# Dinamica dei Fliudi
# A.A. 2013-2014

# Problemi assegnati durante il corso, da risolvere singolarmente o a gruppi ristretti, ***da consegnare al colloquio d'esame***

Simone Zuccher

2 aprile 2014

1. Dato il problema ai limiti
$$\begin{cases} 3f'' + 2f = \sin y \\ f(0) = 0, \quad f(3\pi/2) = 1 \end{cases}$$
determinare sperimentalmente l'ordine del metodo numerico che utilizza differenze finite non equispaziate ed approssima la derivata seconda nel nodo $i$-esimo con
$$f''(y_i) \approx \frac{\dfrac{f_{i+1} - f_i}{y_{i+1} - y_i} - \dfrac{f_i - f_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}}{\dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2}}.$$
Distribuire i nodi di griglia secondo la legge parabolica $y_i = \dfrac{3}{2}\pi \left(\dfrac{i-1}{N-1}\right)^2$. Si osservi che la soluzione esatta del problema è $f(y) = -\sin y$.

2. Risolvere numericamente su griglia non equispaziata il problema ai limiti
$$\begin{cases} 3f'' - 2g' + f = 0 \\ g'' + 2f' = \cos y \\ f(0) = 0, \quad f(\pi/2) = 1 \\ g(0) = 1, \quad g(\pi/2) = 0 \end{cases}$$
approssimando le derivate nel nodo $i$-esimo con $f'(y_i) \approx \dfrac{f_{i+1} - f_{i-1}}{y_{i+1} - y_{i-1}}$ e $f''(y_i) \approx \dfrac{\dfrac{f_{i+1} - f_{i-1}}{y_{i+1} - y_i} - \dfrac{f_i - f_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}}{\dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2}}$ e verificando che il metodo è del second'ordine. Si osservi che la soluzione esatta è la coppia di funzioni $f(y) = \sin y$ e $g(y) = \cos y$.

3. Determinare la soluzione numerica del problema ai limiti non lineare

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}f'' + f'f = \sin\left(\dfrac{y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{3}{2}y\right) \\ f(0) = 0, \quad f(\pi/2) = 1 \end{cases}$$

utilizzando differenze finite non equispaziate (si osservi che la soluzione esatta è $f(y) = \sin y$).

4. Utilizzando differenze finite non equispaziate con nodi parabolicamente addensati vicino all'origine, determinare la soluzione numerica del problema ai limiti non lineare

$$\begin{cases} f + g' &= 0 \\ f'g - fg' &= 1 \end{cases}$$

con condizioni al bordo $f(0) = f(\pi) = 0$, $g(0) = 1$ e $g(\pi) = -1$ (si osservi che la soluzione esatta è la coppia di funzioni $f(y) = \sin y$ e $g(y) = \cos y$).

5. Determinare numericamente su una *griglia non equispaziata* le velocità $u(2, y)$ e $v(2, y)$ per lo strato limite bidimensionale su una lamina piana immersa in una corrente esterna $u^{\text{est}}(x) = U = 3$ m/s con $\nu = 1.5$ m$^2$/s risolvendo il sistema di equazioni in forma conservativa

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} &= \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

con condizioni al contorno

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \qquad u(x, \infty) = U$$

e condizioni "iniziali" (al bordo d'attacco)

$$u(0, y) = U, \qquad v(0, y) = 0.$$

6. Determinare la soluzione numerica su una *griglia non equispaziata* dell'equazione di Blasius riscritta come sistema del second'ordine

$$\begin{aligned} fu' + 2u'' &= 0 \\ f' - u &= 0 \end{aligned}$$

con condizioni al contorno

$$f(0) = 0, \qquad u(0) = 0, \qquad u(\infty) = 1.$$

L'equazione che rimpiazza la condizione al contorno per $f$ all'infinito è $f'(\infty) = u(\infty) = 1$. Nota la soluzione di del problema di Blasius, determinare $u(2, y)$ e $v(2, y)$ supponendo $u^{\text{est}}(x) = U = 3$ m/s e $\nu = 1.5$ m$^2$/s e confrontare i profili di velocità così ottenuti con quelli della soluzione del problema precedente. Si calcoli il fattore di forma $H$ per la soluzione $u(2, y)$ calcolata con i due metodi e si commentino i risultati in base allo sforzo computazionale necessario per ottenere un valore vicino a quello previsto dalla teoria.

7. Risolvere numericamente il problema

$$\begin{cases} u_t + a u_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = 1.5 \cdot \max(0, 1 - |x|) \end{cases}$$

utilizzando uno dei metodi visti (upwind, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff, ecc.), variando $a$ (positiva o negativa) e confrontando il risultato ottenuto con la soluzione esatta calcolata con il metodo delle caratteristiche.

8. Risolvere numericamente il problema

$$\begin{cases} u_t + a u_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1.2 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0.4 & \text{se} \quad x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

utilizzando uno dei metodi visti (upwind, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff, ecc.), variando $a$ (positiva o negativa) e confrontando il risultato ottenuto con la soluzione esatta calcolata con il metodo delle caratteristiche. Se si utilizza un metodo conservativo, si ottengono risultati più o meno corretti? Quali conclusioni si possono trarre sulla dipendenza del metodo numerico da eventuali discontinuità del dato iniziale? Come sono spiegabili numericamente?

9. Risolvere con il metodo delle caratteristiche l'equazione di Burgers

$$u_t + u u_x = 0,$$

con dato iniziale $u_0 = 1.5 \cdot \max(0, 1 - |x|)$ fino ad un certo tempo $t = 1.5 \cdot \bar{t}$, essendo $\bar{t}$ il tempo al quale si osserva una soluzione a più valori (non fisica). Quindi si risolva lo stesso problema numericamente (con un metodo conservativo), ottenendo una soluzione ad un sol valore. Infine, si mostri che l'area racchiusa tra l'asse $x$ e la curva viene conservata, ovvero è la stessa per entrambi i metodi.

10. Risolvere numericamente il problema di Riemann non lineare

$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_\ell = 1.2 & \text{se} \quad x < 0 \\ u_r = 0.4 & \text{se} \quad x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

confrontando tra loro le soluzioni ottenute con un metodo non conservativo, uno conservativo e la soluzione esatta

$$u(x,t) = \begin{cases} u_\ell & \text{se} \quad x - St < 0 \\ u_r & \text{se} \quad x - St > 0 \end{cases} \qquad \text{con} \quad S = \frac{u_\ell + u_r}{2}.$$