Un approccio alla relatività ristretta

Simone Zuccher

10 marzo 2024

Indice

Queste paginette sono semplici riflessioni personali scaturite da due letture, un po' datate ma straordinariamente cristalline: *Readable Relativity* di Clement V. Durrell (in Italiano *La relatività con le quattro operazioni*) e *Corso di Relatività Ristretta*[1] di Bruno Touschek. La prima versione di queste note risale all'autunno 2014, successivamente sono state aggiunte varie parti tra cui (in appendice) il calcolo della forza relativistica e del suo lavoro. Dal momento che in relatività "ristretta" si parla di sistemi di riferimento in moto non accelerato, si intuisce che essa è un caso "speciale" della "relatività generale", che si occupa di sistemi in moto accelerato.

Noi ci limitiamo all'analisi delle conseguenze dei due semplici postulati della relatività ristretta. Esse sono del tutto nuove rispetto alla fisica di Newton e, spesso, contro-intuitive.

1 Postulati della relatività ristretta

La relatività ristretta si basa, formalmente, solo su due postulati:

1. le leggi della fisica (tutta: meccanica, elettromagnetismo e ottica) sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali (ossia quelli in moto *non accelerato*);
2. la luce si propaga, nel vuoto, a velocità costante c indipendentemente dallo stato di moto della sorgente che l'ha emessa o del sistema di riferimento in cui la si osserva.

[1] https://zucchers.github.io/downloads/RelatiTou.pdf

2 Trasformazioni di Galilei

Prima di avventurarci nella relatività "ristretta", rivediamo brevemente alcuni concetti base della relatività "classica".

Cosideriamo due sistemi di riferimento inerziali in moto relativo uno rispetto all'altro, come quelli riportati in figura 1. Per semplicità limitiamo l'analisi al caso in cui gli assi sono tutti paralleli tra loro e il sistema S' si muove, rispetto al sistema S, con velocità costante $v > 0$ parallelamente all'asse x. Per quanto riguarda l'origine dei tempi, supponiamo che a $t = t' = 0$ le due origini O e O' coincidano.

Il sistema S vede il sistema S' allontanarsi con velocità v nella direzione positiva dell'asse x mentre, evidentemente, il sistema S' vede il sistema S allontanarsi con velocità in modulo pari a v ma diretta in verso opposto rispetto alla direzione del semiasse positivo delle x', ossia con velocità $-v$. Chiamiamo questo fatto *postulato di reciprocità*.

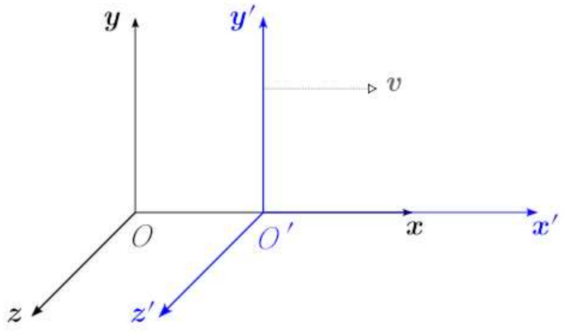

Figura 1: Sistemi di riferimento inerziali con assi paralleli tra loro e in moto relativo l'uno rispetto all'altro con velocità v lungo l'asse x. Gli orologi sono stati sincronizzati in modo che a $t = t' = 0$ le due origini O e O' coincidano.

Un evento, che avviene in una certa posizione dello spazio e in un determinato istante di tempo, può essere descritto sia nel sistema S, utilizzando le coordinate x, y, z, t, sia nel sistema S', utilizzando le coordinate x', y', z', t'. Con riferimento alla figura 1, siccome al tempo $t = 0$ le origini dei due sistemi di riferimento coincidono, nell'intervallo di tempo $\Delta t = t - 0$ il sistema S' percorre lo spazio vt, pertanto la coordinata x' di un evento, rispetto al sistema S', si ottiene sottraendo alla coordinata x la distanza vt. Tutte le altre coordinate rimangono invariate:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Siccome gli assi y e z non subiscono trasformazioni, d'ora in avanti ci limiteremo alle trasformazioni spaziali solo in x e nel tempo:

$$x' = x - vt \quad \text{e} \quad t' = t. \tag{2.1}$$

Se si esprimono le coordinate del sistema S in funzione di quelle di O' si ottiene

$$x = x' + vt' \quad \text{e} \quad t = t'. \tag{2.2}$$

Si osservi che le relazioni (2.2) hanno la stessa forma di quelle della (2.1) dove v è stata rimpiazzata da $-v$. Possiamo quindi formalmente definire il *postulato di reciprocità*: l'inversione della trasformazione (2.1) dal sistema S al sistema S' ($S \to S'$) è identica alla trasformazione (2.2) dal sistema S' al sistema S ($S' \to S$) con la velocità relativa v rimpiazzata da $-v$.

2.1 Proprietà delle trasformazioni di Galilei

Le trasformazioni di Galilei mantengono inalterate sia le distanze spaziali sia gli intervalli di tempo. Per gli intervalli temporali è ovvio ($t' = t$). Per le distanze spaziali consideriamo nel sistema S una barra di lunghezza L, allineata lungo l'asse x, i cui estremi si trovino nei punti A e B, in modo che $L = x_B - x_A$, essendo $x_B > x_A$. La lunghezza L' della barra nel sistema S' risulta essere

$$L' = x'_B - x'_A = (x_B - vt) - (x_A - vt) = x_B - x_A = L.$$

Un'altra proprietà delle trasformazioni di Galilei è che le velocità si sommano algebricamente, tenendo conto dei segni (se intese come vettori si parla di somma vettoriale). Per dimostralo, consideriamo un oggetto che, nel sistema di riferimento S, si muove con velocità $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, dove u_x è la componente del vettore $\vec{u}$ in direzione x, u_y in direzione y, e così via. Utilizzando le trasformazioni di Galilei (2.1), e ricordando che $u_x = \Delta x/\Delta t$, si ha

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} - v = u_x - v.$$

Per le direzioni y e z si ha

$$u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = u_y \quad \text{e} \quad u'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = u_z,$$

pertanto le velocità si trasformano, dal sistema S al sistema S', semplicemente così:

$$u'_x = u_x - v, \quad u'_y = u_y, \quad u'_z = u_z.$$

Questo risultato è dovuto non solo al fatto che le lunghezze degli oggetti misurate nei sistemi S oppure S' rimangono inalterate, ma soprattutto al fatto che nelle trasformazioni galileiane c'è un unico tempo ($t = t'$), assoluto e uguale per tutti i sistemi di riferimento.

Le trasformazioni inverse $S' \to S$ si ottengono applicando il principio di reciprocità:

$$u_x = u'_x + v, \quad u_y = u'_y, \quad u_z = u'_z.$$

3 Trasformazioni di Lorentz

In questa sezione ricaviamo le trasformazioni di Lorentz come estensione delle trasformazioni di Galilei al caso v confrontabile con c, facendole discendere dai postulati di Einstein sulla relatività ristretta.

Preliminarmente, osserviamo che la relazione che lega le coordinate di un generico sistema di riferimento S' a quelle di un altro sistema di riferimento S *deve necessariamente essere lineare*. Questo è dovuto al nostro concetto di *misura*. Se, infatti, l'unità di misura delle lunghezze nel sistema S è ℓ e nel sistema S' è ℓ', allora due barre lunghe l'una il doppio dell'altra in S dovranno risultare comunque lunghe l'una il doppio dell'altra anche in S'.

Prendendo spunto dalle trasformazioni di Galilei, tentiamo di estenderle tenendo conto della linearità di questo legame. Per le lunghezze nella direzione di v ipotizziamo che valga la relazione

$$x' = \gamma(x - vt),$$

dove γ è *adimensionale* (in quanto x', x e vt hanno le dimensioni di lunghezze) e *costante* e in quanto se dipendesse da x o da t il legame non sarebbe più lineare. Pertanto, γ può dipendere, al massimo, da v e c, che sono entrambe costanti (S' si muove a velocità costante v, non accelera in quanto il sistema di riferimento è inerziale). Come ultima osservazione, se la velocità v è piccola rispetto a quella della luce, dobbiamo ritrovare le trasformazioni di Galilei, pertanto $\gamma \to 1$ se $v << c$. Questo significa che se gamma ha sempre lo stesso segno, questo deve essere *positivo*.

Per quanto riguarda la dipendenza di t' da x e t, supponendo che anche questo legame debba essere *lineare*, introduciamo due costanti reali a e b tali che

$$t' = at + bx,$$

dove a è adimensionale e b ha le dimensioni dell'inverso di una velocità. Osserviamo che il coefficiente a deve essere *positivo*. Infatti, pensiamo ad un orologio posto nel sistema S in una certa posizione spaziale fissa $\bar{x}$ che scandisce un intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ tra due eventi successivi (x_1, t_1) e (x_2, t_2) con $t_2 > t_1$ e $x_2 = x_1 = \bar{x}$. Siccome ipotizziamo $t' = at+bx$, si ha $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = a(t_2 - t_1) + b(x_2 - x_1) = a\Delta t$. Se assumiamo che l'intervallo di tempo scandito da un orologio debba *aumentare* indipendentemente dal sistema di riferimento in cui lo si misura (il secondo principio della termodinamica, per il primo postulato della relatività ristretta, è certamente vero), ossia che gli intervalli di tempo Δt e $\Delta t'$ abbiano lo stesso segno, allora a deve *necessariamente essere positivo*.

Utilizziamo ora il secondo postulato della relatività ristretta e consideriamo un impulso luminoso emesso al tempo $t = t' = 0$ nel punto in cui le due origini O e O' coincidono. Il fronte d'onda di questo impulso luminoso è visto dal sistema S, al tempo t, come una superficie sferica di raggio $r = ct$, pertanto

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2. \tag{3.3}$$

D'altra parte, siccome per il secondo postulato la velocità della luce è indipendente sia dal sistema di riferimento sia dal moto della sorgente luminosa, lo stesso fronte d'onda dell'impulso luminoso viene visto dal sistema S', al tempo t', come una superficie sferica di raggio $r' = ct'$, pertanto

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2. \tag{3.4}$$

Sostituendo $x' = \gamma(x - vt)$, $y' = y$, $z' = z$ e $t' = at + bx$ nell'equazione (3.4) si ha

$$\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2(at + bx)^2,$$

se da questa viene sottratta l'equazione (3.3) si ottiene la relazione

$$\gamma^2x^2 - 2\gamma^2vxt + \gamma^2v^2t^2 - x^2 = c^2\left[(a^2-1)t^2 + 2abxt + b^2x^2\right],$$

da cui, raccogliendo le potenze di x^2, xt e t^2:

$$(\gamma^2 - 1 - c^2b^2)x^2 - 2(\gamma^2v + abc^2)xt + (\gamma^2v^2 - c^2a^2 + c^2)t^2 = 0.$$

Affinché questa equazione, nelle incognite x e t, sia vera per ogni coppia (x, t), devono essere simultaneamente nulli i coefficienti di x^2, xt e t^2, pertanto

$$\begin{cases} \gamma^2 - 1 - c^2b^2 = 0 \\ \gamma^2v + abc^2 = 0 \\ \gamma^2v^2 - c^2a^2 + c^2 = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Dalla prima equazione si ricava subito $b^2 = \dfrac{\gamma^2-1}{c^2}$, il che implica che $\gamma^2 - 1$ deve essere positivo o nullo e quindi, essendo $\gamma > 0$, deve essere $\gamma \geq 1$. Dall'ultima equazione si ottiene $a^2 = \dfrac{\gamma^2v^2}{c^2} + 1$, per cui anche $a \geq 1$. Dalla seconda equazione, spostando a destra il termine abc^2, di ottiene $\gamma^2v = -abc^2$. Ricordando che $a > 0$ e $c^2 > 0$, allora si conclude che v e b devono essere *discordi*, ossia:

$$\begin{aligned} v > 0 &\implies b < 0 \\ v < 0 &\implies b > 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Sotto le ipotesi (3.6) i due membri dell'equazione $\gamma^2v = -abc^2$ sono concordi e possiamo quindi prendere il quadrato dell'equazione ottenendo un'equazione del tutto equivalente $\gamma^2v = -abc^2 \iff (\gamma^2v)^2 = (-abc^2)^2 \iff \gamma^4v^2 = a^2b^2c^4$. Sostituendo in questa equazione le espressioni di a^2 e b^2 precedentemente trovate si ottiene

$$\gamma^4v^2 = \left(\frac{\gamma^2v^2}{c^2} + 1\right)\left(\frac{\gamma^2-1}{c^2}\right)c^4$$

da cui, sviluppando i calcoli, $\gamma^4v^2 = \gamma^4v^2 + \gamma^2c^2 - \gamma^2v^2 - c^2 \iff \gamma^2(c^2 - v^2) = c^2$. Dividendo tutto per c^2 si ha $\gamma^2\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right) = 1$, da cui estraendo la radice quadrata e tenendo solo la soluzione positiva (per v "piccola" rispetto a c si devono ritrovare le trasformazioni di Galilei, per le quali $\gamma = 1 > 0$) si ha

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{3.7}$$

Si osservi che, come ci si aspettava, questa costante dipende unicamente da v e c, è maggiore di 1 (se $v \neq 0$), ed è adimensionale. Inoltre, affinché γ esista, deve essere $|v| < c$, ossia c rappresenta un "limite invalicabile". Nota γ si possono ricavare i valori di a e b:

$$a^2 = \frac{\gamma^2v^2}{c^2} + 1 = \frac{v^2}{c^2\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)} + 1 = \frac{v^2}{c^2 - v^2} + 1 = \frac{c^2}{c^2 - v^2}$$

da cui, dividendo numeratore e denominatore per c^2 e tenendo solo la soluzione positiva (vedi condizioni (3.6)),

$$a^2 = \frac{1}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} = \gamma^2 \implies a = \pm\gamma \implies a = \gamma.$$

Come previsto, a è adimensionale essendo γ adimensionale. Sostitendo γ nell'espressione di b^2 si ha

$$b^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{c^2} = \frac{\dfrac{1}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} - 1}{c^2} = \frac{1}{c^2 - v^2} - \frac{1}{c^2} = \frac{v^2}{c^2(c^2 - v^2)}$$

da cui, dividendo numeratore e denominatore per c^2, e ricordando che a seguito delle condizioni (3.6) b deve avere *segno opposto* a v, si ha

$$b^2 = \frac{\dfrac{v^2}{c^2}}{c^2}\frac{1}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} = \frac{\gamma^2v^2}{c^4} \implies b = \pm\frac{\gamma v}{c^2} \implies b = -\frac{\gamma v}{c^2}.$$

Si osservi che b ha, come previsto, le dimensioni del reciproco di una velocità ed il suo segno è sempre discorde con quello di v. Avendo determinato a e b, la trasformazione per il tempo è $t' = \gamma t - \dfrac{\gamma v}{c^2}x = \gamma\left(t - \dfrac{vx}{c^2}\right)$ e le trasformazioni di Lorentz $S \to S'$ per i sistemi riportati in figura 1 sono quindi

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \quad (3.8)$$

con γ definita dalla (3.7).

Ricapitolando, queste trasformazioni sono state ricavate sotto poche e semplici ipotesi:

- la linearità delle trasformazioni $S \to S'$
- il secondo postulato della relatività ristretta
- il secondo principio della termodinamica (il tempo deve avanzare in entrambi i sistemi di riferimento).

Le trasformazioni (3.8) permettono il passaggio $S \to S'$. Invertendole si ricavano le trasformazioni $S' \to S$: $x' = \gamma(x - vt) \implies x = \frac{x'}{\gamma} + vt$, sostituendo in $t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$ si ha $t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}\left(\frac{x'}{\gamma} + vt\right)\right) = \gamma t - \frac{vx'}{c^2} - \gamma\frac{v^2}{c^2}t = \gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t - \frac{vx'}{c^2}$. Dopo aver osservato che $\gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma}$, dalla precedente equazione si ha

$$t' = \frac{t}{\gamma} - \frac{vx'}{c^2} \implies t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right).$$

Sostituendo l'espressione di t appena trovata in $x = \frac{x'}{\gamma} + vt$ si ottiene $x = \frac{x'}{\gamma} + vt = \frac{x'}{\gamma} + v\gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) = \frac{x'}{\gamma} + v\gamma t' + \frac{v^2\gamma x'}{c^2} = \gamma\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2}\right)x' + v\gamma t'$. Dopo aver osservato che

$$\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} = 1,$$

si ha

$$x = \gamma\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2}\right)x' + v\gamma t' \implies x = \gamma(x' + vt').$$

In conclusione, le trasformazioni $S' \to S$ sono

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right). \quad (3.9)$$

Si osservi che le trasformazioni (3.9) soddisfano il *principio di reciprocità* in quanto, formalmente, possono essere ottenute dalle (3.8) scambiando semplicemente le variabili con gli apici con quelle senza apici e rimpiazzando v con $-v$.

Come ultima osservazione, nel caso $v << c$ il rapporto v/c è molto minore di uno e quindi $v^2/c^2 \approx 0$, da cui $\gamma \approx 1$. Pertanto, nel limite $v << c$ le trasformazioni di Lorentz si riducono alle ben note trasformazioni di Galilei.

3.1 La simultaneità relativistica

Le trasformazioni di Lorentz contengono una serie di novità rispetto alle trasformazioni di Galilei. La prima è che il tempo non è più assoluto e, quindi, cambia il concetto di "simultaneità". Consideriamo nel sistema S due eventi (x_1, t_1) e (x_2, t_2) che avvengono nello stesso istante, $t_1 = t_2$. A seguito delle trasformazioni di Lorentz (3.8) si ha

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma\left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{vx_1}{c^2}\right) = -\gamma\frac{v}{c^2}\Delta x.$$

Pertanto,

$$\Delta t' = -\gamma\frac{v}{c^2}\Delta x,$$

ossia due eventi "simultanei" in S, in generale, *non risultano "simultanei"* in S'. Essi sono simultanei anche in S' solo se, in S, avvengono nella stessa posizione spaziale ($x_1 = x_2 \implies \Delta x = 0 \implies \Delta t' = 0$).

3.2 La dilatazione degli intervalli di tempo

Consideriamo un orologio nel sistema S, posto in una posizione fissa $x = \bar{x}$, e un intervallo di tempo da esso scandito, $\Delta t = t_2 - t_1$. Applicando le trasformazioni di Lorentz (3.8) si ottiene l'intervallo di tempo misurato nel sistema S':

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma\left(t_2 - \frac{v\bar{x}}{c^2}\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{v\bar{x}}{c^2}\right) = \gamma\Delta t.$$

Siccome $\gamma > 1$, $\Delta t' = \gamma\Delta t \iff \Delta t' > \Delta t$, ossia gli intervalli di tempo visti nel sistema S' risultano "dilatati" rispetto a quanto avviene nel sistema S in cui l'orologio è fermo. Viceversa, mettendo un orologio in una posizione fissa $x' = \bar{x}'$ nel sistema di riferimento S', un intervallo di tempo $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ viene visto "dilatato" dal sistema S. Infatti, utilizzando le trasformazioni di Lorentz inverse (3.9), si ha

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma\left(t'_2 + \frac{v\bar{x}'}{c^2}\right) - \gamma\left(t'_1 + \frac{v\bar{x}'}{c^2}\right) = \gamma\Delta t'.$$

La situazione è quindi del tutto simmetrica: gli intervalli di tempo scanditi da un orologio posto, in un certo sistema di riferimento, in una *posizione fissa* vengono visti "dilatati" dall'altro sistema di riferimento.

Si osservi che il più piccolo intervallo di tempo è viene misurato nel sistema di riferimento per il quale i due eventi accadono nella stessa posizione. Chiamiamo questo intervallo di tempo *tempo proprio* e lo indichiamo con Δt_0.

Una conseguenza importante è che *un orologio in moto è sempre in ritardo* rispetto ad un osservatore non solidale ad esso. Infatti, se l'osservatore è fermo nel sistema S e l'orologio è fermo nel sistema S', ma il sistema S' si muove a velocità v rispetto ad S, l'intervallo di tempo misurato dall'osservatore è $\Delta t = \gamma\Delta t' \implies \Delta t' = \Delta t/\gamma < \Delta t$, dove $\Delta t'$ è l'intervallo di tempo effettivamente scandito dall'orologio nel sistema S'. Il ritardo visto dall'osservatore fermo è la differenza tra l'intervallo di tempo da lui misurato in S e l'intervallo di tempo scandito dall'orologio in S':

$$\Delta t - \Delta t' = \Delta t - \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right).$$

Purtroppo il calcolo numerico del fattore $1 - 1/\gamma$ porta a numeri molto prossimi allo zero, che potrebbero essere affetti da errori estremamente elevati se non si considera un numero sufficiente di cifre significative. Per diminuire questi errori si può rielaborare il coefficiente $1 - 1/\gamma$ espicitando γ e moltiplicando numeratore e denominatore per $1 + \sqrt{1 - v^2/c^2}$:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\gamma} &= 1 - \sqrt{1 - v^2/c^2} \\ &= \left(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}\right) \frac{1 + \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{v^2/c^2}{1 + \sqrt{1 - v^2/c^2}}, \end{aligned}$$

da cui il ritardo di un orologio in moto visto dall'osservatore fermo

$$\Delta t - \Delta t' = \Delta t \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = \Delta t \frac{v^2/c^2}{1 + \sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.10)$$

3.3 La contrazione delle lunghezze

Come per le trasformazioni di Galilei, consideriamo nel sistema S una barra di lunghezza L ed estremi A e B, allineata lungo l'asse x, in modo che $L = x_B - x_A$, essendo $x_B > x_A$. Ci poniamo il problema di determinare la sua lunghezza L' vista nel sistema S' quando la misurazione viene eseguita in un certo istante di tempo $t' = \bar{t}'$. Si osservi che questa precisazione è fondamentale: chi "misura" si trova nel sistema S' e lo fa misurando istantaneamente sia x'_A che x'_B. Siccome $t'_A = t'_B = \bar{t}'$, allora l'intervallo di tempo $\Delta t' = t'_B - t'_A$ durante il quale viene effettuata la misura in S' è nullo. Utilizzando l'ultima delle trasformazioni di Lorentz (3.8) ed imponendo $\Delta t' = t'_B - t'_A = 0$ si ha

$$t'_B - t'_A = \gamma\left(t_B - \frac{v x_B}{c^2}\right) - \gamma\left(t_A - \frac{v x_A}{c^2}\right) = 0 \implies \Delta t = \frac{v}{c^2} L,$$

dove $\Delta t = t_B - t_A$. Sostituendo questo intervallo di tempo nella prima delle trasformazioni di Lorentz (3.8) si ottiene

$$\begin{aligned} L' = x'_B - x'_A &= \gamma\left(x_B - v t_B\right) - \gamma\left(x_A - v t_A\right) \\ &= \gamma\left((x_B - x_A) - v(t_B - t_A)\right) \\ &= \gamma\left(L - v\Delta t\right) \\ &= \gamma\left(L - \frac{v^2}{c^2} L\right) \\ &= \gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) L, \end{aligned}$$

ma, avendo già osservato che $\gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{\gamma}$, si conclude

$$L' = \frac{L}{\gamma}.$$

Essendo $\gamma > 1$, la barra, che nel sistema S ha lunghezza L, viene vista nel sistema S' (dove la misurazione viene eseguita all'istante $t' = \bar{t}'$) "contratta" di un fattore γ. Senza ripetere i calcoli, si osserva che anche la contrazione delle lunghezze segue il principio di reciprocità, ossia una barra di lunghezza L' posta nel sistema S' viene vista nel sistema S lunga $L = L'/\gamma$, ossia "contratta". Pertanto la massima lunghezza della barra viene misurata in un sistema di riferimento in cui essa è ferma. Chiamiamo questa lunghezza della barra *lunghezza propria* e la indichiamo con L_0.

Se con Δt_i indichiamo l'intervallo di tempo *improprio*, ossia l'intervallo di tempo tra due eventi che non accadono nella stessa posizione spaziale, allora esso è sempre maggiore del tempo proprio Δt_0 misurato nel sistema di riferimento in cui i due eventi accadono nella stessa posizione. Allo stesso modo, se con L_i indichiamo la lunghezza *impropria* di una barra, ossia quella misurata in un sistema di riferimento in moto rispetto ad essa, allora questa lunghezza L_i è sempre minore della lunghezza propria L_0. In formule si ha

$$\Delta t_\mathrm{i} = \gamma \Delta t_0 \quad \text{e} \quad L_\mathrm{i} = \frac{L_0}{\gamma} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta t_\mathrm{i} L_\mathrm{i} = \Delta t_0 L_0.$$

Questo equivale a dire che la velocità relativa tra i due sistemi di riferimento è la stessa per entrambi gli osservatori

$$\Delta t_\mathrm{i} L_\mathrm{i} = \Delta t_0 L_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{L_\mathrm{i}}{\Delta t_0} = \frac{L_0}{\Delta t_\mathrm{i}} = v.$$

3.4 La legge di composizione delle velocità

Consideriamo un oggetto nel sistema di riferimento S che si muove con velocità $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$. Nell'intervallo di tempo Δt esso si sposta di $\Delta x = u_x \Delta t$. Utilizzando le trasformazioni di Lorentz (3.8), possiamo calcolare lo spostamento $\Delta x'$ e l'intervallo di tempo $\Delta t'$ visti dal sistema S', in modo da poter calcolare la velocità $u'_x = \Delta x'/\Delta t'$. Applicando le trasformazioni di Lorentz si ha quindi $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1) = \gamma\left((x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)\right) = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$ e analogamente $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$. Pertanto la velocità lungo x vista in S' è

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - v\Delta t)}{\gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}.$$

Allo stesso modo, per la componente lungo y (e lungo z) si ha

$$\begin{aligned} u'_y &= \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)} \\ &= \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)}. \end{aligned}$$

In definitiva, le trasformazioni delle velocità $S \to S'$ sono

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)}, \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)}.$$

Utilizzando il principio di reciprocità (ossia sostituendo le grandezze con gli apici con quelle senza e viceversa, e rimpiazzando v con $-v$) si hanno le trasformazioni delle velocità $S' \to S$:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}, \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v u'_x}{c^2}\right)}, \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v u'_x}{c^2}\right)}.$$

Si osservi che, se il modulo di u è c, allora il modulo di u' è ancora c, a testimonianza del fatto che c rimane invariata sia che la si misuri in S sia che la si misuri in S'. Ad esempio, se $u_x = c$ e $u_y = u_z = 0$, allora si ottiene

$$u'_x = \frac{c - v}{1 - \frac{vc}{c^2}} = \frac{c - v}{\frac{c - v}{c}} = c, \quad u'_y = u'_z = 0 \qquad \Longrightarrow |u'| = c.$$

Allo stesso modo, $u_x = u_z = 0, u_y = c$ implicano $u'_x = -v, u'_y = c/\gamma, u_z = 0$, ossia $|u'| = c$.

Come ultima osservazione, se $v << c$ si riottengono le trasfomazioni di Galilei per le velocità.

4 Dinamica relativistica

4.1 Ridefinizione della quantità di moto

Se tentiamo di applicare la dinamica classica insieme alle trasformazioni di Lorentz in un caso molto semplice di urto elastico nel quale non intervengano forze esterne, si dimostra che *la quantità di moto "classica" non si conserva*. Si osservi che non stiamo banalmente dicendo che la quantità di moto totale p vista in S è diversa dalla quantità di moto totale p' vista in S' (fatto osservato anche per le trasformazioni di Galilei), ma molto più drammaticamente che viene *violata* la conservazione della quantità di moto totale per un sistema soggetto a risultante delle forze esterne nulla. Evidentemente questo pone un grave problema in quanto la conservazione della quantità di moto è una *legge fisica* che, per il primo postulato della relatività ristretta, deve essere vera in *qualsiasi* sistema di riferimento inerziale. Il problema può essere risolto *ridefinendo* la quantità di moto in senso "relativistico" come

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}. \tag{4.11}$$

Evitiamo di giustificare in modo rigoroso questa espressione di $\vec{p}$ e diamo una semplice spiegazione intuitiva.

Consideriamo una particella di massa m che si muove a velocità $\vec{v}$ rispetto ad un sistema di riferimento ineriziale S. Osservata in S, la velocità "classica" è $\vec{v} = \Delta\vec{x}/\Delta t$, dove $\Delta\vec{x}$ e Δt sono entrambi misurati in S. Essendo la velocità riferita al sistema S, lo spostamento della massa visto da S è certamente $\Delta\vec{x}$, ma l'intervallo di tempo durante il quale viene effettuata questa misura di spostamento dovrebbe essere qualcosa di "intrinseco" alla massa m, e quindi andrebbe "misurato" in un sistema di riferimento in moto con la massa stessa, ossia in un sistema in cui la particella è ferma. Come noto, l'intervallo di tempo misurato in un sistema solidale con la particella in moto è il *tempo proprio* Δt_0. Si osservi che questo intervallo di tempo inizia quando inizia, in S, la misura di $\Delta\vec{x}$ e termina quando termina, in S, la misura di $\Delta\vec{x}$. Possiamo allora introdurre una nuova velocità definita come il rapporto tra lo spazio percorso, misurato nel sistema di riferimento S, ed il tempo misurato nel sistema di riferimento solidale con la massa durante il quale la massa percorre questo spazio:

$$\vec{v}_0 = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t_0}.$$

Dalle trasformazioni di Lorentz sappiamo che $\Delta t = \gamma\Delta t_0 \implies \Delta t_0 = \Delta t/\gamma$, pertanto questa nuova velocità diventa

$$\vec{v}_0 = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t_0} = \gamma\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \gamma\vec{v},$$

utilizzando la quale possiamo ridefinire la quantità di moto come

$$\vec{p} = m\vec{v}_0 = m\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t_0} = m\gamma\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \gamma m\vec{v}.$$

Si osservi che, nel caso $v << c$, la quantità di moto si riduce alla versione classica $\vec{p} = m\vec{v}$.

4.2 Trasformazione della quantità di moto

Torniamo a considerare due sistemi inerziali S e S', dove S' si muove con velocità v rispetto al primo (come al solito lungo l'asse x). Data la ridefinizione della quantità di moto secondo la (4.11), ricaviamo una relazione che lega la quantità di moto misurata in S' alla stessa quantità di moto misurata in S.

Sia $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ la velocità della particella misurata nel sistema di riferimento S e $\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ quella misurata nel sistema S'. Allora

$$p_x = m\frac{\Delta x}{\Delta t_0} = \gamma_u m u_x \qquad \text{e} \qquad p'_x = m\frac{\Delta x'}{\Delta t_0} = \gamma_{u'} m u'_x,$$

con

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \qquad \text{e} \qquad \gamma_{u'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u'^2}{c^2}}},$$

dove $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$ e $u'^2 = u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z$. Riscriviamo $p'_x = m\Delta x'/\Delta t_0$ utilizzando le trasformazioni di Lorentz (3.8) e, per non confonderci, introducendo il simbolo

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}},$$

essendo v la velocità relativa tra S e S':

$$p'_x = m\frac{\Delta x'}{\Delta t_0} = m\frac{\gamma_v(\Delta x - v\Delta t)}{\Delta t_0} = \gamma_v\left(m\frac{\Delta x}{\Delta t_0} - mv\frac{\Delta t}{\Delta t_0}\right).$$

Osserviamo che, grazie alla nuova definizione di quantità di moto attraverso il *tempo proprio*, si ha $m\Delta x/\Delta t_0 = p_x = \gamma_u m u_x$. Inoltre, $\Delta t/\Delta t_0$ è il rapporto tra l'intervallo di tempo misurato nel sistema S in cui la particella viaggia a velocità $\vec{u}$ ed il tempo proprio della particella (nel sistema solidale alla particella), pertanto $\Delta t/\Delta t_0 = \gamma_u$. In definitiva,

$$p'_x = \gamma_v\left(p_x - mv\gamma_u\right) = \gamma_v\gamma_u m(u_x - v).$$

Per quanto riguarda le direzioni y e z si ha

$$p'_y = m\frac{\Delta y'}{\Delta t_0} = m\frac{\Delta y}{\Delta t_0} = p_y.$$

Riassumendo, per le tre componenti della quantità di moto valgono le trasformazioni

$$p'_x = \gamma_v\gamma_u m(u_x - v), \qquad p'_y = p_y, \qquad p'_z = p_z. \tag{4.12}$$

Si osservi che *la quantità di moto totale di un sistema isolato non è un invariante relativistico.*

4.3 L'energia relativistica

Ipotizziamo che la quantità di moto relativistica $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ si conservi in un sistema isolato e guardiamo la sua conservazione dal punto di vista di S' e di S, alla ricerca di eventuali quantità *invarianti*, ossia che non cambino nel passaggio da S' a S.

Figura 2: Urto tra due particelle A e B: inizialmente hanno masse m_A e m_B e velocità u_A e u_B lungo l'asse x, a seguito dell'urto si trasformano in altre due particelle C e D con relative masse e velocità (lungo x).

Consideriamo una situazione del tutto generale, come riportato in figura 2: due particelle A e B, inizialmente aventi masse m_A e m_B e velocità u_A e u_B lungo x, a seguito di un "urto relativistico" si trasformano in altre due particelle C e D con relative masse e velocità (sempre lungo l'asse x).

Le ipotesi sono:

1. la quantità di moto di una particella avente massa m e velocità u è $p = mu/\sqrt{1 - u^2/c^2}$,
2. il sistema di riferimento inerziale S' si muove con velocità v rispetto al sistema di riferimento inerziale S,
3. la quantità di moto totale si conserva in S',
4. la quantità di moto totale si conserva in S,
5. le velocità, nel passaggio $S' \to S$ e viceversa, seguono le leggi di composizione delle velocità relativistiche.

La conservazione della quantità di moto nel sistema S' impone $p'_A + p'_B = p'_C + p'_D$, ossia

$$\frac{m_A u'_A}{\sqrt{1 - \frac{(u'_A)^2}{c^2}}} + \frac{m_B u'_B}{\sqrt{1 - \frac{(u'_B)^2}{c^2}}} = \frac{m_C u'_C}{\sqrt{1 - \frac{(u'_C)^2}{c^2}}} + \frac{m_D u'_D}{\sqrt{1 - \frac{(u'_D)^2}{c^2}}},$$

mentre la conservazione della quantità di moto nel sistema S impone $p_A + p_B = p_C + p_D$, ossia

$$\frac{m_A u_A}{\sqrt{1 - \frac{(u_A)^2}{c^2}}} + \frac{m_B u_B}{\sqrt{1 - \frac{(u_B)^2}{c^2}}} = \frac{m_C u_C}{\sqrt{1 - \frac{(u_C)^2}{c^2}}} + \frac{m_D u_D}{\sqrt{1 - \frac{(u_D)^2}{c^2}}}.$$

Concentriamoci sulla quantità di moto della particella A: utilizzando l'uguaglianza (4.12), si ha

$$p'_A = \gamma_v \gamma_{u_A} m(u_A - v) = \frac{m_A(u_A - v)}{\sqrt{1 - u_A^2/c^2}\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.13)$$

Se ora moltiplichiamo la conservazione della quantità di moto in S' per la costante $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, e a questa nuova equazione sottraiamo la conservazione della quantità di moto in S, arriviamo ad un'equazione che coinvolge le quantità in entrambi i sistemi di riferimento. Per capire come rielaborare i termini dell'equazione risultante, ci concentriamo nuovamente sul termine della massa A. Ricordando l'uguaglianza (4.13) si ottiene

$$\begin{aligned} p'_A\sqrt{1 - v^2/c^2} - p_A &= \frac{m_A u_A - m_A v}{\sqrt{1 - u_A^2/c^2}} - \frac{m_A u_A}{\sqrt{1 - u_A^2/c^2}} \\ &= -\frac{m_A v}{\sqrt{1 - u_A^2/c^2}}, \end{aligned}$$

pertanto la nuova equazione è

$$-\frac{m_A v}{\sqrt{1 - u_A^2/c^2}} - \frac{m_B v}{\sqrt{1 - u_B^2/c^2}} = -\frac{m_C v}{\sqrt{1 - u_C^2/c^2}} - \frac{m_D v}{\sqrt{1 - u_D^2/c^2}},$$

che, divisa per $-v$, dà:

$$\frac{m_A}{\sqrt{1 - u_A^2/c^2}} + \frac{m_B}{\sqrt{1 - u_B^2/c^2}} = \frac{m_C}{\sqrt{1 - u_C^2/c^2}} + \frac{m_D}{\sqrt{1 - u_D^2/c^2}},$$

ossia

$$\gamma_A m_A + \gamma_B m_B = \gamma_C m_C + \gamma_D m_D. \quad (4.14)$$

L'equazione (4.14) esprime la *conservazione della massa* nel caso relativistico. Si osservi che, nel caso $v << c \iff \gamma \approx 1$, essa si riduce alla conservazione della massa del sistema, in senso "classico", prima e dopo l'urto ($m_A + m_B = m_C + m_D$).

Se moltiplichiamo l'equazione (4.14) per c^2 otteniamo delle quantità del tipo γmc^2, che hanno le dimensioni di un'energia. Definiamo, quindi, *energia relativistica* la quantità

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (4.15)$$

Nel limite "classico" $u << c$, per la formula (6.20), si ottiene

$$E = \gamma mc^2 \approx mc^2 + \frac{1}{2}mu^2,$$

dove $\frac{1}{2}mu^2$ indica l'energia cinetica, in senso "classico", posseduta dalla massa m. Questo limite ci permette di evindeziare il fatto che, nel caso generale di u non necessariamente piccola rispetto a c, l'energia relativistica definita dalla (4.15) è la somma tra un'energia "a riposo", mc^2, posseduta da un corpo per il solo fatto di avere massa, e la sua "energia cinetica relativistica" K:

$$E = \gamma mc^2 = mc^2 + K.$$

Da questa relazione segue immediatamente $K = E - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$, pertanto l'energia cinetica relativistica è calcolabile come

$$K = (\gamma - 1)mc^2. \quad (4.16)$$

In conclusione, indicando con E_X l'energia relativistica della massa m_X definita dalla (4.15), l'equazione (4.14) può essere riscritta nella forma

$$E_A + E_B = E_C + E_D,$$

che esprime la conservazione di una nuova quantità relativistica che possiamo chiamare *massa-energia*.

Osservazione importante. In questa sezione abbiamo dimostrato che, ipotizzando che la quantità di moto sia conservata sia S che in S', deve valere anche la conservazione della massa-energia relativistica espressa dall'equazione (4.14). Dal punto di vista logico, questo significa che, affinché la quantità di moto risulti conservata sia S che in S', *è necessario* che valga anche la conservazione della massa-energia relativistica. Quindi quantità di moto ed energia relativistica sono *intimamente connesse*.

4.4 Grandezze "conservate" e grandezze "invarianti"

Nello studio della dinamica relativistica abbiamo osservato che:

- la quantità di moto relativistica totale di un sistema isolato, ossia la somma delle quantità di moto $p_i = m_i u_i/\sqrt{1-u_i^2/c^2}$ delle singole particelle, si *conserva*: $p_{\text{tot}} = \sum_i p_i = \sum_i m_i u_i/\sqrt{1-u_i^2/c^2} = \bar{p}$,
- l'energia relativistica totale di un sistema isolato, ossia la somma delle energie $E_i = m_i c^2/\sqrt{1-u_i^2/c^2}$ delle singole particelle, si *conserva*: $E_{\text{tot}} = \sum_i E_i = \sum_i m_i c^2/\sqrt{1-u_i^2/c^2} = \bar{E}$.

Nonostante queste grandezze siano *conservate*, esse *non sono invarianti*: cambiando il sistema di riferimento, i loro valori cambiano ma non possono essere messi in relazione utilizzando meramente le trasformazioni di Lorentz.

Dimostriamo che, per una paricella avente quantità di moto $\vec{p}_i$ ed energia E_i, la grandezza *invariante*, ossia la grandezza che ha sempre lo stesso valore numerico (scalare) indipendentemente dal sistema di riferimento in cui la si osserva, è

$$E_i^2 - (p_i c)^2 = \left(m_i c^2\right)^2, \tag{4.17}$$

dove $(p_i)^2 = |\vec{p}_i|^2$. Che la quantità $\left(m_i c^2\right)^2$ sia invariante è semplice da dimostrare: siccome la massa di una particella è invariante (la massa di una singola particella in moto è sempre la stessa, indipendentemente dal sistema di riferimento in cui la si osserva) e la velocità della luce è costante in ogni sistema di riferimento (per il secondo postulato), allora sicuramente $\left(m_i c^2\right)^2$ è *invariante*. Verifichiamo ora l'identità (4.17). Siccome

$$E_i^2 = \left(\frac{m_i c^2}{\sqrt{1-u_i^2/c^2}}\right)^2 = \frac{m_i^2 c^4}{1-u_i^2/c^2},$$

$$(p_i c)^2 = \left(\frac{m_i u_i c}{\sqrt{1-u_i^2/c^2}}\right)^2 = \frac{m_i^2 u_i^2 c^2}{1-u_i^2/c^2},$$

allora

$$E_i^2 - (p_i c)^2 = \frac{m_i^2 c^4}{1-u_i^2/c^2}\left(1-u_i^2/c^2\right) = m_i^2 c^4 = \left(m_i c^2\right)^2.$$

Come detto, *in un sistema non soggetto a forze esterne, la quantità di moto totale e l'energia totale si conservano*, per ogni particella vale la (4.17), ma

$$\left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i p_i c\right)^2 \neq \left(\sum_i m_i c^2\right)^2.$$

4.5 Particelle prive di massa

È possibile avere particelle di massa nulla con quantità di moto non nulla? Sembrerebbe un paradosso, tuttavia dalla definizione di quantità di moto relativistica si ha

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \implies m = \frac{p}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = p\sqrt{\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}}.$$

Pertanto, $m = 0 \implies p = 0 \vee v = c$, ossia un'entità a massa nulla può avere quantità di moto $p \neq 0$ purché viaggi sempre alla velocità della luce. Questa entità esiste, si chiama *fotone*, e l'energia ad esso associata (per la (4.17) con $m_i = 0$) è

$$E = cp. \tag{4.18}$$

5 Conclusioni

Si è partiti ricavando, con argomentazioni piuttosto elementari, le trasformazioni di Lorentz per poi arrivare al nuovo concetto di simultaneità, alla dilatazione dei tempi e contrazioni delle lunghezze, e alla legge di composizione delle velocità.

Poi si è passati alla dinamica introducendo la *quantità di moto relativistica* di una particella come $\vec{p} = \gamma m\vec{v} = m\vec{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$, dove m è la massa della particella e $\vec{v}$ la sua velocità. Partendo dalla conservazione della quantità di moto vista da due sistemi inerziali in moto relativo l'uno rispetto all'altro, si è dimostrato che consegue la conservazione dell'energia relativistica $E = mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2} = \gamma mc^2 = mc^2 + K$.

Quindi si è posto l'accento sulla differenza tra grandezze "conservate" in un particolare sistema di riferimento inerziale (come la quantità di moto o l'energia) e grandezze "invarianti" da un sistema di riferimento inerziale ad un altro (come m e $E^2 - (pc)^2 = \left(mc^2\right)^2$).

Da ultimo si è mostrato che anche entità prive di massa possono avere quantità di moto non-nulla, purché viaggino alla velocità della luce (i fotoni).

6 Appendice

6.1 Il secondo principio della dinamica

Il secondo principio della dinamica è solitamente introdotto come $\vec{F} = m\vec{a}$, tuttavia la sua forma più generale è

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.$$

Se la velocità della particella di massa m è $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, allora si ha

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\gamma_u m\vec{u}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\gamma_u \vec{u}}{\mathrm{d}t} = m\vec{u}\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t} + m\gamma_u\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}.$$

Ricordando che

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u_x^2+u_y^2+u_z^2}{c^2}}},$$

ossia che γ_u è una funzione di tre variabili u_x, u_y e u_z, allora per il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\gamma_u}{\partial u_x}\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\gamma_u}{\partial u_y}\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\gamma_u}{\partial u_z}\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t},$$

dove il simbolo $\dfrac{\partial\gamma_u}{\partial u_x}$ significa semplicemente derivata di γ_u rispetto alla variabile u_x considerando tutte le altre variabili come costanti (tecnicamente si chiama derivata parziale di

γ_u rispetto a u_x). Ci concentriamo sulla derivata in x, le altre sono analoghe:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \gamma_u}{\partial u_x}\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial}{\partial u_x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u_x^2+u_y^2+u_z^2}{c^2}}}\right)\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\partial}{\partial u_x}\left(\left(1-\frac{u_x^2+u_y^2+u_z^2}{c^2}\right)^{-1/2}\right)\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} \\
&= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{u_x^2+u_y^2+u_z^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left(-2\frac{u_x}{c^2}\right)\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{u_x}{c^2}\gamma_u^3\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

Tornando a $\mathrm{d}\gamma_u/\mathrm{d}t$ e ricordando che la derivata del vettore velocità è il vettore accelerazione, i.e. $\mathrm{d}\vec{u}/\mathrm{d}t = \vec{a}$, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \gamma_u}{\partial u_x}\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \gamma_u}{\partial u_y}\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \gamma_u}{\partial u_z}\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{u_x}{c^2}\gamma_u^3\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} + \frac{u_y}{c^2}\gamma_u^3\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} + \frac{u_z}{c^2}\gamma_u^3\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\gamma_u^3}{c^2}\left(u_x\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} + u_y\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} + u_z\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{\gamma_u^3}{c^2}\vec{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t},
\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma_u^3}{c^2}\vec{u}\cdot\vec{a} \qquad (6.19)$$

Si osservi che questa quantità è uno *scalare*, in quanto risulta dal prodotto scalare dei due vettori $\vec{u}$ e $\vec{a}$, ed è consistente con il fatto che la la derivata di uno scalare rispetto al tempo non può che essere uno scalare. La forza è quindi

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= m\vec{u}\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t} + m\gamma_u\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} \\
&= m\frac{\gamma_u^3}{c^2}(\vec{u}\cdot\vec{a})\,\vec{u} + m\gamma_u\vec{a} \\
&= \vec{F}_u + \vec{F}_a.
\end{aligned}$$

Si osservi che *la forza risulta dalla somma di due contributi, uno nella direzione del vettore velocità e l'altro nella direzione del vettore accelerazione*:

$$\vec{F}_u = m\frac{\gamma_u^3}{c^2}(\vec{u}\cdot\vec{a})\,\vec{u} \quad \text{e} \quad \vec{F}_a = m\gamma_u\vec{a} \quad \Longrightarrow \vec{F} = \vec{F}_u + \vec{F}_a.$$

Se $|\vec{u}| << c$ si ha $\vec{F}_u \to 0$ e $\vec{F}_a \to m\vec{a}$, da cui il ben noto secondo principio della dinamica in fisica classica $\vec{F} = m\vec{a}$.

6.2 Lavoro ed energia cinetica relativistici

Calcoliamo ora il lavoro della forza relativistica

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{x}.$$

Ricordando che $\vec{u} = \mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}t$, si ha immediatamente $\mathrm{d}\vec{x} = \vec{u}\,\mathrm{d}t$, pertanto il lavoro si può calcolare come

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\vec{u}\,\mathrm{d}t.$$

L'ultimo integrale, che è nel tempo, presuppone la conoscenza del prodotto scalare $\vec{F}\cdot\vec{u}$. Ricoldando che $u = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$, si ha

$$\begin{aligned}
\vec{F}\cdot\vec{u} &= m\frac{\gamma_u^3}{c^2}(\vec{u}\cdot\vec{a})\,\vec{u}\cdot\vec{u} + m\gamma_u\vec{a}\cdot\vec{u} \\
&= m\gamma_u^3(\vec{u}\cdot\vec{a})\frac{u^2}{c^2} + m\gamma_u\vec{a}\cdot\vec{u} \\
&= m\gamma_u\left(\frac{u^2}{c^2}\gamma_u^2 + 1\right)\vec{u}\cdot\vec{a}
\end{aligned}$$

Osservando che $\frac{u^2}{c^2}\gamma_u^2 + 1 = \frac{u^2}{c^2}\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}} + 1 = \frac{u^2}{c^2-u^2} + 1 = \frac{c^2}{c^2-u^2} = \frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}} = \gamma_u^2$, il prodotto scalare $\vec{F}\cdot\vec{u}$ si può scrivere molto più semplicemente come

$$\vec{F}\cdot\vec{u} = m\gamma_u\left(\frac{u^2}{c^2}\gamma_u^2 + 1\right)\vec{u}\cdot\vec{a} = \gamma_u^3 m\vec{u}\cdot\vec{a}.$$

Siccome $\vec{u}\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{u}$, si ha che $\vec{F}\cdot\vec{u} = \gamma_u^3 m\vec{a}\cdot\vec{u}$, tuttavia questo *non implica* $\vec{F} = \gamma_u^3 m\vec{a}$, altrimenti la forza sarebbe necessariamente parallela all'accelerazione. Prima di tornare al calcolo del lavoro della forza relativistica $\vec{F}$, osserviamo che grazie alla relazione (6.19) si ha

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma_u^3}{c^2}\vec{u}\cdot\vec{a} \implies \gamma_u^3\vec{u}\cdot\vec{a} = c^2\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t}.$$

Utilizzando l'ultima uguaglianza, e passando attraverso due cambi di variabile, possiamo quindi riscrivere il lavoro della forza relativistica come

$$\begin{aligned}
L &= \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\vec{u}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \gamma_u^3 m\vec{u}\cdot\vec{a}\,\mathrm{d}t = \\
&= m\int_{t_1}^{t_2} \gamma_u^3\vec{u}\cdot\vec{a}\,\mathrm{d}t = m\int_{t_1}^{t_2} c^2\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = mc^2\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}\mathrm{d}\gamma,
\end{aligned}$$

da cui

$$L = mc^2(\gamma_2 - \gamma_1).$$

Dalla fisica classica sappiamo che $L = \Delta K$ ossia il lavoro della risultante delle forze applicate su un corpo è pari alla variazione di energia cinetica subìta dal corpo. Tuttavia se il corpo parte da fermo, ossia $u_1 = 0 \implies \gamma_1 = 1$ e raggiunge la velocità $v \implies \gamma_2 = \gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$, allora si ha che l'energia cinetica relativitica posseduta da un corpo alla velocità v coincide con il lavoro fatto per accelerare quel corpo da fermo alla velocità v, che possiamo indicare con $L_{0\to v} = mc^2(\gamma - 1)$. In conclusione

$$K = L_{0\to v} = mc^2(\gamma - 1),$$

che è proprio l'espressione dell'energia cinetica relativistica (4.16) ricavata precedentemente.

6.3 Il limite $v << c$

Una via comprensibile a tutti.
Nel caso $v << c$, il rapporto v/c è, in valore assoluto, molto minore dell'unità, per cui il suo quadrato è ancora più piccolo e possiamo assumere $v^2/c^2 \approx 0$. Introducendo $x = v^2/c^2 > 0$, la costante $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} = 1/\sqrt{1-x}$ può essere approsimata come segue: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}} \approx \sqrt{1+x} \approx \sqrt{1+x+\frac{x^2}{4}} = \sqrt{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2} = 1 + \frac{x}{2}$, dove si è

tenuto conto che x è positivo e molto piccolo, per cui x^2 è certamente trascurabile rispetto ad x. In definitiva

$$v << c \quad \Longrightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2},$$

da cui segue

$$v << c \quad \Longrightarrow \quad \gamma c^2 \approx c^2 + \frac{1}{2}v^2. \tag{6.20}$$

Una via che utilizza un limite notevole.
È noto che

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x} = k \implies \left[(1+x)^k - 1\right] \to kx \quad \text{per} \quad x \to 0.$$

Grazie a questo limite possiamo riscrivere $\gamma - 1$ come

$$\gamma - 1 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1,$$

osservando che $k = -1/2$ e $x = -v^2/c^2$, per $v^2/c^2 \to 0$ si ottiene

$$\gamma - 1 = \left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right] \to \quad -\frac{1}{2}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2},$$

da cui

$$\gamma - 1 \to \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \implies \gamma = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}, \quad \text{per} \quad \frac{v^2}{c^2} \to 0.$$