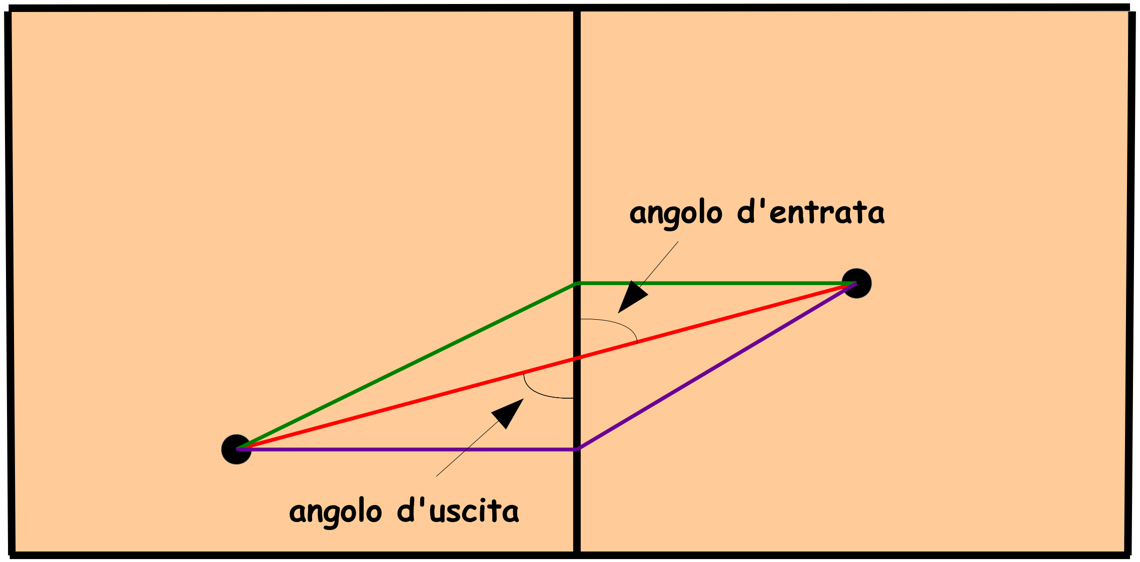
Si chiama *geodetica* la curva più breve fra tutte quelle che si possono disegnare su una data superficie per collegare due punti assegnati su di essa

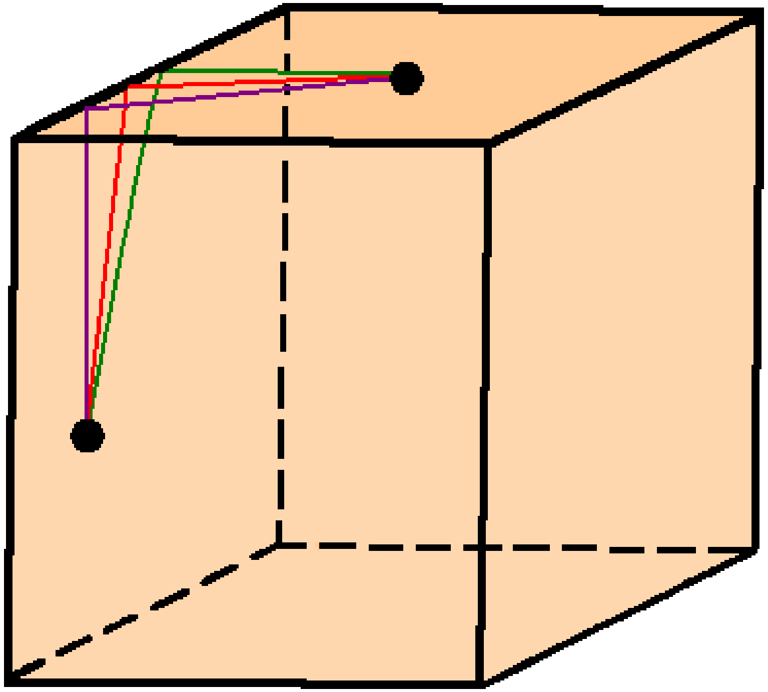
Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi di geometria

Fra tutti i percorsi che congiungono due punti assegnati sulla superficie di un cubo, determinare quello che ha lunghezza minima

Ad esempio, dei tre percorsi proposti in figura il più corto è quello di colore ……… rosso



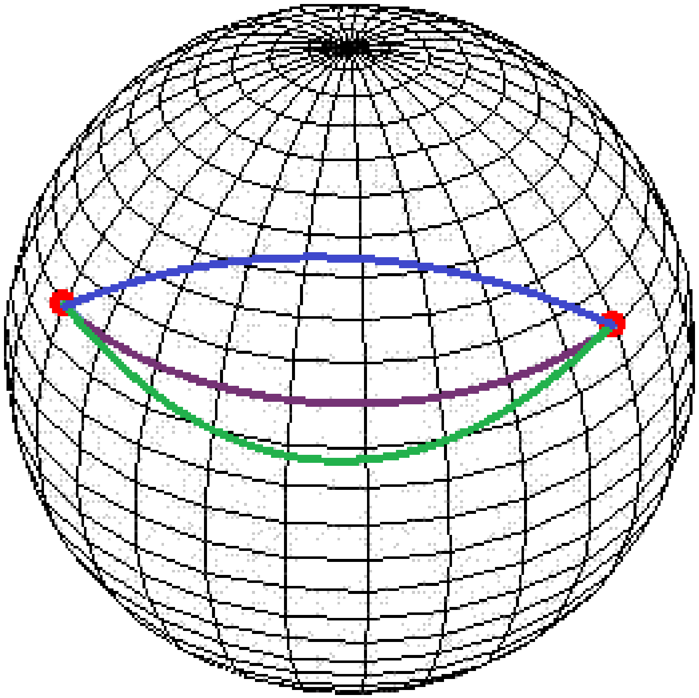


Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi di geometria

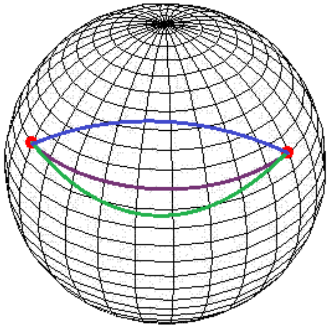
Fra tutti i percorsi che congiungono due punti della superficie di una sfera, determinare quello che ha lunghezza minima

Ad esempio, dei tre percorsi proposti in figura è più corto quello verde, quello viola o quello blu?

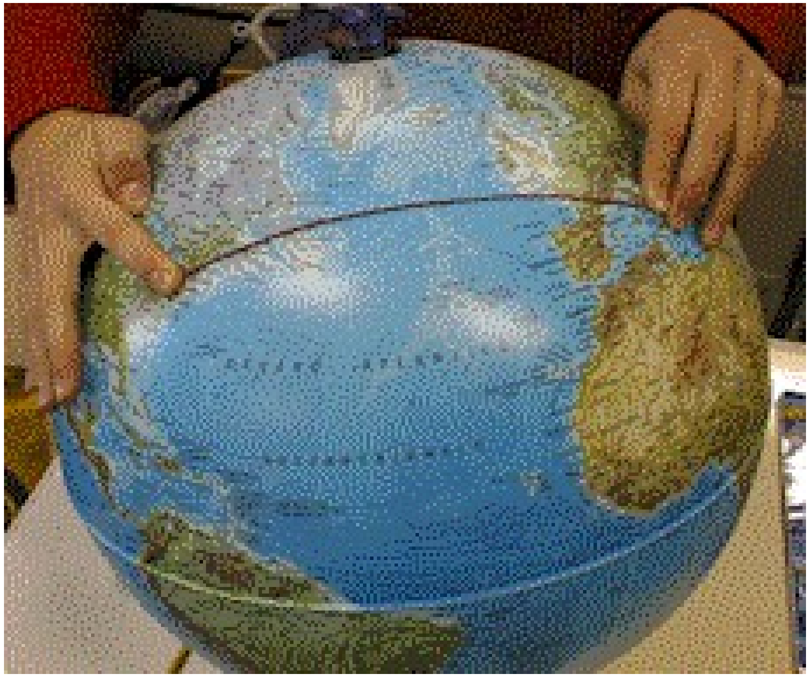


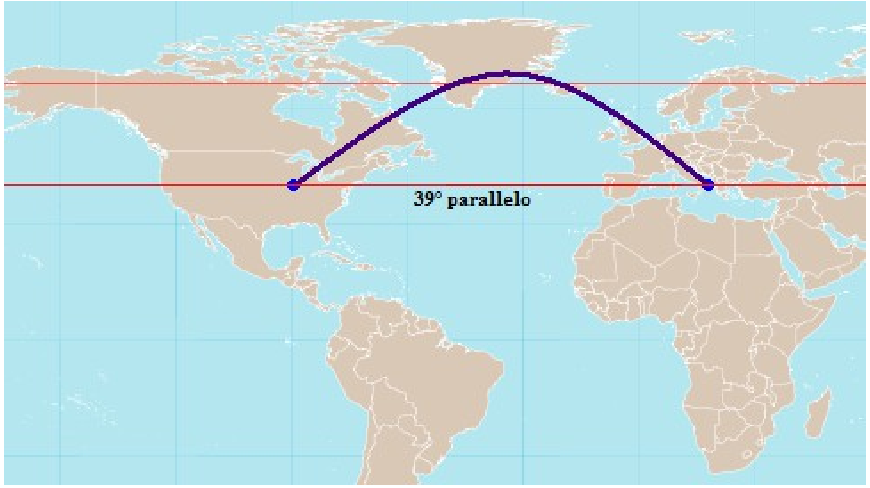
Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi di geometria



Basta un elastico per risolvere il problema



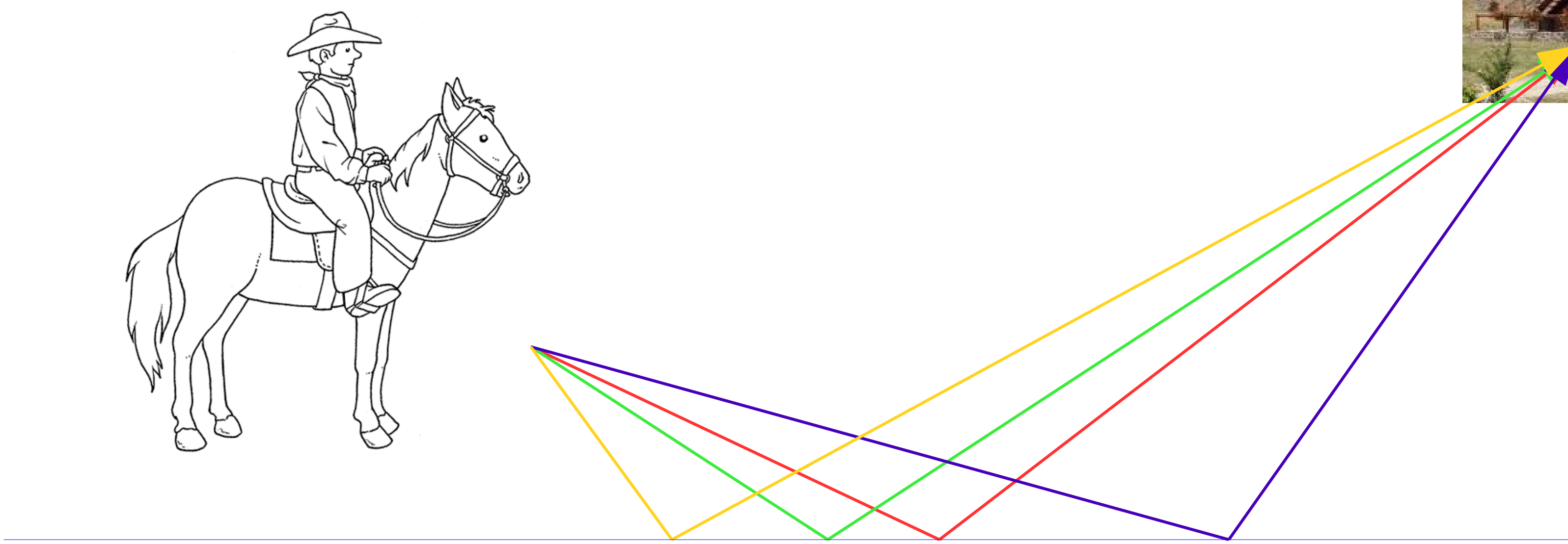


Le ***geodetiche*** sulla superficie terrestre sono i ***cerchi massimi***

Per andare **da Lecce a Indianapolis,** entrambe sul 39° parallelo Nord, un aereo non deve volare lungo il parallelo ma passare oltre il Circolo Polare Artico (66° parallelo)

Cosimo De Mitri

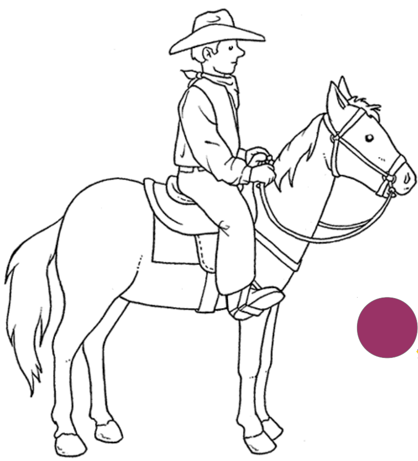
Il cowboy a cavallo



giallo, verde, rosso, blu

qual è il percorso più corto?

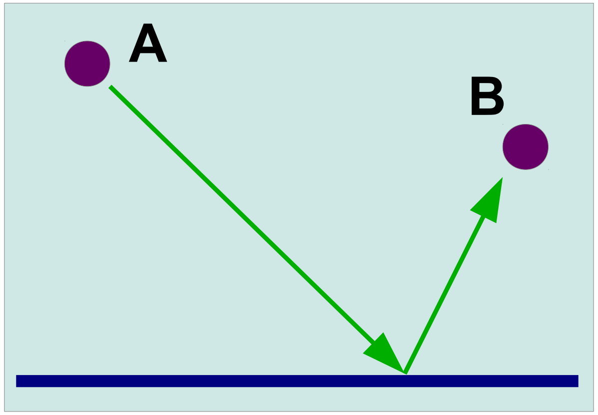
Il cowboy a cavallo

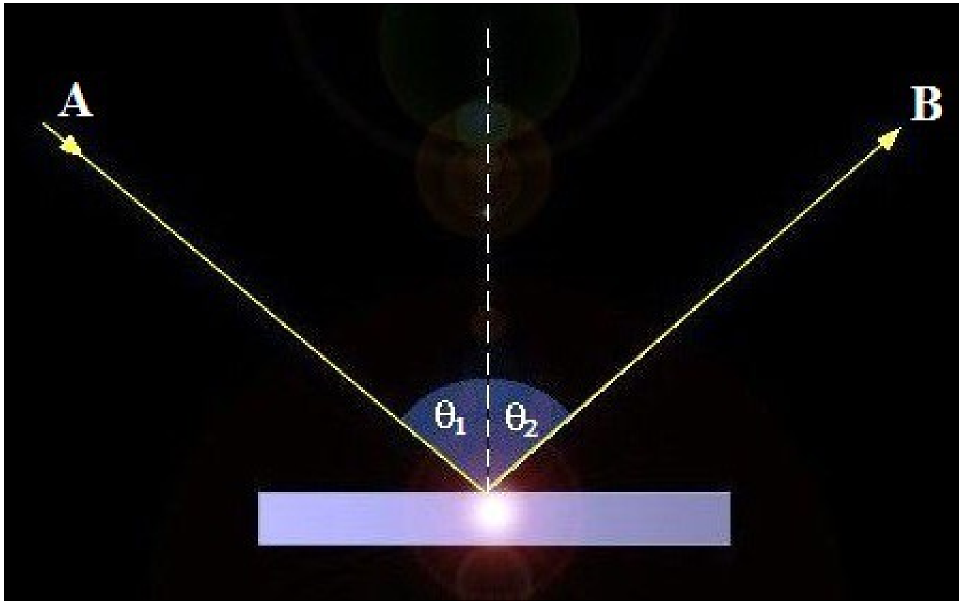


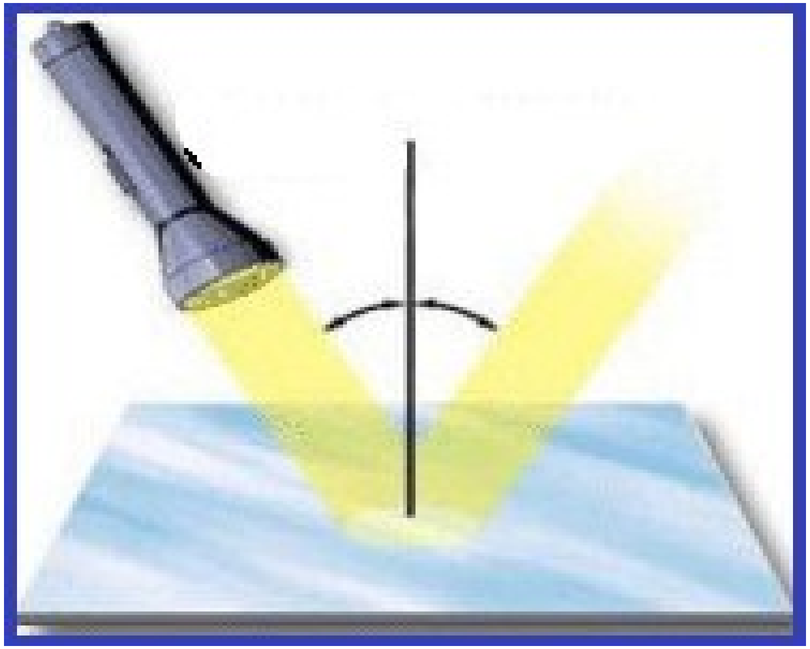
Il percorso più corto
è quello di colore verde

La Natura è la più brava risolutrice dei problemi di massimo e minimo

Nel I secolo d.C. **Erone di Alessandria** dimostra che **la via più breve** per passare da un punto *A* ad un altro punto *B* dopo un rimbalzo su una superficie che fa da sponda è esattamente quella che sceglie il raggio luminoso nel fenomeno della **riflessione**







Cosimo De Mitri

La Natura è la più brava risolutrice dei problemi di massimo e minimo

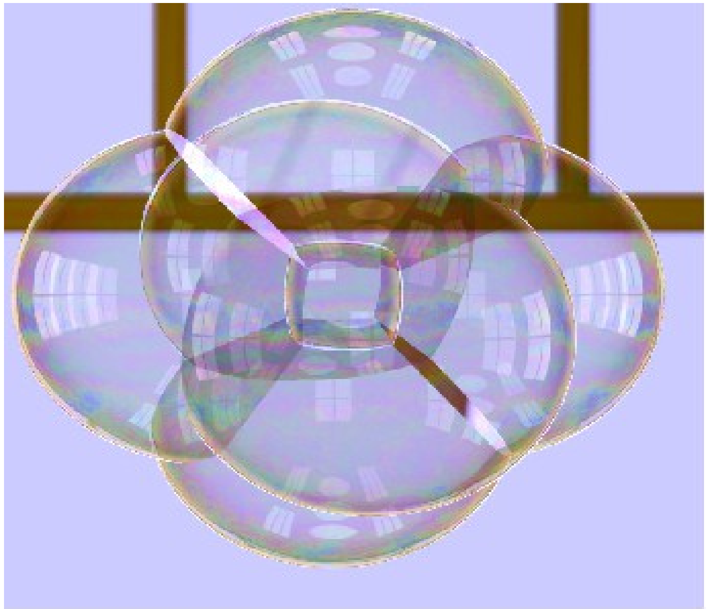
Nell'alveare le celle hanno una forma tale da massimizzare gli spazi riducendo al minimo il consumo di cera

La Natura è la più brava risolutrice dei problemi di massimo e minimo

Le foglie delle piante si dispongono lungo il fusto assumendo una posizione tale da massimizzare l'esposizione alla luce, all'aria e all'acqua piovana

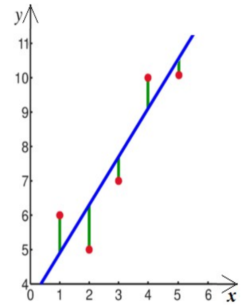
La più brava risolutrice dei problemi di massimo e minimo è la Natura

Le bolle di sapone assumono forme tali da rendere **minima** la tensione superficiale



Cosimo De Mitri

La retta dei minimi quadrati



Ad esempio, dopo che sono stati assegnati i punteggi al test d'ingresso alla Facoltà di Scienze, si vuole stabilire se esiste una *correlazione* fra il punteggio del test e il voto di maturità.

Ogni studente viene rappresentato da un punto le cui coordinate sono il voto di maturità e il punteggio del test. Se la retta dei minimi quadrati si adatta bene alla nuvola dei dati, si conclude che le due valutazioni sono in sintonia.

La retta dei minimi quadrati è chiamata anche *retta di regressione*.
Nel XIX alcuni biologi accertarono mediante un'indagine statistica che la progenie di individui eccezionali (ad esempio troppo alti o troppo bassi) tende a presentare caratteristiche meno accentuate di quelle dei genitori. Francis Galton (cugino di Darwin) studiò tale fenomeno, applicandovi il termine di *regressione* verso la media.

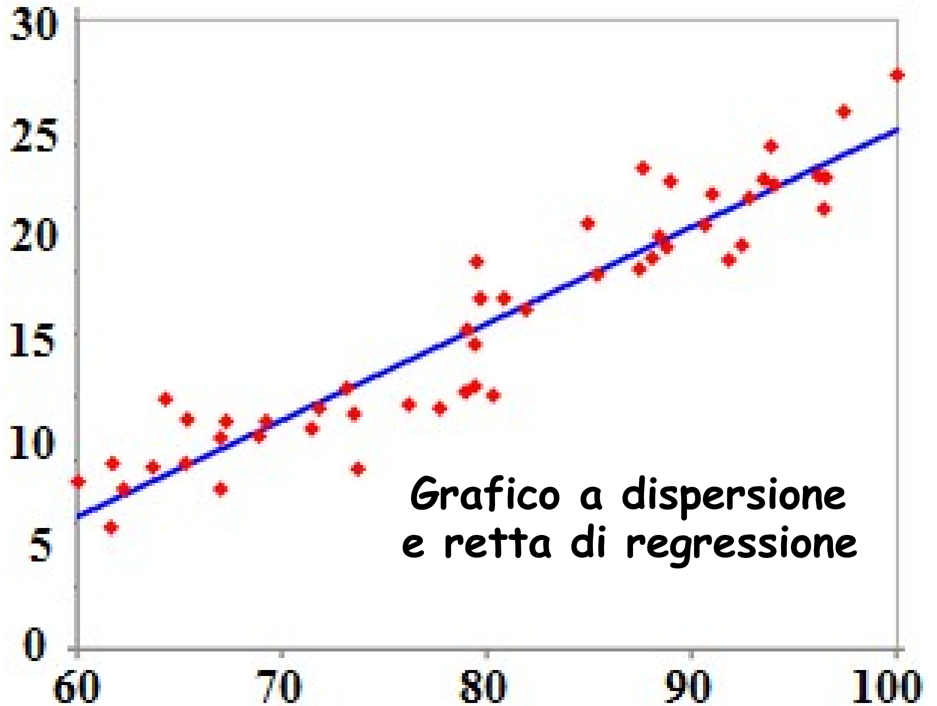


Grafico a dispersione e retta di regressione

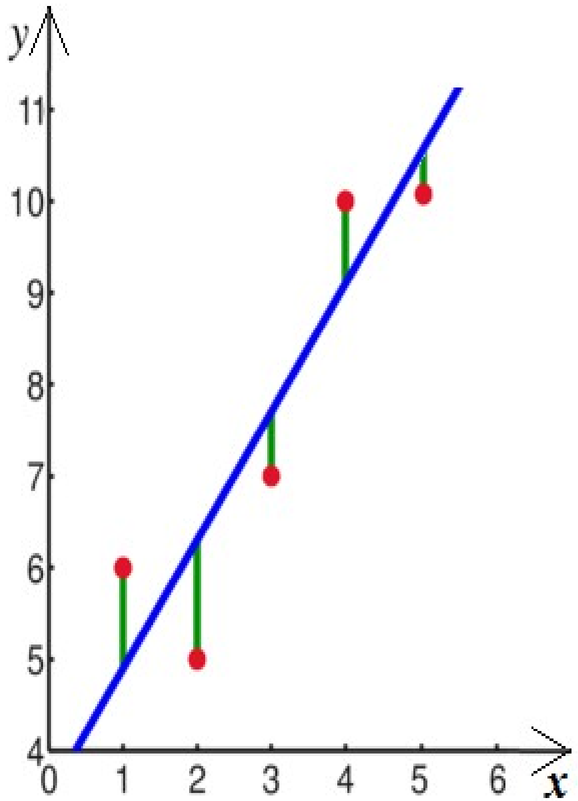
L'ottimizzazione nella storia

La retta dei minimi quadrati

Nel secolo XIX si sviluppa anche il metodo dei minimi quadrati per il calcolo della retta che meglio di ogni altra si adatta a rappresentare una nuvola di punti assegnati nel piano.

L'idea è quella di minimizzare la somma dei quadrati delle distanze verticali punto-retta.

$$S(m, q) = \sum_{i=1}^{n} (mx_i + q - y_i)^2$$



La prima pubblicazione in cui si fa uso del metodo dei minimi quadrati è datata 1805, a nome di Adrien-Marie Legendre.

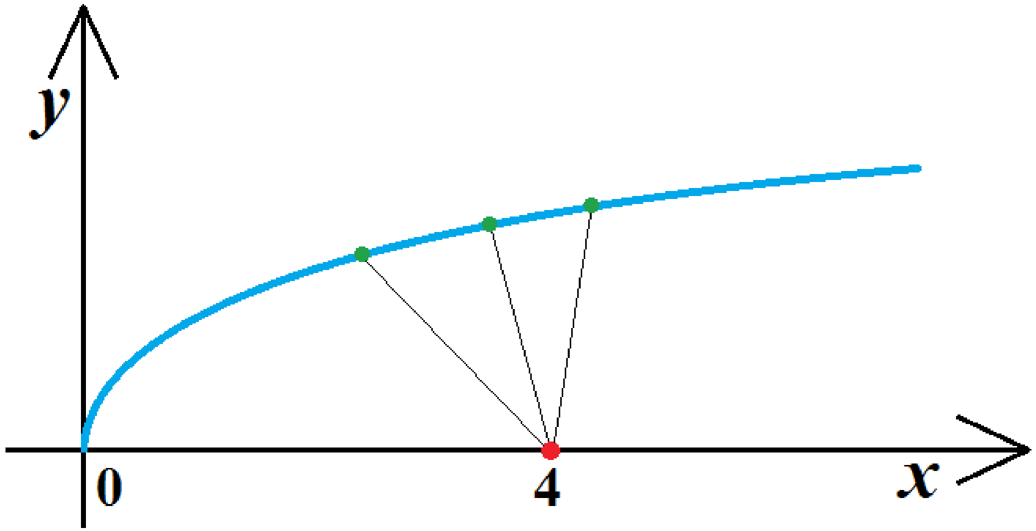
Carl Friedrich Gauss elabora indipendentemente lo stesso metodo e pubblica le sue ricerche nel 1809.

Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi assegnati all'Esame di Maturità Scientifica

Si trovi il punto della curva $y=\sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate (4,0).

[Quesito 2 - Anno 2011]



$$P = (x, \sqrt{x}\,)$$

$$A = (4, 0)$$

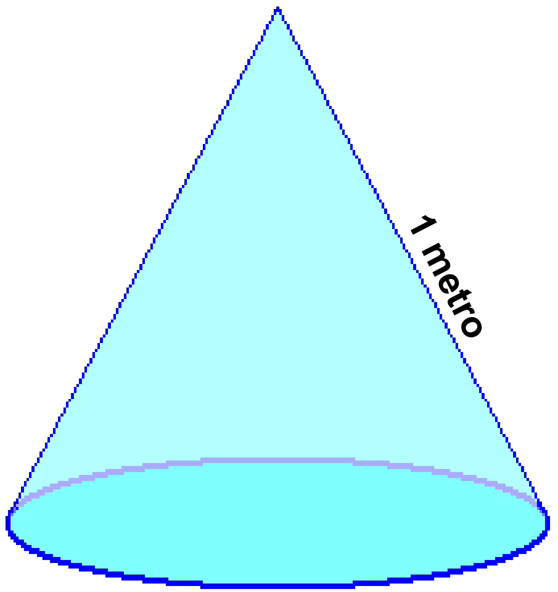
$$d(P, A) = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2}$$

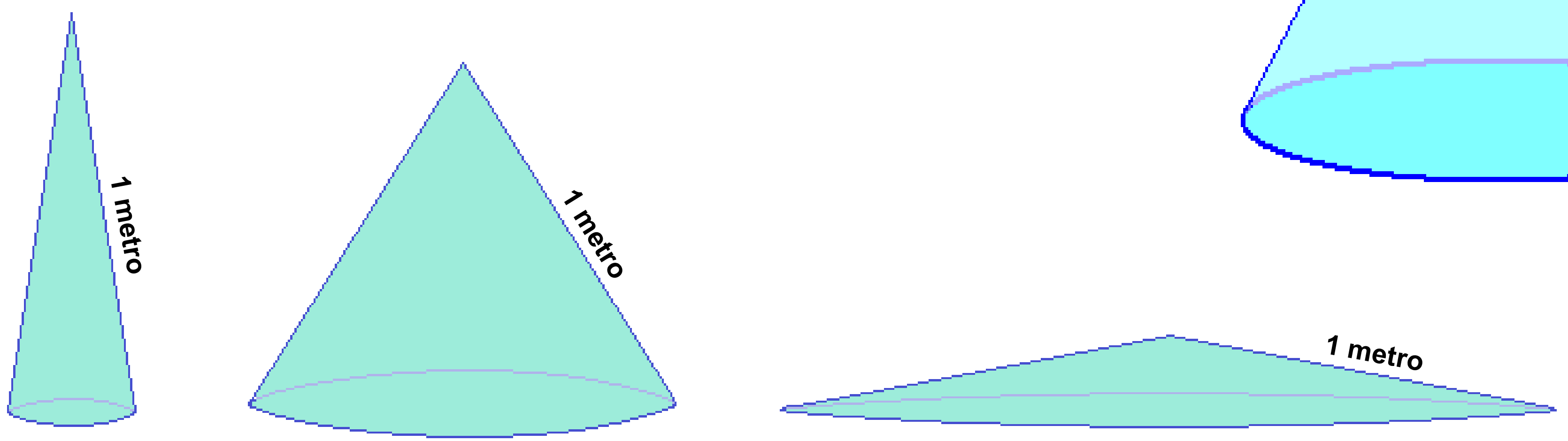
Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi assegnati all'Esame di Maturità Scientifica

Qual è la capacità massima, in litri, di un cono di apotema 1 metro?

[Quesito 4 - Anno 2012]

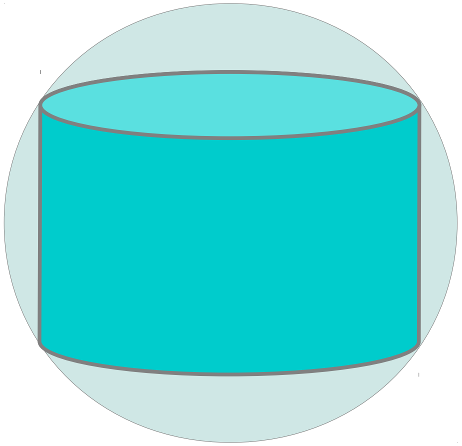




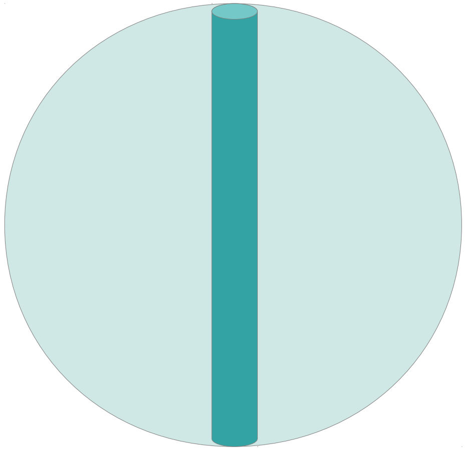
Esempi di problemi di ottimizzazione

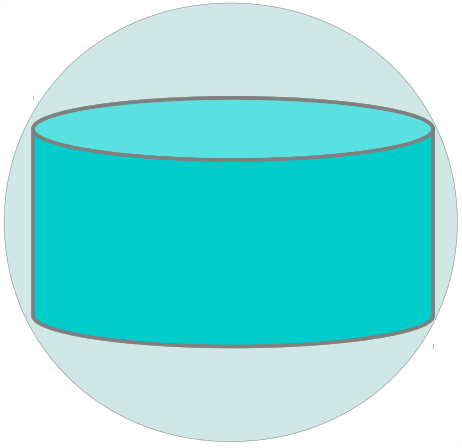
Problemi assegnati all'Esame di Maturità Scientifica

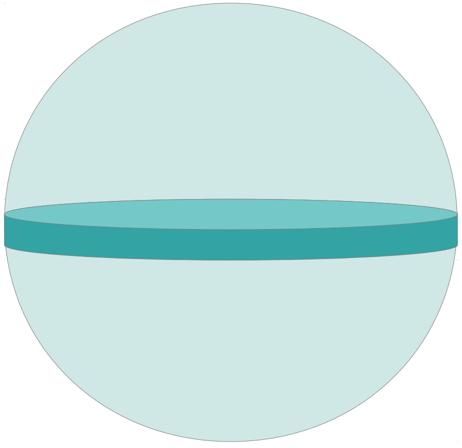
Un serbatoio ha la capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Qual è la capacità in litri del serbatoio?



[Quesito 1 - Anno 2011]





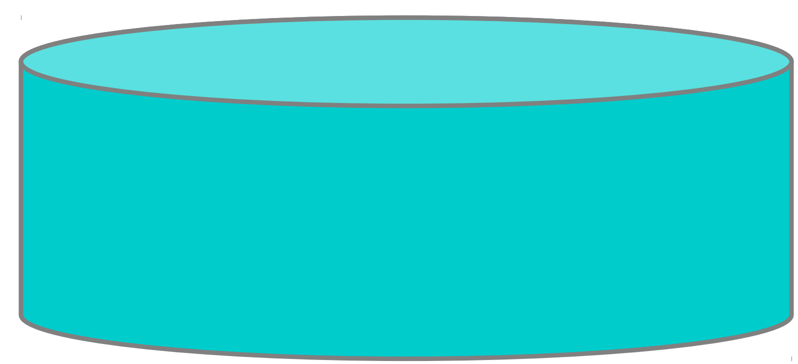


Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi assegnati all'Esame di Maturità Scientifica

Fra tutte le casseruole di forma cilindrica aventi la stessa superficie S (quella laterale più il fondo), qual è quella di volume massimo?

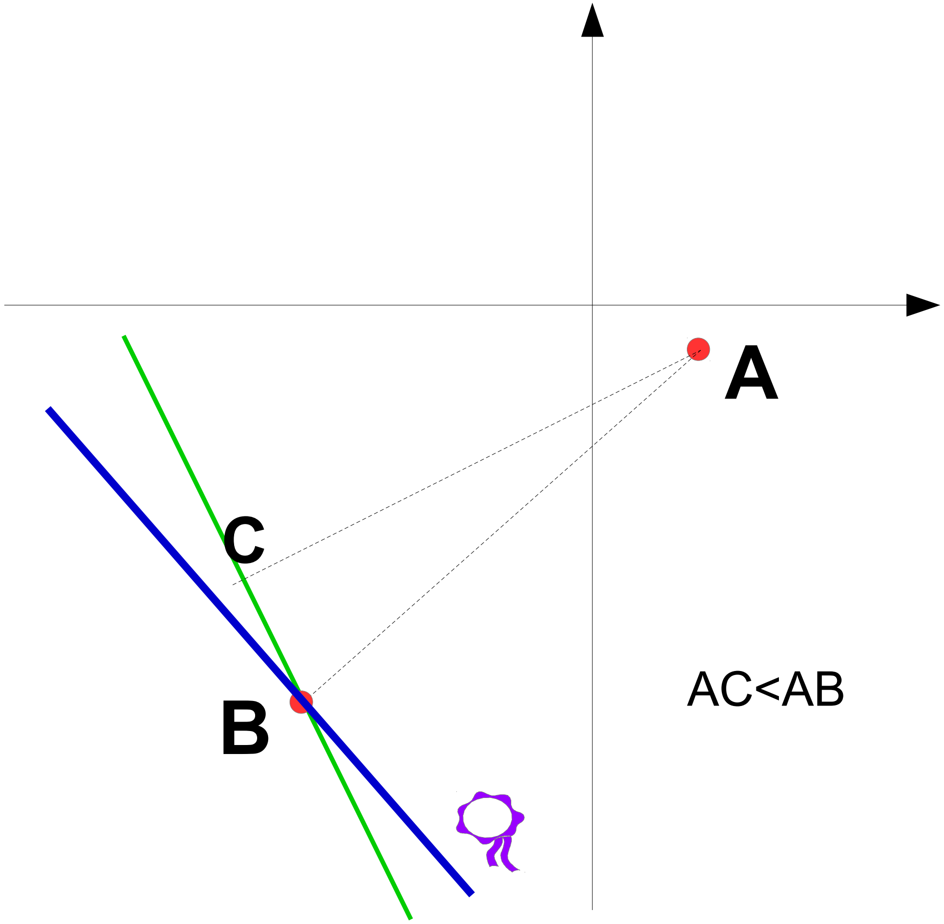
[Quesito 3 - Anno 2008]



Esempi di problemi di ottimizzazione

Problemi assegnati all'Esame di Maturità Scientifica

Si considerino, nel piano cartesiano, i punti A(2,-1) e B(-6,-8). Si determini l'equazione della retta passante per B ed avente distanza massima da A.



[Quesito 3 - Anno 2013]

La soluzione è la retta per B perpendicolare alla retta AB