

Dinamica dei Fluidi

A.A. 2011-2012

Problemi assegnati durante il corso,
da risolvere singolarmente o a gruppi ristretti,
da consegnare al colloquio d'esame

Simone Zuccher

3 maggio 2012

1. Determinare numericamente su una *griglia non equispaziata* le velocità $u(2, y)$ e $v(2, y)$ per lo strato limite bidimensionale su una lamina piana immersa in una corrente esterna $u^{\text{est}}(x) = U = 3 \text{ m/s}$ con $\nu = 1.5 \text{ m}^2/\text{s}$ risolvendo il sistema di equazioni in forma conservativa

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\end{aligned}$$

con condizioni al contorno

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad u(x, \infty) = U$$

e condizioni “iniziali” (al bordo d’attacco)

$$u(0, y) = U, \quad v(0, y) = 0.$$

2. Determinare la soluzione numerica su una *griglia non equispaziata* dell’equazione di Blasius riscritta come sistema del second’ordine

$$\begin{aligned}fu' + 2u'' &= 0 \\ f' - u &= 0\end{aligned}$$

con condizioni al contorno

$$f(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(\infty) = 1.$$

L'equazione che rimpiazza la condizione al contorno per f all'infinito è $f'(\infty) = u(\infty) = 1$. Nota la soluzione di del problema di Blasius, determinare $u(2, y)$ e $v(2, y)$ supponendo $u^{\text{est}}(x) = U = 3 \text{ m/s}$ e $\nu = 1.5 \text{ m}^2/\text{s}$ e confrontare i profili di velocità così ottenuti con quelli della soluzione del problema precedente. Si calcoli il fattore di forma H per la soluzione $u(2, y)$ calcolata con i due metodi e si commentino i risultati in base allo sforzo computazionale necessario per ottenere un valore vicino a quello previsto dalla teoria.

3. Risolvere numericamente il problema

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = 1.5 \cdot \max(0, 1 - |x|) \end{cases}$$

utilizzando uno dei metodi visti (upwind, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff, ecc.), variando a (positiva o negativa) e confrontando il risultato ottenuto con la soluzione esatta calcolata con il metodo delle caratteristiche.

4. Risolvere numericamente il problema

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1.2 & \text{se } x < 0 \\ 0.4 & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

utilizzando uno dei metodi visti (upwind, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff, ecc.), variando a (positiva o negativa) e confrontando il risultato ottenuto con la soluzione esatta calcolata con il metodo delle caratteristiche. Se si utilizza un metodo conservativo, si ottengono risultati più o meno corretti? Quali conclusioni si possono trarre sulla dipendenza del metodo numerico da eventuali discontinuità del dato iniziale? Come sono spiegabili numericamente?

5. Risolvere con il metodo delle caratteristiche l'equazione di Burgers

$$u_t + uu_x = 0,$$

con dato iniziale $u_0 = 1.5 \cdot \max(0, 1 - |x|)$ fino ad un certo tempo $t = 1.5 \cdot \bar{t}$, essendo \bar{t} il tempo al quale si osserva una soluzione a più valori (non fisica). Quindi si risolva lo stesso problema numericamente (con un metodo conservativo), ottenendo una soluzione ad un sol valore. Infine, si mostri che l'area racchiusa tra l'asse x e la curva viene conservata, ovvero è la stessa per entrambi i metodi.

6. Risolvere numericamente il problema di Riemann non lineare

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_l = 1.2 & \text{se } x < 0 \\ u_r = 0.4 & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

confrontando tra loro le soluzioni ottenute con un metodo non conservativo, uno conservativo e la soluzione esatta

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{se } x - St < 0 \\ u_r & \text{se } x - St > 0 \end{cases} \quad \text{con } S = \frac{u_l + u_r}{2}.$$