Dinamica dei Fliudi
A.A. 2010-2011
Problemi da portare all'orale (assegnati per casa)

Simone Zuccher

22 maggio 2011

1. Determinare la corrente parallela, 2D, stazionaria, incomprimibile compresa tra un piano fermo e uno parallelo ad esso e posto a distanza h che si muove a velocità costante U (si consideri il caso generale di gradiente di pressione non nullo).

2. Determinare la corrente parallela, stazionaria, incomprimibile all'interno di un tubo di raggio R. Determinare, quindi, la portata (in volume) e la velocità media (intesa come media integrale sulla sezione).

3. Determinare numericamente su una *griglia non equispaziata* le velocità $u(2, y)$ e $v(2, y)$ per lo strato limite bidimensionale su una lamina piana immersa in una corrente esterna $u^{\text{est}}(x) = U = 3$ m/s con $\nu = 1.5$ m^2/s risolvendo il sistema di equazioni in forma conservativa

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

   con condizioni al contorno

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \qquad u(x, \infty) = U$$

   e condizioni "iniziali" (al bordo d'attacco)

$$u(0, y) = U, \qquad v(0, y) = 0.$$

4. Determinare la soluzione numerica su una *griglia non equispaziata* dell'equazione di Blasius riscritta come sistema del second'ordine

$$\begin{aligned} fu' + 2u'' &= 0 \\ f' - u &= 0 \end{aligned}$$

   con condizioni al contorno

$$f(0) = 0, \qquad u(0) = 0, \qquad u(\infty) = 1.$$

L'equazione che rimpiazza la condizione al contorno per f all'infinito è $f'(\infty) = u(\infty) = 1$. Nota la soluzione di del problema di Blasius, determinare $u(2, y)$ e $v(2, y)$ supponendo $u^{\text{est}}(x) = U = 3$ m/s e $\nu = 1.5$ m^2/s e confrontare i profili di velocità così ottenuti con quelli della soluzione del problema precedente.

5. Risolvere numericamente il problema

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = 1.5 \cdot \max(0, 1 - |x|) \end{cases}$$

utilizzando uno dei metodi visti (upwind, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff, ecc.), variando a (positiva o negativa) e confrontando il risultato ottenuto con la soluzione esatta calcolata con il metodo delle caratteristiche.

6. Risolvere numericamente il problema

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1.2 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0.4 & \text{se} \quad x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

utilizzando uno dei metodi visti (upwind, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff, ecc.), variando a (positiva o negativa) e confrontando il risultato ottenuto con la soluzione esatta calcolata con il metodo delle caratteristiche. Se si utilizza un metodo conservativo, si ottengono risultati più o meno corretti? Quali conclusioni si possono trarre sulla dipendenza del metodo numerico da eventuali discontinuità del dato iniziale? Come sono spiegabili numericamente?

7. Risolvere con il metodo delle caratteristiche l'equazione di Burgers

$$u_t + uu_x = 0,$$

con dato iniziale $u_0 = 1.5 \cdot \max(0, 1 - |x|)$ fino ad un certo tempo $t = 1.5 \cdot \bar{t}$, essendo $\bar{t}$ il tempo al quale si osserva una soluzione a più valori (non fisica). Quindi si risolva lo stesso problema numericamente (con un metodo conservativo), ottenendo una soluzione ad un sol valore. Infine, si mostri che l'area racchiusa tra l'asse x e la curva viene conservata, ovvero è la stessa per entrambi i metodi.

8. Risolvere numericamente il problema di Riemann non lineare

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1.2 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0.4 & \text{se} \quad x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

confrontando tra loro le soluzioni ottenute con un metodo non conservativo, uno conservativo e la soluzione esatta (calcolata con il metodo delle caratteristiche) .