Compendio di

Probabilità

in preparazione all'esame di stato

Simone Zuccher

29 maggio 2013

Indice

1 Probabilità

Prima di introdurre il concetto di probabilità, diamo alcune definizioni preliminari.

Definizione 1.1 *Si dice* evento E *qualsiasi accadimento per il quale è possibile dire se è vero oppure falso.*

Definizione 1.2 *Dati due eventi E_1 e E_2, si dice* intersezione *l'evento $E = E_1 \cap E_2$ che è vero se entrambi gli eventi E_1 e E_2 sono veri, falso se almeno uno di essi è falso.*

Definizione 1.3 *Dati due eventi E_1 e E_2, si dice* unione *l'evento $E = E_1 \cup E_2$ che è vero se almeno uno degli eventi E_1 e E_2 è vero, falso se sono entrambi falsi.*

Definizione 1.4 *Si dice* negazione *dell'evento E e si indica con $\overline{E}$ quell'evento che è falso se E è vero e viceversa.*

La probabilità è una "misura" del verificarsi di un evento ed è sempre espressa da un numero compreso tra 0 e 1. Se l'evento è impossibile, ossia non può mai verificarsi, la sua probablità è $p = 0$. Se l'evento è certo la sua probabilità è $p = 1$.

Per quanto riguarda gli eventi e le operazioni su di essi, valgono le seguenti proprietà:

Complementarietà	$\overline{(\overline{E})} = E$
Associativa	$E_1 \cap (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cap E_2) \cap E_3$
	$E_1 \cup (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cup E_2) \cup E_3$
Distributiva	$E_1 \cap (E_2 \cup E_3) = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3)$
	$E_1 \cup (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_3)$
De Morgan	$\overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2$
	$\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2$

Si possono dare almeno tre definizioni rigorose di probabilità.

Definizione 1.5 **Probabilità classica**. *Definiamo probabilità il rapporto tra il numero di casi favorevoli v ed il numero di casi possibili n,*

$$p = \frac{v}{n}.$$

Per esempio, la probabilità di estrarre il numero 5 da un sacchetto che contiene tutti i numeri dall'uno al dieci si calcola valutando i casi favorevoli (uno solo, che esca 5) ed i casi possibili (10): $p = 1/10$.

La probabilità di pescare un numero pari da un sacchetto in cui vi sono tutti i numeri dall'uno al dieci è $p = 1/2$ in quanto i casi favorevoli sono 5 (escono i numeri 2, 4, 6, 8 e 10) ed i casi possibili sono 10.

Definizione 1.6 Probabilità frequentistica. *Definiamo probabilità di un evento la frequenza con la quale esso si verifica (ossia il numero di volte che si verifica diviso per il numero di volte che si è ripetuta una prova) quando il numero di prove è sufficientemente elevato.*

Per esempio, lanciando una monetina 10 volte può succedere che 3 volte esca testa e 7 volte esca croce, quindi la probabilità che esca testa è $p = \frac{3}{10}$. Tuttavia, se si lancia 1000 volte, è molto improbabile che esca testa 300 volte e croce 700 volte, mentre può succedere, ad esempio, che esca 520 volte testa e 480 croce. Al crescere del numero di prove, quindi, la probabilità che esca testa tende sempre più a $\frac{1}{2}$.

Definizione 1.7 Probabilità soggettivistica. *Definiamo probabilità di un evento il grado di fiducia che un "individuo coerente" attribuisce al verificarsi di un evento.*

Per "individuo coerente" si intende un individuo che attribuisce probabilità nulla all'evento impossibile, 1 all'evento certo, ed un numero tra 0 e 1 in qualsiasi altro caso. In pratica, la definizione soggettivistica può essere vista come il "prezzo equo" p che un "individuo coerente" sarebbe disposto a pagare per ricevere un euro al verificarsi dell'evento E. Chiaramente, se l'individuo pensa che l'evento non possa verificarsi sarà disposto a pagare 0 euro, nel caso sia certo del verificarsi dell'evento potrebbe essere disposto a pagare 1 euro, in qualsiasi altro caso una somma minore di un euro.

1.1 Teoremi sulla probabilità

Se p è la probablità dell'evento E, che indichiamo con $p = P(E)$, allora la probabilità che E non si verifichi è

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - p.$$

1.2 Unione di eventi (probabilità totale)

Consideriamo l'evento
E: *nel lancio di un dado esce 3 o 4.*
Se pensiamo ai due eventi *incompatibili*
E_1: *nel lancio di un dado esce 3* e
E_2: *nel lancio di un dado esce 4*,
allora l'evento $E = E_1 \cup E_2$. Si osservi che $P(E_1) = \frac{1}{6}$ e $P(E_2) = \frac{1}{6}$, mentre $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
Consideriamo ora l'evento
E: *nel lancio di un dado esce 3 o un numero dispari.*
Se pensiamo ai due eventi
E_1: *nel lancio di un dado esce 3* e
E_2: *nel lancio di un dado esce un numero dispari*,
allora l'evento $E = E_1 \cup E_2$ ma, in questo caso, E_1 e E_2 *sono compatibili*: $P(E_1) = \frac{1}{6}$ e $P(E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, mentre $P(E) = \frac{1+3-1}{6} = \frac{1}{2}$.

Possiamo allora concludere che, in generale, vale la seguente formula

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2). \tag{1.8}$$

Se E_1 ed E_2 sono *incompatibili* allora $P(E_1 \cap E_2) = 0$

1.3 Intersezione di eventi (probabilità composta)

Consideriamo un'urna contenente 30 palline di cui 17 rosse e 13 verdi: siamo interessati a calcolare la probabilità che estraendo *successivamente* due palline esse siano entrambe rosse, nell'ipotesi di *non* rimettere la prima pallina dentro l'urna. Consideriamo i due eventi
E_1: *estrazione di una pallina rossa dall'urna piena* e
E_2: *estrazione di una pallina rossa dall'urna dalla quale manca una pallina rossa.*
Evidentemente, a noi interessa l'evento $E = E_1 \cap E_2$, ossia siamo interessati all'evento che si verifica quando *entrambi* gli eventi E_1 e E_2 sono veri. Si osservi che la probabilità dell'evento E_1 è $p_1 = P(E_1) = \frac{17}{30}$, mentre la probabilità dell'evento E_2 è $p_2 = P(E_2) = \frac{16}{29}$. La probabilità p dell'evento E è il rapporto tra il numero di modi in cui si possono estrarre, successivamente, 2 palline rosse da un'urna che ne contiene 17, diviso per il numero di modi in cui si possono estrarre 2 palline da un'urna che ne contiene 30. Il numero di modi in cui si può estrarre la prima pallina rossa è 17, una volta estratta rimangono 16 palline rosse, quindi ci sono 16 modi estrarre la seconda pallina rossa. Pertanto, ci sono $17 \cdot 16$ modi di estrarre in successione 2 palline rosse. Analogamente, se si estraggono 2 palline qualsiasi, si hanno 30 modi di estrarre la prima e 29 di estrarre la seconda, pertanto

$$p(E) = \frac{17 \cdot 16}{30 \cdot 29} = \frac{17}{30} \cdot \frac{16}{29} = p(E_1) \cdot p(E_2).$$

Più in generale vale la seguente formula

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1), \tag{1.9}$$

dove il simbolo $P(E_2|E_1)$ significa *la probabilità che si verifichi l'evento E_2 una volta che si è verificato l'evento E_1*. Se succede che $P(E_2|E_1) = P(E_2|\overline{E}_1)$, evidentemente la probabilità che si verifichi E_2 è indipendente dal verificarsi o meno di E_1 e gli eventi E_1 ed E_2, in questo caso, si dicono *stocasticamente indipendenti*. Nel caso particolare di eventi stocasticamente indipendenti si ha

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2).$$

Dalla formula (1.9) si ricava immediatamente

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}, \quad P(E_1) \neq 0,$$

che esprime la probabilità che si verifichi l'evento E_2 condizionatamente al fatto che si sia verificato l'evento E_1 (che ha quindi probabilità diversa da zero).

1.4 Teorema di Bayes

Consideriamo un evento E e supponiamo che esso possa essere originato dalla causa H_1 oppure dalla causa H_2, con H_1 e H_2 *incompatibili* (o si verifica l'uno o l'altro). Ci poniamo il seguente problema: ammesso che si sia verificato l'evento E, qual è la probabilità che esso sia stato originato dalla causa H_1? La risposta si trova tramite la Formula di Bayes

$$P(H_1|E) = \frac{P(H_1) \cdot P(E|H_1)}{P(H_1) \cdot P(E|H_1) + P(H_2) \cdot P(E|H_2)}, \tag{1.10}$$

che può essere generalizzata al caso di n possibili cause $H_1, H_2, \ldots, H_n$ tra loro *incompatibili*:

$$P(H_i|E) = \frac{P(H_i) \cdot P(E|H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(E|H_i)}.$$

Consideriamo il seguente esempio: ci sono due scatole, la prima contiene una pallina rossa ed una blu, l'altra tre rosse e una nera. *Qual è la probabilità che, avendo estratto una pallina rossa, essa provenga dalla prima scatola?* Applichiamo il teorema di Bayes: indichiamo con E l'evento *la pallina estratta è rossa*, con H_1 la causa *scatola 1* e con H_2 la causa *scatola 2*. Evidentemente siamo alla ricerca di $P(H_1|E)$. Le parti necessarie per l'applicazione del teorema sono:

- $P(H_1)$, ossia la probabilità che l'estrazione avvenga dalla prima scatola: essendo solo 2 le scatole, l'estrazione avviene o dalla prima o dalla seconda, quindi $P(H_1) = \frac{1}{2}$.
- $P(H_2)$, ossia la probabilità che l'estrazione avvenga dalla seconda scatola, come prima $P(H_2) = \frac{1}{2}$.
- $P(E|H_1)$, ossia la probabilità che una pallina rossa venga estratta dalla prima scatola: siccome nella prima scatola c'è una sola pallina rossa su un totale di due palline, $P(E|H_1) = \frac{1}{2}$.
- $P(E|H_2)$, ossia la probabilità che una pallina rossa venga estratta dalla seconda scatola: siccome nella seconda scatola ci sono 3 palline rosse su un totale di 4 palline, $P(E|H_2) = \frac{3}{4}$.

Applicando la formula (1.10) si ha

$$P(H_1|E) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{2}{5}.$$

Si osservi che la probabilità che la pallina rossa provenga dalla seconda scatola, $P(H_2|E)$, è

$$P(H_2|E) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{3}{5}.$$

Evidentemente, $P(H_1|E) + P(H_2|E) = 1$.

2 Variabili casuali

Una variabile casuale o aleatoria X è una variabile che può assumere un insieme di valori *discreti* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oppure *continui* $(x \in [a; b])$ ognuno dei quali corrisponde ad un evento che ha una determinata probabilità. Distinguiamo tra variabili casuali discrete e continue.

2.1 Variabili casuali discrete

Definizione 2.11 *Diciamo che X è una variabile casuale discreta se può assumere i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ al verificarsi degli eventi casuali* incompatibili e complementari *$E_1, E_2, \ldots, E_n$ le cui probabilità sono rispettivamente $p_1, p_2, \ldots, p_n$.*

Si osservi che *incompatibili* significa che il verificarsi di uno esclude automaticamente tutti gli altri, mentre *complementari* significa che l'evento dato dall'unione di tutti è l'evento certo in quanto

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) &= P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \end{aligned}$$

Per esempio, nel lancio di un dado i valori possibili x_i sono 1, 2, 3, 4, 5 e 6, l'evento E_i è *Esce il numero i* e la probabilità $p_i = \frac{1}{6}$ per ogni i.

Definizione 2.12 *Sia X una variabile casuale discreta che può assumere i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ disposti in* ordine crescente*. Chiamiamo* funzione di ripartizione *e la indichiamo con $F(x)$ la probabilità che la variabile casuale X assuma un valore non superiore a x.*

In pratica, se il valore x si trova tra x_i e x_{i+1},

$$F(x) = p_1 + p_2 + \ldots + p_i = \sum_{k=1}^{i} p_k.$$

Se pensiamo alle probabilità p_i come alle *frequenze relative* viste in statistica descrittiva, le probabilità stesse rivestono il ruolo di *pesi* e la funzione di ripartizione è l'equivalente delle *frequenze relative cumulate*. Dalla definizione di $F(x)$ discendono immediatamente le seguenti proprietà:

- $F(x)$ è definita per qualsiasi valore reale di x
- $0 \leq F(x) \leq 1$
- $F(x) = 0$ per $x < x_1$
- $F(x) = 1$ per $x \geq x_n$
- $F(x)$ è monotona *non decrescente* (o cresce o si mantiene costante)

La funzione di ripartizione è particolarmente utile per identificare la *mediana* di una variabile casuale discreta X.

Definizione 2.13 *Sia X una variabile casuale discreta che può assumere i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Chiamiamo* mediana *di X quel valore x_i per il quale risulta $F(x_i) \leq \frac{1}{2}$ e $F(x_{i+1}) > \frac{1}{2}$ dove $F(x)$ è la funzione di ripartizione.*

La moda, invece, è il valore più probabile.

Definizione 2.14 *Sia X una variabile casuale discreta che può assumere i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Chiamiamo* moda *di X il valore x_m al quale corrisponde la probabilità più alta p_m.*

Per una variabile casuale discreta X valgono le seguenti proprietà:

- Valor medio: $M(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$. Esso rappresenta la previsione teorica del risultato che si avrà facendo un grande numero di prove, supponendo che le frequenze con le quali si manifestano i diversi eventi coincidano con le probabilità degli eventi stessi. Si osservi che il valor medio $M(X)$ è la media pesata dei valori x_i con pesi p_i. Evidentemente, il valor medio di una variabile casuale costante è la costante stessa.

- Quadrato di una variabile casuale: si dice *quadrato della variabile casuale* X la variabile X^2 che assume i valori $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ al verificarsi degli eventi $E_1, E_2, \ldots, E_n$ le cui probabilità sono rispettivamente $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Evidentemente il valor medio di X^2 è $M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2$.

- Somma di una variabile casuale X e di una costante a: la variabile casuale $X + a$ assume i valori $x_1 + a, x_2 + a, \ldots, x_n + a$ al verificarsi degli eventi casuali $E_1, E_2, \ldots, E_n$ le cui probabilità sono rispettivamente $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Chiaramente $M(X + a) = M(X) + a$.

- Prodotto di una variabile casuale X per una costante a: la variabile casuale aX assume i valori $ax_1, ax_2, \ldots, ax_n$ al verificarsi degli eventi casuali $E_1, E_2, \ldots, E_n$ le cui probabilità sono rispettivamente $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Chiaramente $M(aX) = aM(X)$.

- Variabile casuale *scarto* di X: la variabile casuale $X - M(X)$, dove $M(X)$ è il valor medio della variabile casuale X, assume i valori $x_1 - M(X), x_2 - M(X), \ldots, x_n - M(X)$ al verificarsi degli eventi casuali $E_1, E_2, \ldots, E_n$ le cui probabilità sono rispettivamente $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Chiaramente $M(X - M(X)) = M(X) - M(X) = 0$.

- Variabile casuale *scarto al quadrato* di X: la variabile casuale $(X - M(X))^2$ assume i valori $(x_1 - M(X))^2, (x_2 - M(X))^2, \ldots, (x_n - M(X))^2$ al verificarsi degli eventi casuali $E_1, E_2, \ldots, E_n$ le cui probabilità sono rispettivamente $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

- *Varianza* della variabile casuale X: è il valor medio della variabile casuale *scarto al quadrato* di X: $\mathrm{var}(X) = M((X - M(X))^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - M(X))^2 = \sigma^2(X)$. Per quanto visto in statistica descrittiva, $\sigma^2(X) = \mathrm{var}(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.
  Per la varianza valgono le seguenti proprietà:
  - $\sigma^2(X) \geq 0$
  - Se a è una costante, $\sigma^2(a) = 0$
  - Se a è una costante, $\sigma^2(X + a) = \sigma^2(X)$
  - Se a è una costante, $\sigma^2(aX) = a^2\sigma^2(X)$

- *Scarto quadratico medio* della variabile casuale X: è la radice quadrata della varianza: $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$.

2.2 Variabili casuali continue

A differenza di una variabile casuale discreta, quella *continua* può assumere tutti i valori reali compresi in un dato intervallo.

Definizione 2.15 *Sia X una variabile casuale continua. Chiamiamo* funzione di ripartizione *e la indichiamo con $F(x)$ la probabilità che la variabile casuale X assuma un valore non superiore a x.*

Passando dal discreto al continuo, se X assume tutti i valori nell'intervallo $[a; b]$, allora si ha

- $F(x)$ è definita per qualsiasi valore reale di x
- $0 \leq F(x) \leq 1$
- $F(x) = 0$ per $x < a$
- $F(x) = 1$ per $x \geq b$
- $F(x)$ è monotona *non decrescente* (o cresce o si mantiene costante)

Per esempio, se $x_1 < x_2$, valgono le seguenti affermazioni:

- $F(x_1)$ è la probabilità che la variabile casuale X assuma un valore *non superiore* a x_1
- $1 - F(x_1)$ è la probabilità che la variabile casuale X assuma un valore *strettamente maggiore* di x_1 costante)
- $F(x_2) - F(x_1)$ è la probabilità che la variabile casuale X assuma un valore *compreso* tra x_1 e x_2.

Dall'ultima proprietà possiamo dire che $F(x + \Delta x) - F(x)$ è la probabilità che la variabile casuale X assuma un valore tra x e $x + \Delta x$. Se dividiamo questa differenza per Δx otteniamo una *densità di probabilità media*. Se poi prendiamo il limite per $\Delta x \to 0$, si ha

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x),$$

dove con $f(x)$ si è indicata la *derivata prima della funzione di ripartizione*.

Definizione 2.16 *La derivata della funzione di ripartizione $f(x) = F'(x)$ prende il nome di* densità di probabilità *relativa all'intervallo che va da x a $x + \mathrm{d}x$ e rappresenta la densità di probabilità* istantanea *in x.*

Dalla defінzione di *densità di probabilità* discendono le seguenti proprietà (dove $[a; b]$ è l'intervallo della variabile casuale continua X):

- $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$
- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 1$
- $F(x_2) - F(x_1) = \int_a^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Confrontando una variabile casuale continua con una discreta, si può pensare a $\mathrm{d}F(x) = F'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$ come il corrispettivo continuo della probabilità p_i di x_i.

Risultano allora definiti in modo naturale:

- $M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$
- $M(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$
- $M(X - M(X)) = \int_a^b [x - M(X)] \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$

- $\mathrm{var}(X) = M((X - M(X))^2) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$

così come la moda e la mediana:

Definizione 2.17 *La* moda *di una variabile casuale continua X è quel valore di $x \in [a; b]$ in corrispondenza del quale la densità di probabilità $f(x)$ è massima.*

Definizione 2.18 *La* mediana *di una variabile casuale continua X è quel valore x in corrispondenza del quale la funzione di ripartizione $F(x)$ è pari a $\frac{1}{2}$, ossia quel valore di $x \in [a; b]$ che soddisfa l'equazione $F(x) = \frac{1}{2}$.*

3 Distribuzioni tipiche di probabilità

Definizione 3.19 *Chiamiamo* distribuzione di probabilità *un modello matematico che mette in relazione i valori di una variabile casuale X con le probabilità che tali valori possano essere osservati.*

Come per le variabili casuali, possiamo distinguere le distribuzioni di probabilità in *discrete* e *continue*. Nel primo caso si utilizza la funzione di probabilità ($p_i = p(x_i)$), nel secondo caso la funzione densità di probabilità ($f(x)$).

3.1 Distribuzione binomiale (discreta)

La distribuzione binomiale serve per calcolare la probabilità che si verifichino k successi di un evento E quando vengono ripetute n prove tutte nelle stesse condizioni.
Consideriamo il seguente problema: un'urna contiene 12 palline, di cui 4 bianche e 8 nere. Se si estraggono 5 palline rimettendo ogni volta la pallina pescata dentro l'urna, qual è la probabilità che, ripetendo per 5 volte l'esperimento, si ottengano 3 palline bianche e 2 nere? (l'ordine in cui il colore viene estratto non conta) Si osservi che la domanda può essere riarrangiata in *qual è la probabilità che, ripetendo 5 prove, si ottengano 3 palline bianche e 2 non bianche?* Ragionando secondo lo schema del numero di casi favorevoli e numero dei casi possibili, si ha che:

- il numero dei casi possibili può essere valutato in questo modo: ci sono 12 possibilità per scegliere la prima pallina, 12 per scegliere la seconda, 12 per scegliere la terza, 12 per scegliere la quarta e 12 per scegliere la quinta, quindi in totale vi sono 12^5 casi possibili
- il numero dei casi favorevoli può essere valutato in questo modo: supponiamo che le 5 estrazioni di un caso favorevole abbiano prodotto la sequenza BBBNN. Allora ci sono 4 modi per scegliere la prima pallina bianca, 4 modi per scegliere la seconda pallina bianca e 4 per scegliere la terza bianca, poi vi sono 8 modi per scegliere la quarta pallina (che non è bianca) e 8 modi anche per scegliere la quinta pallina (anch'essa non bianca). Quindi *una sola sequenza favorevole* prevede $4^3 \cdot 8^2$ casi favorevoli. Tuttavia il numero di *sequenze favorevoli* è pari al numero di permutazioni con ripetizione di 5 oggetti (le 5 palline estratte) dove 3 sono bianche e 2 sono nere, $P_5^{2,3}$. Pertanto il numero *totale* di casi favorevoli è $v = P_5^{2,3} \cdot 4^3 \cdot 8^2$.
- la probabilità di estrarre, in 5 prove ripetute, 3 palline bianche e 2 nere è quindi $p = \frac{P_5^{2,3} \cdot 4^3 \cdot 8^2}{12^5} = 0.16461$.

Si osservi che l'ultimo calcolo può essere riscritto come

$$\begin{aligned} p &= \frac{P_5^{2,3} \cdot 4^3 \cdot 8^2}{12^5} \\ &= C_{5,3} \left(\frac{4}{12}\right)^3 \left(\frac{8}{12}\right)^2 \\ &= \binom{5}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2, \end{aligned}$$

dove

- $P_5^{2,3} = C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} =$ è il numero di combinazioni di 5 oggetti presi a gruppi di 3
- $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ è la probabilità di estrarre una pallina bianca in una singola estrazione (successo)
- $q = 1 - p = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ è la probabilità di estrarre una pallina *non* bianca in una singola estrazione (insuccesso)

Generalizzando, consideriamo un generico evento E che viene ripetuto n volte, sempre nelle stesse condizioni (come il lancio di una moneta o di un dado). Se p è la probabilità che E si verifichi *in una prova*, allora $q = 1 - p$ è la probabilità che E non si verifichi *in una prova*. Supponiamo ora che l'evento E si verifichi k volte su n ($k \leq n$):

- il numero di modi in cui questo può avvenire è $\binom{n}{k}$
- siccome in ognuno di questi $\binom{n}{k}$ modi l'evento si è verificato k volte e non si è verificato $n - k$ volte, allora la probabilità che in uno dei $\binom{n}{k}$ modi l'evento E si verifichi k volte e non si verifichi $n - k$ volte è (per il teorema della probabilità composta) $p^k \cdot q^{n-k}$
- la probabilità che l'evento E si verifichi k volte su n considerando tutti gli $\binom{n}{k}$ modi è quindi

$$p_k = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}.$$

Questa formula descrive la *distribuzione binomiale*. Il nome deriva dal fatto che una variabile casuale discreta S che conta il numero di successi in n prove ed assume i valori $0, 1, 2, \ldots, n$, ciascuno con probabilità $p_{n,0}, p_{n,1}, p_{n,1}, \ldots, p_{n,n}$ è caratterizzata dal fatto che la somma di tutte le probabilità è la potenza n del binomio $p + q$, $(p + q)^n$. Infatti,

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} = (p + q)^n = (p + 1 - p)^n = 1.$$

Riassumendo, consideriamo un evento E che ha probabilità p di verificarsi e probabilità $q = 1 - p$ di *non* verificarsi. Se ripetiamo l'esperimento n volte, allora la variabile casuale X che conta il numero di successi sulle n prove ripetute può assumere gli $n+1$ valori discreti $x_1 = 0, x_2 = 1, \ldots, x_n = n$. Ciascuno di questi valori ha probabilità $p_1, p_2, \ldots p_n$, dove $p_i = \binom{n}{i} p^i \cdot q^{n-i}$ e $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ (come appena dimostrato).

Se riportiamo sull'asse delle ascisse i valori x_i e sull'asse delle ordinate i valori p_i, otteniamo la *rappresentazione grafica della distribuzione binomiale*.

Si dimostra che, per la variabile casuale X che conta il numero di successi in n prove si ha

$$M(X) = n \cdot p, \quad \mathrm{var}(X) = n \cdot p \cdot q, \quad \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}.$$

Un caso molto particolare di distribuzione binomiale è quella del lancio di una *moneta non truccata*, dove gli eventi E (esce testa) e $\overline{E}$ (esce croce) sono equamente probabili in quanto $p = q = \frac{1}{2}$. In questo caso la formula diventa

$$\binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k \cdot p^{n-k} = \binom{n}{k} p^n = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}.$$

3.2 Distribuzione poissoniana (discreta)

Consideriamo la variabile casuale discreta X che assume i valori $0, 1, \ldots, k, \ldots$ tra 0 e $+\infty$ e sia p_k la probabilità che X assuma il valore k. Definiamo *distribuzione di Poisson* la distribuzione discreta di probabilità

$$p_k = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

dove λ è una costante positiva. Si può dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1.$$

Inoltre, per la distribuzione di Poisson si ha

$$M(X) = \mathrm{var}(X) = \lambda \quad \text{e} \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}.$$

L'utilità delle distribuzione poissoniana risiede nel fatto che essa approssima bene quella binomiale nel caso $n \to \infty$ e $p \to 0$. Si può dimostrare che, posto $\lambda = np$ con λ *finito*, si ha

$$n \to \infty \quad \Longrightarrow \quad \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \to \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Per esempio, sia $p = 0.005$ la probabilità che l'evento E si verifichi in *una prova*. Se vengono ripetute 300 prove, qual è la probabilità che l'evento E si verifichi almeno 2 volte? Si osservi che questo significa che ci interessano i casi in cui i successi sono $k > 2$, ossia

$$P(k \geq 2) = 1 - p_0 - p_1.$$

Siccome $n \to \infty$ e $p \to 0$, poniamo $\lambda = np = 1.5$ e sfruttiamo il fatto che per $n \to \infty$

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

$$P(k > 2) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} - \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^1}{1!} = 1 - \mathrm{e}^{-1.5} (1 + 1.5)$$

da cui $P(k > 2) = 0.44217$.

3.3 Distribuzione uniforme (continua)

Consideriamo una variabile casuale continua X che assume tutti i valori compresi nell'intervallo $[a; b]$ con funzione di densità di probabilità costante, $f(x) = k$. Siccome per $f(x)$ deve essere verificata la condizione

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = 1 \iff \int_a^b k \, \mathrm{d}x = 1 \implies k = \frac{1}{b-a},$$

pertanto definiamo *distribuzione uniforme* quella caratterizzata dalla funzione densità di probabilità

$$f(x) = \frac{1}{b-a}.$$

La conseguente funzione di ripartizione vale, per $x \geq a$,

$$F(x) = \int_a^x f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{x-a}{b-a},$$

da cui il caso generale

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{per} \quad a \leq x < b \\ 1 & \text{per} \quad x \geq b \end{cases}$$

Possiamo calcolare agevolmente il valor medio

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \int_a^b x \, \mathrm{d}x = \frac{a+b}{2},$$

che risulta essere semplicemente la media dei valori estremi. Con altrettanta facilità è possibile calcolare il valore medio del quadrato di X, che poi useremo per il calcolo della varianza:

$$M(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Utilizzando il fatto che $\mathrm{var}(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ si ha

$$\mathrm{var}(X) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12},$$

da cui

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{var}(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

3.4 Distribuzione gaussiana (continua)

Consideriamo la variabile casuale continua X che assume tutti i valori reali (tra $-\infty$ e $+\infty$). Difiniamo *distribuzione gaussiana* o *distribuzione normale* quella caratterizzata dalla funzione densità di probabilità

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

dove

$$\mu = M(X) \quad \text{e} \quad \sigma = \sigma(X).$$

Questa funzione densità di probabilità, che è ovviamente sempre positiva, raggiunge il valore massimo $f_{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ in $x = \mu$ e presenta due flessi in $x = \mu \pm \sigma$. Inoltre $f(x)$ è simmetrica rispetto a $x = \mu$ e al crescere di σ il suo massimo diminuisce e contemporaneamente la campana "si allarga". Questo è dovuto essenzialmente al fatto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}x = 1.$$

La funzione di ripartizione è

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}t.$$

Attraverso una semplice trasformazione è possibile passare dalla variabile casuale gaussiana X di media $M(X) = \mu$ e deviazione standard $\sigma(X) = \sigma$ alla variabile casuale *gaussiana standardizzata* Z avente media $M(Z) = 0$ e deviazione standard $\sigma(Z) = 1$. La sostituzione che rende possibile questo è

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

Infatti, essendo $\mathrm{d}x = \sigma \, \mathrm{d}z$, si ha

$$f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \sigma \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-z^2/2} \, \mathrm{d}z,$$

da cui la *distribuzione gaussiana standardizzata*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-z^2/2}$$

e la relativa funzione di ripartizione

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t.$$

Anche per la distribuzione gaussiana standardizzata vale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-z^2/2} = 1.$$

È immediato verificare che il valor medio di Z è nullo:

$$\begin{aligned} M(Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot f(z) \, \mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z\mathrm{e}^{-z^2/2} \, \mathrm{d}z \\ &= \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-z^2/2} \right]_a^b = 0, \end{aligned}$$

mentre per il calcolo della varianza sfruttiamo, come fatto in precedenza, il fatto che $\mathrm{var}(Z) = M(Z^2) - [M(Z)]^2$. Calcoliamo dapprima $M(Z^2)$:

$$\begin{aligned} M(Z^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \cdot f(z) \, \mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2\mathrm{e}^{-z^2/2} \, \mathrm{d}z \\ &= \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-z\mathrm{e}^{-z^2/2} + \int_a^b \mathrm{e}^{-z^2/2} \right]_a^b \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-z^2/2} = 1, \end{aligned}$$

da cui

$$\mathrm{var}(Z) = M(Z^2) - [M(Z)]^2 = 1 \quad \text{e} \quad \sigma(Z) = \sqrt{\mathrm{var}(Z)} = 1.$$

Per la distribuzione gaussiana standardizzata valgono le seguenti proprietà:

- $f(z)$ è una funzione pari e sempre positiva
- la probabilità che la variabile casuale standardizzata Z assuma un valore tra $-\infty$ e $+\infty$ (evento certo) è

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \, \mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-z^2/2} = 1$$

- la probabilità che la variabile casuale standardizzata Z assuma un valore non positivo ($Z \leq 0$) è

$$P(Z \leq z_1) = F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-t^2/2} = \frac{1}{2}$$

- la probabilità che la variabile casuale standardizzata Z assuma un valore $Z \leq z_1$ è

$$P(Z \leq z_1) = F(z_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_1} \mathrm{e}^{-t^2/2}$$

- la probabilità che la variabile casuale standardizzata Z assuma un valore tra z_1 e z_2 (con $z_1 < z_2$) è

$$P(z_1 \leq Z \leq z_2) = F(z_2) - F(z_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{e}^{-t^2/2}$$

- gli ultimi due integrali *non sono calcolabili analiticamente* per cui bisogna ricorrere a tabelle oppure all'integrazione numerica (metodo dei trapezi o di Cavalieri-Simpson). La tabella 1 riporta $F(z)$ per $0 \leq z < 4$ ad intervalli $\Delta z = 0.01$.
- se $a > 0$, la probabilità che la variabile casuale standardizzata Z assuma un valore tra $-a$ e a è

$$P(-a \leq Z \leq a) = 2\,(F(a) - F(0)) = 2 \cdot F(a) - 1,$$

  in quanto $f(z)$ è una funzione pari e $F(0) = \frac{1}{2}$
- la probabilità che la variabile casuale standardizzata Z assuma un valore tra $-n$ e n con $n = 1, 2, 3$ è (si veda la tabella 1)

$$\begin{aligned} P(-1 \leq Z \leq 1) &= 2 \cdot F(1) - 1 = 0.68269 \\ P(-2 \leq Z \leq 2) &= 2 \cdot F(2) - 1 = 0.95450 \\ P(-3 \leq Z \leq 3) &= 2 \cdot F(3) - 1 = 0.99730 \end{aligned}$$

  pertanto si può dire che il valore assunto dalla variabile gaussiana standardizzata è *quasi certamente* compreso tra -3 e 3.

Tornando da Z (variabile casuale gaussiana standardizzata) a X (variabile casuale gaussiana) si ha

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad \Longrightarrow \quad x = \mu + z\sigma,$$

pertanto la probabilità che la variabile casuale gaussiana X si trovi nell'intervallo $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$ è

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973,$$

ossia **il valore assunto dalla variabile gaussiana X è *quasi certamente* compreso tra $\mu - 3\sigma$ e $\mu + 3\sigma$.**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.10	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.20	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.30	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.40	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.50	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.60	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.70	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.80	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.90	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.00	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.10	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.20	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.30	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.40	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.50	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.60	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.70	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.80	0.96407	0.96485	0.96562	0.96637	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.90	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.00	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.10	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.20	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.30	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.40	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.50	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99491	0.99506	0.99520
2.60	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.70	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.80	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.90	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.00	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.10	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.20	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.30	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.40	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.50	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.60	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.70	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.80	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.90	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Tabella 1: Tabella della funzione di ripartizione $F(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{z} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, \mathrm{d}t$ per la variabile gaussiana standardizzata

4 Probabilità e geometria

La probabilità intesa come numero di casi favorevoli diviso per il numero di casi possibili può essere estesa a problemi del tipo: se si sceglie un punto a caso di un quadrato di lato ℓ, qual è la probabilità che esso si trovi nel cerchio di diametro ℓ centrato nel centro del quadrato? La probabilità è

$$p = \frac{A_{\text{cerchio}}}{A_{\text{quadrato}}} = \frac{\pi\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{\ell^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854.$$

5 Esercizi

1. Alla finale dei 200 m piani partecipano 8 atleti, fra i quali figurano i nostri amici Antonio e Pietro. Sapendo che sul podio finiscono i primi 3 classificati e ammesso che tutti gli alteti abbiamo le stesse possibilità, calcolare la probabilità che:
(a) sul podio finiscano sia Antonio che Pietro;
(b) almeno uno dei due finisca sul podio;
(c) nessuno dei due finisca sul podio.
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2004, sessione supplettiva)

2. Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Qual è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2011, sessione ordinaria)

3. Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenti la risposta.
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2010, sessione ordinaria)

4. Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25.75 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Qual è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati)
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2009, sessione ordinaria)

5. In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse? *(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2008, sessione ordinaria)*

6. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$
Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di μ, σ e σ^2 e come tali parametri influenzino il grafico di $f(x)$.
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2007, sessione ordinaria)

7. Si scelga a caso un punto P all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di P da ogni vertice sia maggiore di 1.
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2007, sessione ordinaria)

8. Bruno de Finetti (1906-1985), tra i pi illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda: *che cos'è la probabilità?* era solito rispondere: *la probabilità non esiste!* Quale significato puoi attribuire a tale risposta? È possibile collegarla a una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2006, sessione ordinaria)

9. Un tiratore spara ripetutamente a un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0.3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità 0.99 di colpirlo almeno una volta?
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2006, sessione ordinaria)

10. Qual è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti qual è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E qual è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci?
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2005, sessione ordinaria)

11. Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune sono difettose. A contiene 2000 lampade di cui il 5% sono difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose. Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Qual è la probabilità che essa sia difettosa?
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2003, sessione ordinaria)

12. Il seguente è uno dei celebri problemi del *Cavaliere di Méré* (1610-1685), amico di Blaise Pascal: giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2002, sessione ordinaria)

13. Assumendo che i risultati "X", "1", "2" delle 13 partite di Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità.
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2002, sessione ordinaria)

14. Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i 16 allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?

(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2001, sessione ordinaria)

15. In un contenitore sono raccolte alcune matite colorate così ripartite per colore: 12 matite blu, 9 matite marroni, 4 matite nere, 5 matite verdi. Scegliendo a caso tre matite, calcolare la probabilitè che:
(a) tutte tre le matite siano dello stesso colore;
(b) almeno due matite siano dello stesso colore;
(c) le tre matite non siano di colore verde.

16. Si estraggono a caso cinque carte da un mazzo da quaranta (10 carte per ciascun seme, 4 semi, due colori).
(a) Qual è la probabilità che tra le carte estratte ci siano *solo* due assi dello stesso colore?
(b) Qual è probabilitè che ci siano *almeno* due assi?

17. Una rappresentanza di 5 persone deve essere scelta a caso tra dieci uomini e tre donne. Qual è la probabilità che il comitato sia costituito da tre uomini e due donne?
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2010, sessione supplettiva)

18. Un'urna contiene delle palline che possono essere bianche o nere, di vetro o di plastica. Precisamente: 135 sono bianche, 115 di vetro, 45 palline di vetro sono bianche e 80 palline di plastica sono nere. Si estrae a caso una pallina: qual è la probabilità che sia nera e di vetro?
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2005, sessione supplettiva)

19. Una classe è formata da 28 alunni, di cui 16 femmine e 12 maschi. Tra le femmine ci sono due "Maria" e fra i maschi un solo "Antonio". Si deve formare una delegazione formata da due femmine e due maschi. Qual è la probabilità che la delegazione comprenda "Antonio" ed almeno una "Maria"?
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2006 sessione straordinaria)

20. In ciascuna di tre buste uguali vi sono due cartoncini: in una busta essi sono bianchi, in un'altra sono neri e nella terza sono uno bianco e l'altro nero. Si estrae, a caso, una busta e, da essa, un cartoncino. Qual è la probabilità che il cartoncino rimasto in questa busta sia dello stesso colore di quello estratto?
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2006 sessione supplettiva)

21. Nelle ultime 10 estrazioni del lotto non è uscito il "47" sullla ruota di Napoli. Qual è la probabilità che non esca neppure nelle prossime 10 estrazioni ed esca, invece, nell'undicesima estrazione?
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2005, sessione straordinaria)

22. Da un'urna contenente 90 palline numerate se ne estraggono quattro senza reimbussolamento. Supponendo che l'ordine in cui i numeri vengono estratti sia irrilevante, come è nel gioco dell'Enalotto, si calcoli la probabilità che esca la quaterna $(7, 47, 67, 87)$.
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2002, sessione supplettiva)

23. Un'urna contiene 20 palline, che possono essere rosse o azzurre. Quante sono quelle azzurre se, estraendo 2 palline senza riporre la prima estratta, la probabilità di estrarre almeno una pallina azzurra è $\frac{27}{38}$?
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2002, sessione supplettiva)

24. Un'urna contiene 30 palline uguali in tutto e per tutto tranne che per il colore: infatti 18 sono bianche e 12 nere. Vengono estratte a caso, una dopo l'altra, due palline. Determinare la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca sapendo che la prima:
(a) è bianca e viene rimessa nell'urna;
(b) è bianca e non viene rimessa nell'urna;
(c) è messa da parte senza guardarne il colore.
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2003, sessione supplettiva)

25. Un bersaglio è costituito da tre cerchi concentrici i cui raggi misurano rispettivamente 5, 3 e 1. Un arciere ha probabilità $\frac{1}{2}$ di colpire il bersaglio. Qual è la probabilità che lo colpisca in un punto appartenente al cerchio di raggio 3 ma non a quello di raggio 1?
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2011, sessione supplettiva)

26. Un meteorite cade sulla Terra: qual è la probabilità che l'impatto avvenga tra l'equatore ed il Tropico del Cancro (latitudine $\lambda = 22°27'$ nord)?
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2008, sessione supplettiva)

27. Sono dati una sfera di raggio r, il cubo in essa inscritto ed il cono circolare retto inscritto nel cubo. Si scelga a caso un punto all'interno della sfera: si determini la probabilità che tale punto risulti interno al cono.
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2009, sessione supplettiva)

28. Si scelga a caso un punto P interno ad un cerchio. Si determini la probabilità che esso sia più vicino al centro che alla circonferenza.
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2007, sessione supplettiva)

29. Sia P un punto fissato su una circonferenza. Qual è la probabilità che, prendendo su di essa due punti a caso A e B, l'angolo $A\hat{P}B$ sia acuto? Si illustri il ragionamento seguito.
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2011, sessione supplettiva)

30. Sono dati un ottaedro regolare di spigolo ℓ e la sfera in esso inscritta. Si scelga un punto a caso all'interno dell'ottaedro e si determini la probabilità che tale punto risulti interno alla sfera.
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2010, sessione supplettiva)

31. Nel gioco del Lotto, qual è la probabilità dell'estrazione di un numero assegnato? Quante estrazioni occorre effettuare perché si possa aspettare, con una probabilità $p = \frac{1}{2}$ assegnata, di vederlo uscire almeno una

volta?
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2009, sessione supplettiva)

Soluzione/risoluzione degli esercizi

1. Applicando la definizione classica di probabilità si ha:
(a) 8 atleti possono dare origine a 336 podi in quando si tratta di disporre 8 oggetti a gruppo di 3 (l'ordine conta), $D_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. I casi favorevoli in cui sia Antonio che Pietro finiscono sul podio sono 36 in quanto fissato il terzo atleta che sale sul podio, i podi possibili sono le permutazioni di 3 oggetti, ossia $3! = 3 \cdot 2 = 6$. Tuttavia vi sono 6 possibili atleti che possono andare sul podio assieme ad Antonio e Pietro, pertanto i casi favorevoli sono $6 \cdot 6 = 36$. La probabilità è quindi $p = \frac{36}{336} = \frac{3}{28}$
(b) I casi possibili sono sempre 336, ma i casi favorevoli sono di più e sono la somma dei casi in cui salgono sul podio sia Antonio che Pietro (caso precedente, 36) e dei casi in cui sale uno solo dei due assieme ad altri 2 dei 6 atleti rimanenti. Questi ultimi sono i modi in cui i 3 atleti sul podio possono permutare ($3 \cdot 2 = 6$) moltiplicati per il numero di modi in cui si possono disporre 2 dei rimanenti 6 atleti , ossia $D_{6,2}$ Il numero di casi favorevoli totale è quindi $n = 36 + 3 \cdot 2 \cdot D_{6,2} = 36 + 6 \cdot 30 = 216$ e la probabilità cercata è $p = \frac{}{2}16336 = \frac{9}{14}$.
(c) Si osservi che l'evento "*nessuno dei due finisca sul podio*" e la negazione dell'evento "*almeno uno dei due finisca sul podio*", ossia dell'evento del caso (b). La probabilità cercata è quindi $p = 1 - \frac{9}{14} = \frac{5}{14}$.

2. Consideriamo gli eventi:
E_1: *nessuna risposta esatta*
E_2: *almeno una risposta esatta*
E: *almeno due risposte esatte*
La probabilità cercata è $P(E)$, tuttavia E è la negazione degli eventi incompatibili E_1 ed E_2, $E = \overline{E_1 \cup E_2}$. Pertanto,
$$P(E) = 1 - P(E_1 \cup E_2) = 1 - (P(E_1) + P(E_2)).$$
Essendo
$$P(E_1) = \frac{3^{10}}{4^{10}} \quad \text{e} \quad P(E_2) = 10 \cdot \frac{3^9}{4^{10}}$$
si ha
$$P(E) = 1 - \frac{3^{10}}{4^{10}} - 10 \cdot \frac{3^9}{4^{10}} \approx 0.75597.$$

3. Anna ha due figli, che indichiamo con F_1 e F_2. Poiché Anna è stata invitata alla festa, ha certamente una figlia femmina, pertanto ci sono solo 3 possibilità:
F_1 e F_2 sono entrambe femmine,
F_1 è maschio e F_2 è femmina,
F_1 è femmina e F_2 è maschio.
Il numero dei casi possibili è 3 (e sono equiprobabili), mentre il numero dei casi favorevoli è uno (il primo), pertanto la probabilità certata è $p = \frac{1}{3}$.

4. Si osservi che, affinché la moneta cada all'interno della mattonella di lato $\ell = 10$ cm, è necessario che il suo centro disti dal bordo della mattonella almeno una lunghezza pari al raggio r della moneta. In questo modo il centro della moneta si trova all'interno del quadrato di lato $\ell - 2r = 10 - 2.575 = 7.425$ cm. La probabilità cercata è quindi l'area della regione dove può trovarsi il centro diviso l'area della mattonella:
$$p = \frac{(\ell - 2r)^2}{\ell^2} = \frac{7.425^2}{100} = \frac{55.131}{100} = 55.13\%.$$

5. La probabilitè p è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli f ed il numero dei casi possibili n. I casi possibili, vale a dire tutti i gruppi possibili di 8 studenti scelti a caso su un totale di 20 studenti, sono $n = \binom{20}{8} = \frac{20!}{8!12!} = 125\,970$. I casi favorevoli si possono calcolare come prodotto tra il numero dei gruppi possibili di 4 studenti maschi sui 12 totali per il numero dei gruppi possibili di 4 studentesse sulle 8 totali, ovvero:
$$f = \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} = \frac{12!}{4! \cdot 8!} \cdot \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 495 \cdot 70 = 34\,650.$$
In definitiva la probabilità cercata è
$$p = \frac{34\,650}{125\,970} \approx 27.51\%.$$

6. Vedi teoria.

7. L'area del triangolo equilatero è $A = \ell^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$. L'area entro la quale può cadere il punto P è l'insieme dei punti del triangolo che sono esterni ai cerchi unitari aventi i centri nei 3 vertici. Poiché ciascuno di questi cerchi condivide con il triangolo un settore circolare di raggio 1 e angolo al centro $\alpha = \frac{\pi}{3}$, l'area entro la quale può cadere il punto P è
$$\frac{9\sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}.$$
La probabilità cercata è quindi
$$p = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{4}} \approx 0.597.$$

8. Tra le varie definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte vi è quella soggettiva che si usa per gli eventi per i quali non è possibile calcolare teoricamente il numero dei casi favorevoli e possibili e non si pu sottoporre l'evento a prove sperimentali ripetute nelle stesse condizioni. Essa viene applicata in vari casi reali, ad esempio se si vuole stimare la probabilità di vittoria di una squadra di calcio a un torneo. La valutazione soggettiva porta a considerare il calcolo della probabilità come a una scommessa; essa è definita come *la misura del grado di fiducia che una persona attribuisce al verificarsi di un evento E secondo la sua opinione*. Il valore si ottiene effettuando il rapporto tra la somma P che si è disposti a pagare in una

scommessa e la somma V che si riceverà nel caso in cui l'evento si verifichi. Bruno De Finetti è il matematico italiano che ha fissato i fondamenti della concezione soggettiva della probabilità. Affermando che la probabilità non esiste intendeva forse dire che non esiste in modo oggettivo, cioè uguale per tutti, poiché, come detto, in varie situazioni è possibile esprimere solo valutazioni soggettive e quindi personali sul verificarsi di un evento.

9. La probabilità di colpire il bersaglio è $p = 0.3$ e di mancarlo è $q = 1 - p = 0.7$. La probabilità di non colpirlo mai in n tiri è $q^n = (0.7)^n$, perciò quella di colpire almeno una volta in n tiri è la probabilità contraria $1-(0.7)^n$. Si tratta ora di determinare il minimo intero n tale che:
$$1 - (0.7)^n \geq 0.99 \iff (0.7)^n \leq 0.01$$
da cui, passando al logaritmo in base 10
$$\operatorname{Log}(0.7)^n \leq \operatorname{Log} 0.01 \implies n \geq \frac{-2}{\operatorname{Log}(0.7)} \approx 12.911$$
ossia $n \geq 13$.

10. (a) Ci sono tre casi per cui la somma dei punteggi dei due dadi è 10: (4,6); (5,5) e (6,4). I casi possibili, lanciando 2 dadi, sono 36, pertanto
$$p = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$
(b) Si tratta di applicare pedissequamente la formuletta
$$p = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
da cui
$$p = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{12}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{12}\right)^4 \approx 0.073549$$
(c) La terza probabilità richiesta è complementare alla probabilità di ottenere nessun successo oppure un solo successo in 6 lanci:
$$p = 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{1}{12}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{12}\right)^6 - \binom{6}{1}\left(\frac{1}{12}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{12}\right)^5$$
da cui $p \approx 0.083094$.

11. Siano A, B, C, ed E gli eventi così definiti:
A: *estrazione di una lampada dalla scatola* A;
B: *estrazione di una lampada dalla scatola* B;
C: *estrazione di una lampada dalla scatola* C;
E: *estrazione di una lampada difettosa.*
Allora
$$\begin{aligned} P(E) &= P((A \cap E) \cup (B \cap E) \cup (C \cap E)) \\ &= P(A) \cdot P(E|A) + P(B) \cdot P(E|C) + \\ &\ P(C) \cdot P(E|C) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} \approx 0.1167. \end{aligned}$$

12. (a) Calcoliamo la probabilità che, lanciando quattro volte un dado, esca almeno una volta il numero 1. La probabilità che in un lancio esca 1 è $\frac{1}{6}$. L'evento in questione è la negazione dell'evento *non esce mai il numero 1.* La probabilità di quest'ultimo è la probabilità che, ad ogni lancio, esca uno dei rimanenti 5 numeri, ossia $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Pertanto la probabilità cercata è
$$p_a = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.51775.$$
(b) La probabilità che, in un singolo lancio, esca un doppio uno è $\frac{1}{36}$. L'evento in questione è, nuovamente, la negazione dell'evento *non esce mai il doppio 1*, per cui, ragionando come in precedenza, la probabilità cercata è
$$p_b = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.49140.$$
Siccome $p_a > p_b$, è più probabile che esca almeno un 1 in 4 lanci che un almeno un doppio uno in 24 lanci.

13. Consideriamo l'evento *la partita finisce in parità* e calcoliamo la probabilità che questo succeda in 12 delle 13 prove ripetute. Essendo $n = 13$, $k = 12$, $p = \frac{1}{3}$ e $q = 1 - p = \frac{2}{3}$, si ha
$$p = \binom{13}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{12}\left(\frac{2}{3}\right)^1 = 13 \cdot \frac{2}{3^{13}} = 1.6308 \cdot 10^{-5}.$$

14. Calcoliamo la probabilità come rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili.
Casi possibili: gruppi di 3 persone scelte tra 16, ossia $C_{16,3} = \binom{16}{3}$.
Casi favorevoli: gruppi di 3 persone scelte tra 12 (tutti i maschi), ossia $C_{12,3} = \binom{12}{3}$.
Pertanto,
$$p = \frac{\binom{16}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{\frac{16!}{3! \cdot 13!}}{\frac{12!}{3! \cdot 9!}} = \frac{1320}{3360} = \frac{11}{28} \approx 0.39286.$$

15. Il numero totale di matite è 30.
(a) L'evento è *le tre matite sono tutte blu oppure tutte marroni oppure tutte nere oppure tutte verdi*, quindi la sua probabilità è la somma delle probabilità di pescare tre matite blu, tre matite marroni, tre matite nere, tre matite verdi da un totale di 30:
$$p_a = \frac{C_{12,3}}{C_{30,3}} + \frac{C_{9,3}}{C_{30,3}} + \frac{C_{4,3}}{C_{30,3}} + \frac{C_{5,3}}{C_{30,3}} = \frac{159}{2030} \approx 0.078325.$$
Alternativamente, si può pensare di calcolare questa probabilità come
$$p_a = \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} \cdot \frac{10}{28} + \frac{9}{30} \cdot \frac{8}{29} \cdot \frac{7}{28} + \frac{4}{30} \cdot \frac{3}{29} \cdot \frac{2}{28} + \frac{5}{30} \cdot \frac{4}{29} \cdot \frac{3}{28},$$
da cui $p_a = \dfrac{159}{2030} \approx 0.078325$.
(b) La probabilità di questo evento è la somma tra quella dell'evento precedente e della probabilità di avere due matite dello stesso colore ma la terza di un colore diverso. Si osservi che la probabilità di estrarre,

per esempio, 2 matite blu (che sono 12 su 30) e una di un altro colore è:

$$p = \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} \cdot \frac{18}{28} + \frac{12}{30} \cdot \frac{18}{29} \cdot \frac{11}{28} + \frac{18}{30} \cdot \frac{12}{29} \cdot \frac{11}{28},$$

in quanto la matita di un altro colore può essere estratta come ultima, penultima o prima. Pertanto

$$\begin{aligned} p_b &= p_a + 3\left(\frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} \cdot \frac{18}{28} + \frac{9}{30} \cdot \frac{8}{29} \cdot \frac{21}{28} + \right. \\ &\left. \frac{4}{30} \cdot \frac{3}{29} \cdot \frac{26}{28} + \frac{5}{30} \cdot \frac{4}{29} \cdot \frac{25}{28}\right) \\ &= \frac{159}{2030} + \frac{235}{406} = \frac{23}{35} \approx 0.65714. \end{aligned}$$

(c) Consideriamo due gruppi di matite: 5 verdi e 25 non verdi, allora la probabilità di estrarre a caso 3 matite non verdi è

$$p_c = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29} \cdot \frac{23}{28} = \frac{115}{203} \approx 0.56650$$

16. (a) Supponiamo di estrarre due assi rossi e altre 3 carte (nessuna delle quali deve essere un asso): i modi in cui questi 5 oggetti possono essere combinati tra loro sono $P_5^{2,3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$. La probabilità di estrarre 2 assi rossi e altre 3 carte di cui nessuna deve essere un asso è quindi

$$p = 10 \cdot \frac{2}{40} \cdot \frac{1}{39} \cdot \frac{36}{38} \cdot \frac{35}{37} \cdot \frac{34}{36} = \frac{595}{54834},$$

siccome però ci interessa la probabilità di estrarre solo due assi dello stesso colore (rosso o nero) si ha

$$p_a = \frac{595}{54834} + \frac{595}{54834} = \frac{595}{27417} \approx 0.021702.$$

(b) Avere almeno 2 assi significa avere 2 assi e altre 3 carte, oppure 3 assi e altre 2 carte oppure 4 assi e un'altra carta:

$$\begin{aligned} p_b &= \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{36}{38} \cdot \frac{35}{37} \cdot \frac{34}{36}\right) + \\ &\quad \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} \cdot \frac{36}{37} \cdot \frac{35}{36}\right) + \\ &\quad \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{36}{36}\right) + \\ &= \frac{97}{1406} \approx 0.068990. \end{aligned}$$

17. 27.97%.

18. $\frac{14}{57}$

19. $\frac{29}{720}$

20. $\frac{2}{3}$

21. 0.0314

22. $3.91 \cdot 10^{-7}$

23. 9

24. (a) $\frac{3}{5}$; (b) $\frac{17}{29}$; (c) $\frac{3}{5}$.

25. $\frac{4}{25}$

26. $\frac{\sin\lambda}{2}$

27. $\frac{\sqrt{3}}{18}$

28. $\frac{1}{4}$

29. $\frac{3}{4}$

30. $\pi\frac{\sqrt{3}}{9}$

31. $\frac{1}{90}$; 63 estrazioni