

L'idraulico ci insegna come risolvere un problema di matematica o di fisica

Simone Zuccher*

9 novembre 2010

Nota. So bene che queste paginette, scritte unicamente per tentare di dare una mano ai miei studenti, sono un concentrato di ovvietà arcinote. Ogni persona di buon senso sarebbe riuscita a dirle meglio e più sinteticamente, o forse avrebbe evitato del tutto di farlo, visto che le ovvietà sono ovvie. Per suggerimenti, commenti, critiche, o per segnalare eventuali sviste ed errori, scrivete pure (e senza ritegno) a zuccher@sci.univr.it.

Indice

1	Motivazione	1
2	Le fasi della soluzione di un problema	2
2.1	Comprensione del problema	2
2.2	Riscrittura del problema sotto forma grafica	3
2.3	Pianificazione di una strategia di soluzione	4
2.4	Esecuzione dei passi pianificati	5
2.5	Verifica della correttezza del risultato ottenuto	6
3	Soluzione di un problema in gruppi di 4-5 persone	7
4	Schema dettagliato per la risoluzione di un problema	8

1 Motivazione

Non sono un idraulico. In compenso ho fatto il falegname ai tempi del liceo (in estate) e ho visto come lavorano molti idraulici, elettricisti, muratori, ecc. Da Settembre 2005 insegno con continuità matematica e fisica in un liceo scientifico. Nonostante la mia esperienza di insegnamento non sia poi così lunga, credo di poter concludere che la soluzione di problemi, siano essi di matematica o di fisica, rappresentano uno scoglio non indifferente per gli studenti, anche per quelli più diligenti e che si impegnano sia in classe sia nello “studio domestico”. Perché?

Essenzialmente perché, per poter risolvere un problema, non basta conoscere la “teoria”, le “regole” o le “formule”. Queste rappresentano solamente gli “attrezzi del mestiere”: devono essere

*Insegnante di Matematica e Fisica presso il Liceo Statale “Enrico Medi” (Villafranca di Verona) e professore a contratto di Dinamica dei Fluidi per il corso di laurea in Matematica Applicata presso l’Università degli studi di Verona. Web page: <http://profs.sci.univr.it/~zuccher/>

possedute dallo studente, ma non sono sufficienti per arrivare a risolvere un problema. Pensiamo al lavoro dell'idraulico: se lo chiamo perché non esce più l'acqua dal rubinetto del mio bagno, egli porta con sé la cassetta degli attrezzi. Tuttavia, avere gli attrezzi non assicura all'idraulico di risolvere il problema: per farlo deve capire come stanno davvero le cose (l'acqua non esce dal rubinetto perché l'acquedotto quel giorno è fuori uso, perché non pago più la bolletta dell'acqua e quindi me l'hanno chiusa, o perché c'è un problema di altro tipo?) e, in base a dove sta il problema, l'idraulico pianifica una strategia di soluzione che mira a risolvere, di volta in volta, piccoli sottoproblemi. Una volta ideata questa strategia, la mette in pratica utilizzando gli attrezzi che si era portato e, una volta eseguita la riparazione, verifica che il tutto funzioni assicurandosi che l'acqua scorra dal rubinetto del bagno.

Secondo me, l'idraulico può insegnarci uno schema utile per risolvere i problemi di matematica e di fisica.

2 Le fasi della soluzione di un problema

Come docente mi chiedo quotidianamente: è possibile insegnare agli studenti “un metodo” per risolvere i problemi, oppure è tempo perso che io mi ostini a provarci? Beh, il fatto che nei corsi MBA (Master of Business Administration), dove si formano in modo scientifico i futuri manager di grandi aziende, si insegnino *problem solving*, *decision making* e *strategic planning* significa che forse si può imparare un metodo per risolvere i problemi (poi non è detto che io sia in grado di trasmetterlo ai miei studenti).

Personalmente ritengo che **la risoluzione di un problema sia un'attività altamente creativa** e, per questo, difficile da inquadrare in procedure prestabilite. Tuttavia, ripercorrendo i passi seguiti dall'idraulico per sistemare il rubinetto del bagno, direi che si possono identificare cinque fasi fondamentali nella risoluzione di un problema (di matematica, di fisica o più generale):

1. **Comprensione** del problema
2. **Riscrittura** del problema sotto forma grafica
3. **Pianificazione** di una strategia di soluzione
4. **Esecuzione** dei passi pianificati
5. **Verifica** della correttezza del risultato ottenuto

Analizziamo più nel dettaglio questi cinque punti consci del fatto che essi sono solo una indicazione di massima, delle “linee guida”, e non un insieme rigido di passi da seguire (algoritmo): non esiste una ricetta universale ed infallibile per risolvere i problemi.

2.1 Comprensione del problema

Solitamente i problemi vengono dati sotto forma di testi scritti a parole in una lingua conosciuta dallo studente (*word problems*). Nel caso del nostro idraulico, il testo del problema è: “*Non esce l'acqua dal rubinetto del mio bagno: potrebbe fare in modo che esca?*”. Se non si capisce cosa dice il testo, è perfettamente inutile cercare di dare una risposta, in quanto non si ha la ben che minima idea di che risposta dare. In questa prima fase **non ci preoccupiamo di risolvere il problema** ma solo di capire come stanno le cose (informazioni date e richieste). Per farlo è fondamentale leggere il testo e leggerlo attentamente, anche più volte se necessario. Pre-requisiti fondamentali sono:

- i) la conoscenza della lingua nella quale è scritto il testo e
- ii) la competenza di comprensione testuale.

Se questi pre-requisiti mancano, è inutile tentare di risolvere il problema. Nel leggere è necessario capire le singole frasi, identificare soggetti, verbi e complementi, capire a chi si riferiscono i pronomi, ecc., ovvero bisogna saper fare l'*analisi testuale*.

Nella mia esperienza di insegnante ho verificato che la maggior parte degli studenti considera una perdita di tempo leggere nel dettaglio il testo, sviscerarlo frase per frase, parola per parola e, per questo, non lo fa. Di conseguenza, lo studente raramente ha ben chiaro in testa in cosa consista il problema.

Perché è così importante aver capito il testo? Perché nel testo sono contenute una serie di informazioni, quelle che solitamente chiamiamo i “dati del problema”. Spesso queste informazioni sono molto esplicite (“l'altezza del triangolo è 3 cm”), mentre altre volte sono implicite e devono essere esplicitate dallo studente in modo chiaro (per esempio il fatto che l'altezza sia sempre, per definizione, perpendicolare alla base). Un altro motivo fondamentale per capire a fondo il testo è che in esso si annida la *domanda*. La ricerca di quest'ultima è un elemento imprescindibile per poter risolvere il problema in quanto la domanda è il faro che ci guida, il nostro punto di arrivo. Spesso essa finisce con un punto interrogativo, ma non sempre: a volte è nascosta in frasi del tipo “determinare un punto P su un segmento in modo tale che ...” e deve essere riformulata in modo molto più esplicito dallo studente.

Un test piuttosto semplice per sapere se si è compreso il testo, se si sono individuate tutte le informazioni date e se si è scovata la domanda (o le domande), è di chiudere il libro (o togliere di mezzo il foglio sul quale è scritto il testo) e riformulare il problema con parole proprie. L'ordine in cui si dicono le cose non deve essere necessariamente quello del testo, ma l'importante è che siano dette tutte, ovviamente in modo corretto, e che siano poste in evidenza le richieste (=domande) del problema. Questo si può fare raccontando il problema ad un'altra persona e guardando l'espressione del suo viso man mano che procediamo: se è turbata, vuol dire che quello che diciamo non ha molto senso e probabilmente non abbiamo capito il testo. Se la persona si mostra soddisfatta perché ha capito di cosa si sta parlando, molto probabilmente anche noi l'abbiamo capito. Siccome non si ha sempre una persona a disposizione (o la persona potrebbe non avere gli elementi per capire ciò di cui stiamo parlando), è necessario immaginare una conversazione con un *compagno virtuale* di pari conoscenze che ci ascolta (magari il peggiore della classe). Se alla fine della nostra esposizione del testo il compagno potrebbe aver capito, allora abbiamo capito anche noi. Se nell'esposizione ci “intoppiamo” o non riusciamo a dire una cosa, semplicemente non l'abbiamo capita.

Come si può migliorare questa competenza di *comprensione del problema*? Credo che basti prendere, ogni giorno, 10 righe di un testo qualsiasi da un libro qualsiasi o da un giornale qualsiasi e ridirlo con parole proprie assicurandosi di non tralasciare nulla, nemmeno gli elementi che potremmo pensare non siano importanti.

Questa prima fase non ha nulla a che fare con la matematica: chi non sa comprendere un testo scritto ha problemi in italiano, non in matematica!

2.2 Riscrittura del problema sotto forma grafica

Dopo aver letto più o meno attentamente il testo del problema, lo studente medio inizia a combinare i dati infilandoli in qualche formula memorizzata più o meno correttamente, nella speranza che, per magia, salti fuori il “risultato”. Direi che è tempo perso.

Assumiamo che da domattina ci sia concesso di avere *uno solo* dei 5 sensi (uno a scelta tra vista, udito, olfatto, gusto e tatto). Quale vorreste avere? Ho fatto più volte questa domanda agli studenti e la risposta che va per la maggiore è la vista (è anche il mio senso preferito). Perché l'ultimo senso di cui vorremmo privarci è proprio la vista? Credo perché, tramite la vista, si può raccogliere una quantità enorme di informazioni sul mondo attorno a noi in un tempo molto breve e indipendentemente dalla lingua parlata (si pensi alla segnaletica stradale e ai segnali di divieto o pericolo). Sembra così ovvio (e lo è): se la vista è il nostro senso più sviluppato, perché non riscrivere

il problema sotto *forma grafica* in modo da stimolare istantaneamente e in modo del tutto naturale il nostro cervello? Basta fare uno schema, un disegno, uno schizzo, una sequenza di immagini come in un fumetto, purché si riportino **sotto forma grafica tutte le informazioni contenute nel testo**. In fin dei conti, se il vecchio adagio recita *un'immagine vale più di mille parole*, qualcosa di vero ci sarà!

Quando si riesce a riscrivere un problema sotto forma di schema grafico, praticamente lo si è capito profondamente e gran parte del lavoro è già stato fatto. Per i problemi di fisica questa riscrittura grafica risulta piuttosto naturale; per i problemi di matematica un po' meno, ma con un po' di allenamento ci si riesce.

Come migliorare la nostra capacità di riscrittura di problemi sotto forma grafica? Immaginiamo di dover raccontare il testo del problema al nostro amico virtuale tramite un *video muto* (senza audio) che carichiamo su [YouTube®](#): che immagini useremmo per far passare *tutte le informazioni* del testo?

2.3 Pianificazione di una strategia di soluzione

Per spiegare cosa intendo per “pianificazione di una strategia” uso spesso il seguente problema/esempio: vogliamo trovarci tutti domenica prossima, a mezzogiorno, in piazza San Marco a Venezia. Come fareste per esserci?

Un vero stratega (non necessariamente militare, pensiamo al nostro idraulico) parte dall'obiettivo che vuole raggiungere (far funzionare il rubinetto) e, in base a quello, pianifica obiettivi intermedi che è necessario raggiungere procedendo a ritroso fino ad arrivare a considerare i mezzi che si hanno effettivamente a disposizione. Per essere sicuri di essere in piazza San Marco a Venezia per le 12:00 di domenica, direi che il primo passo è sapere tramite che mezzi si può accedere alla piazza. Ci informiamo su Internet e scopriamo che si può arrivare o a piedi (per calli e ponti) o per barca (vaporetti, taxi, ecc. via mare/canali). Ecco una prima scelta da fare: preferiamo arrivare a piedi o in barca? Diciamo a piedi, perché vogliamo risparmiare soldi e goderci una passeggiata per Venezia. Partiamo a piedi da casa nostra (potrebbe essere un'opzione, ammesso di avere tanta voglia di camminare) o vogliamo iniziare la nostra passeggiata da un luogo accessibile con altri mezzi? Ci informiamo su Internet e scopriamo che sia le automobili private, sia i bus, che i treni non possono andare oltre piazzale Roma. Scopriamo anche che da lì partono i vaporetti che portano in piazza San Marco, cosa che potrebbe tornarci utile se cambiassimo idea all'ultimo momento e decidessimo di non andare più a piedi. Dobbiamo ora decidere come arrivare da casa nostra a piazzale Roma: siccome siamo minorenni e non vogliamo farci accompagnare dai genitori in macchina (che smacco!), decidiamo di servirci del treno (che arriva vicino a piazzale Roma). La prima cosa da decidere non è che treno prendere, ma quanto tempo ci servirà per andare a piedi dalla stazione ferroviaria (Santa Lucia) a piazza San Marco. Infatti, solo se sappiamo quanto tempo ci serve per la passeggiata possiamo scegliere il treno che ci fa più comodo. Siccome siamo nell'era digitale, chiediamo a [GoogleMaps®](#) di dirci quanto tempo ci vuole a piedi. Risposta: 2,2 km, 26 min (si osservi che trent'anni fa si sarebbe chiesto ad un'amico o ci si sarebbe procurata una cartina di Venezia e si sarebbero fatte delle stime sulla distanza basandole sulla scala della cartina e stimando una velocità di circa 4 km/h per divincolarsi tra i calli e i ponti). Diciamo che la passeggiata, senza soste, richiede circa mezz'ora. Volendo prendercela comoda, magari fermanoci in qualche bar o a comprare qualche ricordo di Venezia, ipotizziamo che la passeggiata rilassata possa durare circa un'ora. Solo adesso possiamo andare sul sito delle Ferrovie dello Stato e cercare i treni che partono dalla stazione a noi più comoda e che arrivano a Venezia Santa Lucia non dopo le 11:00 di domenica prossima. In base a quello decidiamo a che ora uscire di casa e con che mezzo arrivare alla stazione di partenza (stavolta possiamo farci accompagnare dai genitori). In tutto ciò non bisogna dimenticare di tener conto del tempo necessario a fare il biglietto: di solito c'è un po' di coda in biglietteria e siamo in Italia... uomo avvisato mezzo salvato!

Domanda: avrà più probabilità di arrivare in piazza San Marco alle 12:00 di domenica prossima chi ha pianificato nel dettaglio i vari mezzi da prendere e gli orari, o chi domenica mattina partirà più o meno a casaccio (senza aver chiaro né in che direzione, né con che mezzo, né a che ora)? È scontato che **la fase di pianificazione, che a molti può sembrare “poco produttiva”, è in realtà la fase cruciale** nella soluzione di problemi. Senza una buona strategia non si raggiungono gli obiettivi prefissati (questo direi che vale sempre, non solo in matematica o in fisica).

Nel caso dei problemi di matematica e fisica, è opportuno partire dalla domanda (che è chiara se il punto 1 e 2 sono stati svolti correttamente) e chiedersi: per rispondere a questa domanda, che “ingredienti” mi servono? Come per la pianificazione del giretto a Venezia, bisogna identificare cosa serve ad ogni passo e risolvere piccoli sotto-problemi, che consentono di ottenere il dato intermedio che al momento manca. In pratica, il problema finale viene scomposto in piccoli sotto-problemi ciascuno dei quali porta ad ulteriori mini-problemi. Prima o poi si arriva ad un punto in cui si può affermare: beh, questo dato (o questo ingrediente, o questo oggetto) ce l’ho già perché è nei dati di partenza che ho sott’occhio grazie alla riscrittura in forma grafica. Quando si è delineata in ogni dettaglio la strategia risolutiva, praticamente lo scoglio di capire come risolvere il problema è superato in quanto si ha chiaro in testa quali sono i passi logici da compiere per arrivare alla soluzione.

Il processo di pianificazione strategica può coinvolgere delle scelte: quando questo succede significa che ci sono più vie per arrivare alla soluzione. Lo studente allenato sa riconoscere la via più veloce e, perché no, quella più elegante.

Come fare per allenare la nostra capacità di pianificazione? Nell’era di Internet e dei videogiochi è piuttosto facile: un qualsiasi gioco che preveda la pianificazione di una strategia anche solo per uscire da una situazione di pericolo o per raggiungere un determinato obiettivo va benissimo (il buon vecchio [PacMan](#), con il quale sono cresciuti molti ragazzi nati negli anni ’70 [tra cui il sottoscritto] è un ottimo esempio). Personalmente ho trovato molto utili i giochi/test proposti dalla [Cambridge Brain Science](#) (www.cambridgebrainsciences.com), che si occupa di studiare in modo scientifico le funzioni cognitive umane tramite la somministrazione di test su larga scala via web. Dopo essersi registrati gratuitamente, si può accedere ad una serie di test che sono raggruppati nelle 4 aree direttamente coinvolte nel processo di apprendimento, ovvero:

- Memoria
- Ragionamento
- Concentrazione
- Pianificazione

Evidentemente, per quanto riguarda la soluzione di problemi, le aree interessanti sono quelle del ragionamento e della pianificazione. In particolare, i seguenti test di pianificazione strategica (essenzialmente spaziale) proposti dalla Cambridge Brain Science sono divertenti e utilissimi: [Hampshire-Tree](#), [Spatial Slider](#) e [Spatial Search](#).

2.4 Esecuzione dei passi pianificati

Questa fase si può dividere in due: dapprima è necessario identificare le incognite del problema e scrivere un numero di equazioni pari al numero di incognite; in secondo luogo è necessario risolvere queste equazioni. La parte più difficile è proprio la riscrittura del problema iniziale sotto forma matematica (di equazioni), mentre la risoluzione delle equazioni (o “i calcoli” in un problema di fisica) dovrebbe essere la parte più facile perché si riduce alla mera applicazione di procedure note. È in questa quarta fase che servono gli “attrezzi del mestiere”, le famose (famigerate?) “formule”. Chi conosce la “teoria”, le “regole”, le “formule” e le ha interiorizzate non ha problemi in questa fase. Chi non possiede gli “attrezzi del mestiere” o chi li possiede in modo sterile e “mnemonico”, anche se ha ideato la strategia vincente, trova comunque delle difficoltà perché non sa come realizzarla in pratica.

Per quanto riguarda l'esecuzione dei calcoli e dei passaggi algebrici, nel corso degli anni ho verificato che spesso lo studente "intuitivo", che è molto veloce e corretto nella fase di pianificazione strategica, nella foga di arrivare velocemente al "risultato" finisce per infilare errori di distrazione qua e là che non gli permettono di ottenere la soluzione numericamente corretta. Questo è davvero un peccato perché non ci vuole molto a fare i conti giusti una volta che si è capito cosa fare. D'altra parte studenti "meno intuitivi" ma molto metodici, anche se lenti nella fase di pianificazione strategica, grazie alla loro attenzione ai singoli passaggi, arrivano spesso alla soluzione corretta anche se in tempi non fulminei. Questo per dire che tutti, "intuitivi" e "meno intuitivi", **possiamo imparare una tecnica per risolvere** correttamente e in tempi non geologici **tutti i problemi che ci vengono somministrati a scuola** (quelli della vita reale non è detto che abbiano soluzione o che le soluzioni siano percorribili in pratica).

Lo studente medio potrebbe pensare che la fase di esecuzione non sia poi così importante: in fondo basta capire la strategia di soluzione, il resto sono solo banali calcoletti (algebretta). Chi la pensa così di solito pensa anche che l'errore di distrazione non sia poi così grave. Come insegnante penalizzo pesantemente l'errore di distrazione. Perché? Per due motivi: (a) perché è l'errore più facile da curare e quindi tutti dovrebbero migliorarsi prestando maggiore attenzione; (b) perché, secondo me, l'errore di distrazione è grave. Mi spiego con due esempi che non hanno bisogno di commento. Vi andrebbe bene di farvi operare da un chirurgo che è un po' distratto e che non sta molto attento a dove taglia? A me no... Vi andrebbe di fare un volo transoceanico da Milano a Buenos Aires (sotto c'è solo mare, non ci sono aeroporti per atterraggi di emergenza) sul quale, per distrazione, chi doveva caricare 136800 litri di carburante distrattamente si è dimenticato uno zero e ne ha caricati solo 13680 (l'aereo può percorrere solo un decimo del tragitto previsto)? A me no...

Come migliorare la nostra performance nella fase di esecuzione? Beh, come in tutte le attività umane, anche in questa **diminuiamo i nostri tempi di reazione e di esecuzione ed affiniamo le nostre competenze solo ed esclusivamente con l'esercizio continuo** e mettendoci in gioco in prima persona. Non si impara ad andare in bicicletta guardando un DVD di gente che va in bici o ascoltando ore e ore di teoria: bisogna salirci sopra, cadere o rischiare di cadere perdendo l'equilibrio per un po' di volte, e poi, con l'esercizio continuo, l'andare in bici diventa semplicemente automatico. Sugerirei a tutti di dilettersi con un paio di problemini al giorno, giusto per mantenersi in forma.

2.5 Verifica della correttezza del risultato ottenuto

Nessuno di noi è così pazzo da pagare il famoso idraulico senza verificare prima se il rubinetto del bagno funziona o meno, giusto? Allora perché, dopo aver apparentemente risolto un problema (supponiamo di non conoscere la soluzione del libro), non ci preoccupiamo mai di verificare se la soluzione è corretta o meno? Spesso, avendo a disposizione la soluzione, è possibile verificare che essa rende vero quanto contenuto nel testo (si pensi al problema *determinare due numeri naturali che abbiano per somma 5 e prodotto 6*: si verifica che 2 e 3, ottenuti chissà come, soddisfano la richiesta e quindi vanno bene).

Una prima verifica consiste nel controllare se i **risultati** ottenuti sono **matematicamente (e fisicamente) accettabili** o meno: lunghezze e aree negative non esistono, masse negative nemmeno. D'altra parte, come si può capire se un **risultato** è **plausibile**? Nei problemi di fisica capita spesso: se si parla di lanciare un sasso verso l'alto e ottengo una velocità prossima a quella della luce, è ovvio che ho sbagliato; se si tratta di determinare la massa di un'automobile e ottengo 10 kg o 10000 kg, è ovvio che ho sbagliato. Per i problemi di matematica, se ottengo che un negozio applica il 95% di sconto durante i saldi, probabilmente c'è qualcosa che non va.

Come si può migliorare l'abilità di riconoscere la sensatezza/plausibilità di un risultato? Direi unicamente a seguito di **numerose esperienze di soluzione di problemi** (=esercizio costante).

3 Soluzione di un problema in gruppi di 4-5 persone

Recentemente, stremato dalla frustrazione di non vedere miglioramenti nella capacità di risolvere problemi dei miei studenti nonostante le numerose ore passate in classe a spiegare le suddette strategie per risolverli, ho pensato che dove non riesce il cervello di un solo studente forse potrebbe riuscire l'unione di 4-5 cervelli di studenti che lavorano in parallelo focalizzati sullo stesso problema interagendo tra di loro. Nulla di nuovo: si tratta del buon vecchio *lavoro di gruppo*, che oggi viene chiamato, in modo molto altisonante, *cooperative learning*.

Avevo sentito dire che il numero ottimo di persone in un gruppo finalizzato alla soluzione di problemi fosse da 3 a 5. Quindi ho deciso di fare gruppetti di 4-5 persone così assortiti: supponendo che ci siano 5 gruppi, i 5 più bravi e i 5 più scarsi sono ciascuno in un gruppo (ovviamente il più scarso di tutti con il più bravo di tutti, il secondo più bravo con il meno scarso del più scarso e così via), e poi ho cercato di inserire gli altri ragazzi cercando di formare gruppi equilibrati basandomi sia sul mero voto in matematica o in fisica sia sulle capacità di comunicazione ed interazione sociale di ciascuno con i propri simili (quindi evitando gruppi costituiti esclusivamente da persone altamente individualiste e scarsamente interagenti).

Risultato: problemi che nessuno riesce a fare da solo, nemmeno dopo un'ora di meditazione, in gruppo sono risolti al massimo in 20-30 minuti. Questo mi ha lasciato molto sconvolto (positivamente). Perché il lavoro di gruppo è così efficace? La motivazione più ovvia è che si stanno utilizzando 4-5 cervelli in parallelo che cooperano allo stesso fine, invece di uno solo. Non a caso, la velocità di risoluzione in gruppo è direttamente proporzionale al livello di interazione tra i membri dello stesso.

Osservando gli studenti durante la soluzione di problemi in gruppo mi sono convinto che questa sia un'ottima modalità di apprendimento della matematica e della fisica per vari motivi:

- tutti gli studenti sono costretti a contribuire in modo attivo e partecipato, cosa che non succede durante la risoluzione di un problema alla lavagna quando quasi tutti gli studenti ascoltano in modo piuttosto passivo
- gli studenti parlano tra di loro, si scambiano opinioni, cooperano in modo straordinariamente efficace, se non capiscono qualcosa lo chiedono a chi ha capito un po' di più e lo fanno senza provare imbarazzo o vergogna perché sono tra pari
- chi ha un'idea la dice e così facendo scatena una reazione a catena per cui in modo del tutto naturale gli altri generano nuove idee sulla base di quelle espresse precedentemente: questa è la generazione creativa di nuove idee che non sarebbe possibile se ci fosse una sola persona coinvolta nella soluzione
- l'autostima di quelli meno bravi aumenta perché scoprono di essere in grado di risolvere problemi che sembravano completamente inattaccabili e perché riescono a capire anche i passaggi/dettagli più delicati grazie alle spiegazioni degli altri; allo stesso modo, l'autostima di tutti quelli che contribuiscono con almeno un pezzettino di idea aumenta perché si sentono "utili" alla soluzione del problema
- gli studenti scherzano tra di loro, si prendono in giro (bonariamente), si muovono, sono fortemente coinvolti dal punto di vista emotivo: è ben noto che il coinvolgimento in prima persona favorisce l'apprendimento (tutto questo non succede quando una sola persona esegue il problema alla lavagna e gli altri seguono dal posto)
- interagire con i propri pari, che molto probabilmente hanno le nostre stesse difficoltà e sperimentano lo stesso senso di frustrazione davanti all'incapacità di risolvere un problema, aiuta gli studenti a non sentirsi inadeguati (*mal comune, mezzo gaudio*)
- si crea un forte senso di appartenenza al gruppo ed il gruppo integra in modo del tutto naturale gli studenti che di solito sono lasciati ai margini; inoltre si genera una sana competizione tra i vari gruppi che porta ciascuno a dare il meglio di sé per il successo del proprio gruppo
- gli studenti, arrivati alla soluzione di gruppo, oltre a sentirsi molto appagati per il successo sentono anche di aver imparato *divertendosi* (meglio di così, cosa volete?)

4 Schema dettagliato per la risoluzione di un problema

1. Comprensione del problema:

- (a) **leggere il testo** comprendendo il significato di ciascuna parola
- (b) **evitare di voler risolvere** subito il problema (prima bisogna capirlo)
- (c) identificare le **informazioni date**, sia esplicite che implicite
- (d) identificare le **informazioni richieste**, ovvero le domande
- (e) **riformulare il problema con parole proprie** (amico virtuale)
- (f) **ripetere** i passi da (a) a (e) finché non si ha la certezza di aver capito il problema

2. Riscrittura del problema sotto forma grafica:

- (a) **disegnare** gli oggetti di cui si parla nel testo
- (b) **riportare nella figura tutti i dati** (espliciti o impliciti) del testo
- (c) fare **più disegni o più figure** se c'è una evoluzione temporale
- (d) assicurarsi che dalla figura si riesca a **ricostruire completamente il testo del problema**

3. Pianificazione di una strategia di soluzione:

- (a) concentrarsi su **una domanda alla volta** (prima la prima, poi la seconda, ecc.)
- (b) individuare un **sottoproblema che**, a patto di avere a disposizione dei dati che al momento mancano, **permetterebbe di rispondere alla domanda**
- (c) individuare degli **ulteriori sottoproblemi** che permettano di determinare, a ritroso, **i dati mancanti** e necessari per risolvere il punto precedente
- (d) **ricontrollare continuamente** la pianificazione strategica per vedere se può funzionare, assicurandosi che non ci siano errori concettuali/logici
- (e) **ripetere** i passi da (a) a (d) **per ogni domanda**

4. Esecuzione dei passi pianificati:

- (a) **scegliere le incognite** con le quali scrivere le equazioni che governano il problema
- (b) controllare la **correttezza delle formule** che si usano
- (c) **prestare massima attenzione** ai calcoli (l'errore è sempre dietro l'angolo)
- (d) **non proseguire** con un ulteriore passaggio **se non si è prima ricontrollato** almeno una volta il passaggio precedente
- (e) non stancarsi mai di **ricontrollare ciò che si scrive**

5. Verifica della correttezza del risultato ottenuto:

- (a) controllare se i **risultati ottenuti sono accettabili** o meno
- (b) controllare se i **risultati ottenuti sono sensati/plausibili**