CAPITOLO 4

Correnti incomprimibili non viscose irrotazionali

Introduzione In questo capitolo studieremo un tipo particolare di correnti incomprimibili dei fluidi supposti non viscosi quando la vorticità è ovunque nulla. Queste correnti sono chiamate irrotazionali e, sotto una determinata condizione, il loro campo di moto può essere descritto attraverso una opportuna funzione scalare, chiamata potenziale cinetico. Ricaveremo l'equazione che governa questa variabile ausiliaria e mostreremo come l'equazione della quantità di moto, una volta determinata la velocità, diventi un'equazione per la sola incognita pressione che può essere risolta in modo esplicito anche nel caso generale di correnti non stazionarie. Il capitolo contiene anche le soluzioni di alcuni problemi di correnti stazionarie incomprimibili non viscose e irrotazionali attorno a corpi di forma molto semplice, come una sfera e un cilindro di sezione circolare. In entrambi i casi il problema è affrontato ricorrendo al metodo di separazione delle variabili. In particolare, nel caso del cilindro si scopre l'esistenza di un insieme (famiglia a un parametro) di infiniti campi di velocità irrotazionali che soddisfano la condizione di non penetrazione sulla superficie del cilindro e di corrente uniforme a grande distanza dal corpo. Questa famiglia gioca un ruolo fondamentale quando si considera la corrente incomprimibile irrotazionale di un fluido supposto idealmente non viscoso attorno ai profili alari che sono di fondamentale interesse per l'aerodinamica.

4.1 Irrotazionalità della corrente e potenziale della velocità

Le correnti incomprimibili di un fluido non viscoso sono governate dalle equazioni di Eulero descritte nel paragrafo 3.3, che sono riscritte qui per comodità:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} + \frac{\boldsymbol{\nabla} P}{\overline{\rho}} = -\boldsymbol{\nabla}\chi,$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0,$$

dove χ rappresenta l'energia potenziale per unità di massa del campo di forze di volume esterne, che si è supposto conservativo. Come si è visto nel paragrafo 3.5, il termine $(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}$ dell'equazione della quantità di moto può essere sempre riscritto come $(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u})\times\mathbf{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\big(|\mathbf{u}|^2\big)$ per cui l'equazione precedente si potrà scrivere anche nella forma seguente:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u})\times\mathbf{u} = -\boldsymbol{\nabla}\bigg(\frac{P}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \chi\bigg).$$

Supponiamo ora che la corrente sia **irrotazionale**, ovvero che il campo della vorticità $\omega \equiv \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}$ sia sempre nullo ovunque:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u} = 0,$$

ossia in ogni punto $\mathbf{r}$ del campo di moto e per ogni istante $t > 0$. In realtà non è necessario assumere per ipotesi questa condizione nella sua interezza ma è sufficiente che la vorticità sia nulla nell'istante iniziale $t = 0$, ovverosia

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}_0 = 0,$$

dove $\mathbf{u}_0$ è il campo di velocità iniziale. Infatti è possibile dimostrare che la forma dell'equazione della quantità moto per la corrente incomprimibile di un fluido non viscoso garantisce che la vorticità rimarrà nulla in ogni istante successivo $t > 0$.

In virtù dell'ipotesi di irrotazionalità della corrente, $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u} = 0$, l'equazione della quantità di moto si semplificherà allora in

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\bigg(\frac{P}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \chi\bigg).$$

Inoltre la condizione d'irrotazionalità $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u} = 0$ permette un'altra semplificazione ancora più importante nella descrizione matematica del moto del fluido. Tale semplificazione del modello matematico è sempre permessa quando la regione in cui si muove il fluido è un dominio **semplicemente connesso**, ovverosia privo di fori che trapassano la regione stessa, vedi appendice B. Sotto questa ipotesi il campo della velocità irrotazionale $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ può essere espresso, ad ogni istante t, come il gradiente di una funzione scalare $\phi(\mathbf{r}, t)$ mediante la relazione

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}\phi,$$

e la funzione $\phi(\mathbf{r}, t)$ è chiamata **potenziale cinetico**, o **potenziale della velocità** oppure più semplicemente **potenziale**. L'introduzione del potenziale corrisponde a un cambiamento di variabile nel senso che ϕ è una nuova incognita che si può usare al posto della velocità $\mathbf{u}$. Il vantaggio di sostituire $\mathbf{u}$ con ϕ sta nel passare da un'incognita *vettoriale* a un'incognita *scalare*. Vedremo fra un momento che il costo di questa semplificazione sarà un aumento dell'ordine del problema differenziale da risolvere.

4.2 Corrente incomprimibile ed equazione di Laplace

Sfruttando la rappresentazione della velocità irrotazionale $\mathbf{u}$ in termini del potenziale, la condizione di incomprimibilità $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0$ diventa

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi = \nabla^2\phi = 0.$$

Questa è l'**equazione di Laplace** per il potenziale ϕ che deve essere completata da opportune condizioni al contorno. Nel paragrafo 3.4 abbiamo visto che per una corrente incomprimibile di un fluido non viscoso la condizione al contorno da imporre sulla velocità è $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{r},t)_{|S} = b_n(\mathbf{r}_S,t)$, dove b_n è la componente normale della velocità specificata su S. Scrivendo questa condizione come condizione al contorno per il potenziale ϕ si ottiene

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{r},t)}{\partial n}_{|S} = b_n(\mathbf{r}_S,t),$$

dove $\frac{\partial}{\partial n}$ indica la **derivata normale** sulla frontiera S, ovvero la componente del gradiente normale alla superficie in ogni suo punto: $\frac{\partial}{\partial n} \equiv \hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}$. Questo tipo di condizione al contorno che impone il valore della derivata normale si chiama **condizione di Neumann**. La condizione che impone invece il valore dell'incognita sul contorno si chiama **condizione di Dirichlet**, ma essa non interviene nel caso del potenziale della velocità.

L'equazione di Laplace completata della condizione di Neumann conduce al seguente **problema di Neumann** (funzione del tempo)

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2\phi = 0,\\ &\frac{\partial\phi}{\partial n}_{|S} = b_n(\mathbf{r}_S,t). \end{aligned}}$$

Si tratta di un **problema ellittico** e più precisamente di un **problema armonico** in quanto l'operatore ∇^2 è il laplaciano e l'equazione è omogenea, ossia il suo termine noto è nullo. In realtà, ad ogni istante di tempo t, abbiamo un diverso problema di questo tipo poiché la velocità normale $b_n(\mathbf{r}_S,t)$ imposta sul contorno dipende in generale dal tempo. Si ricorda che, come mostrato nel paragrafo 3.5, il dato al contorno $b_n(\mathbf{r}_S,t)$ deve soddisfare la condizione di compatibilità globale

$$\boxed{\oint_S b_n(\mathbf{r}_S,t) = 0}$$

affinché una soluzione possa esistere. Inoltre il potenziale ϕ nel problema di Neumann non è definito univocamente, proprio come la pressione P nelle equazioni per le correnti incomprimibili (con o senza viscosità). Infatti data una soluzione $\phi(\mathbf{r}, t)$ del problema appena scritto, tutte le funzioni $\phi(\mathbf{r}, t) + A(t)$, con $A(t)$ funzione arbitraria, soddisfano ugualmente l'equazione e la condizione di Neumann, perché l'incognita ϕ compare in esse solo come argomento di operatori di derivazione spaziale. Questa arbitrarietà non pone tuttavia alcun problema dal punto di vista della determinazione del campo di velocità dal momento che $\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}\phi$ e quindi la soluzione della velocità non dipende dalla funzione $A(t)$ e sarà sempre unica.

4.3 Teorema di Bernoulli per correnti non stazionarie

Supponiamo ora che il problema di Neumann per il potenziale della velocità sia stato risolto, per cui $\phi = \phi(\mathbf{r}, t)$ è un campo noto. Potremo allora sostituire il campo vettoriale $\boldsymbol{\nabla}\phi$ nell'equazione della quantità di moto per correnti irrotazionali al posto di $\mathbf{u}$, ottenendo

$$\frac{\partial \boldsymbol{\nabla}\phi}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{P}{\rho} + \frac{|\boldsymbol{\nabla}\phi|^2}{2} + \chi\right).$$

Ma gli operatori differenziali $\frac{\partial}{\partial t}$ e $\boldsymbol{\nabla}$ commutano per cui il termine nel membro di sinistra è il gradiente di $\frac{\partial \phi}{\partial t}$. L'equazione si potrà allora scrivere nella forma

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + \frac{|\boldsymbol{\nabla}\phi|^2}{2} + \chi\right) = 0,$$

la cui integrazione (in senso spaziale) fornisce immediatamente

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + \frac{|\boldsymbol{\nabla}\phi|^2}{2} + \chi = C(t),$$

dove $C(t)$ è una funzione arbitraria del tempo. Questa relazione è detta talvolta **teorema di Bernoulli per le correnti irrotazionali potenziali dipendenti dal tempo**. La funzione arbitraria $C(t)$ potrebbe essere fatta sparire dall'equazione assorbendola nel potenziale ϕ, che è definito a meno di una funzione arbitraria del tempo: basterebbe infatti aggiungere a ϕ la funzione di una sola variabile $\Phi(t) = \int^t C(t')\, dt'$, visto che in ogni caso $\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}\phi$. L'eliminazione della funzione arbitraria (e del tutto irrilevante) $C(t)$ è però impossibile nel caso stazionario, per cui conviene lasciare inalterato il membro di destra dell'equazione appena trovata. Così essa potrà essere specializzata al caso stazionario sostituendo semplicemente la funzione arbitraria $C(t)$ con una costante C.

Quando il potenziale $\phi = \phi(\mathbf{r}, t)$ è già stato determinato, possiamo risolvere l'equazione di Bernoulli per correnti incomprimibili irrotazionali non stazionarie rispetto alla funzione incognita P ottenendo la seguente espressione esplicita della soluzione

$$\frac{P(\mathbf{r}, t)}{\overline{\rho}} = -\frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \frac{|\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}, t)|^2}{2} - \chi(\mathbf{r}) + C(t).$$

Pertanto, nelle correnti incomprimibili irrotazionali, la dipendenza dal tempo sia del campo della velocità $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}, t)$ che del campo della pressione $P = P(\mathbf{r}, t)$ è determinata completamente dalla dipendenza temporale della componente normale della velocità $b_n(\mathbf{r}_S, t)$ imposta sul contorno del campo di moto.

L'equazione di Laplace per il potenziale della velocità assieme alla relazione precedente per la pressione permettono di determinare le correnti incomprimibili irrotazionali mediante un procedimento che affronta in successione due problemi *disaccoppiati*: prima si risolve il problema di Neumann per $\phi(\mathbf{r}, t)$ e poi si calcola la pressione $P(\mathbf{r}, t)$ tramite l'espressione esplicita scritta. Questo metodo consente quindi una grande semplificazione rispetto al procedimento da seguire nel caso più generale di correnti incomprimibili non viscose con vorticità. Infatti queste ultime sono governate dal sistema costituito dalle due equazioni *accoppiate* scritte all'inizio del paragrafo 4.1. La soluzione di tale coppia di equazioni è infatti molto difficile a causa della natura *vincolata* del problema e della presenza del termine non lineare $(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}$ nell'equazione della quantità di moto.

Ritorno al teorema di Bernoulli per correnti stazionarie

Nel caso particolare di una corrente stazionaria, la velocità normale imposta sul contorno S della regione del fluido non dipende dal tempo, ovvero $b_n = b_n(\mathbf{r}_S)$. Ne consegue che anche il potenziale non dipende da t, ovvero $\phi = \phi(\mathbf{r})$ che sarà soluzione del seguente problema di Neumann

$$\nabla^2\phi = 0,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}_{|S} = b_n(\mathbf{r}_S),$$

con il dato al contorno soggetto alla condizione globale $\oint b_n(\mathbf{r}_S) = 0$. La soluzione di questo problema armonico sarà ovviamente definita a meno di una costante additiva. In altri termini, se la funzione $\phi(\mathbf{r})$ è una soluzione, lo sarà anche la funzione $\phi(\mathbf{r}) + A$, dove A è una costante qualsiasi.

Nel caso stazionario l'equazione di Bernoulli precedente si semplifica in

$$\frac{P}{\overline{\rho}} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + \chi = C,$$

dove il valore della costante C è determinato dal valore di P, $|\nabla\phi|$ e χ in un punto del fluido, diciamo nel punto $\mathbf{r}_1$. In altre parole, il teorema di Bernoulli nel caso di una corrente irrotazionale potenziale stazionaria significa che

$$\boxed{\frac{P(\mathbf{r})}{\overline{\rho}} + \frac{|\nabla\phi(\mathbf{r})|^2}{2} + \chi(\mathbf{r}) = C,}$$

per qualunque punto $\mathbf{r}$ nel fluido, dove $C = (P(\mathbf{r}_1)/\overline{\rho}) + \frac{1}{2}|\nabla\phi(\mathbf{r}_1)|^2 + \chi(\mathbf{r}_1)$. Questo risultato rappresenta una versione particolare del teorema di Bernoulli per correnti irrotazionali valida quando è possibile scrivere $\mathbf{u} = \nabla\phi$. Una tale rappresentazione di una corrente irrotazionale è sempre permessa se il fluido si muove in una regione semplicemente connessa mentre può essere impossibile per certi campi di moto in domini molteplicemente connessi. È utile ricordare che la presente **versione potenziale** del teorema di Bernoulli per correnti irrotazionali richiede quindi che

- la corrente sia stazionaria,
- la regione occupata dal fluido sia *semplicemente connessa*,
- il campo di velocità sia irrotazionale,
- il fluido sia non viscoso,
- la corrente sia incomprimibile di densità uniforme,
- le forze di volume agenti sul fluido siano conservative.

Risolvendo la relazione di Bernoulli rispetto a $P(\mathbf{r})$ si ottiene il campo della pressione della corrente incomprimibile irrotazionale potenziale:

$$\frac{P(\mathbf{r})}{\overline{\rho}} = \frac{P_1}{\overline{\rho}} + \frac{1}{2}\big[|\nabla\phi_1|^2 - |\nabla\phi(\mathbf{r})|^2\big] + \chi_1 - \chi(\mathbf{r}),$$

dove $P_1 = P(\mathbf{r}_1), \phi_1 = \phi(\mathbf{r}_1)$ e $\chi_1 = \chi(\mathbf{r}_1)$. Se il campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ è irrotazionale ma non è rappresentabile come gradiente di un potenziale (corrente irrotazionale con circolazione non nulla in un dominio molteplicemente connesso), la pressione potrà comunque essere calcolata in termini di $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ mediante la relazione

$$\frac{P(\mathbf{r})}{\overline{\rho}} = \frac{P_1}{\overline{\rho}} + \frac{1}{2}\big[|\mathbf{u}(\mathbf{r}_1)|^2 - |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2\big] + \chi_1 - \chi(\mathbf{r}).$$

Coefficiente di pressione (incomprimibile)

Un'applicazione importante del teorema di Bernoulli riguarda le correnti attorno a un corpo fisso quando il campo di moto e la pressione a grande distanza dal esso possono essere considerati uniformi. In tale caso il valore della pressione in tutti i punti del fluido può essere espresso in forma adimensionale considerando la differenza fra la pressione nel punto e la pressione lontano dal corpo, dove la velocità è uniforme.

Indichiamo con P_∞ il valore della pressione del fluido nella regione lontana dal corpo e con $\mathbf{U} = U\,\hat{\mathbf{x}}$ la velocità uniforme del fluido, sempre in tale zona. Supponendo che non esistano forze esterne, per cui $\chi \equiv 0$, nel caso esaminato la relazione di Bernoulli si può scrivere

$$\frac{P(\mathbf{r})}{\overline{\rho}} = \frac{P_\infty}{\overline{\rho}} + \frac{1}{2}\big[U^2 - |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2\big].$$

Si definisce allora **coefficiente di pressione** $C_P(\mathbf{r})$ in un punto generico del fluido come la differenza fra la pressione $P(\mathbf{r})$ e la pressione P_∞ lontano dal corpo, normalizzata rispetto al valore dell'energia cinetica per unità di volume del fluido in tale regione, ovvero, si pone

$$C_P(\mathbf{r}) = \frac{P(\mathbf{r}) - P_\infty}{\frac{1}{2}\overline{\rho}U^2}.$$

Il coefficiente di pressione è quindi una *funzione adimensionale* i cui valori sono proporzionali alla differenza fra la pressione in un punto del fluido e la pressione a grande distanza dal corpo. Esprimendo il campo della pressione mediante la relazione di Bernoulli appena scritta si ottiene facilmente la formula

$$C_P(\mathbf{r}) = 1 - \frac{|\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2}{U^2},$$

che è molto utilizzata nello studio delle correnti incomprimibili stazionarie.

4.4 Corrente stazionaria attorno a una sfera

Applichiamo ora il procedimento per la determinazione di correnti incomprimibili irrotazionali, basato sull'analisi svolta nei precedenti paragrafi 4.2 e 4.3, al calcolo del campo di moto stazionario di due problemi interessanti e risolvibili in forma perché la forza (per unità di volume) causata dalla pressione è data da ∇P.

Notiamo infine che nei problemi in cui il fluido entra nel domino (correnti aperte e correnti esterne) è possibile e si deve specificare il valore della pressione su una parte del contorno al posto della velocità normale. In questi casi il campo di pressione della soluzione delle equazioni incomprimibili non ha più l'arbitrarietà caratteristica delle correnti confinate e la pressione è definita univocamente in modo assoluto poiché la variabile P compare anche in qualche condizione al contorno, oltre che come argomento dell'operatore gradiente.

Condizioni di compatibilità dei e fra i dati

I dati delle condizioni iniziale e al contorno $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ e $b_n(\mathbf{r}_S, t)$ del problema considerato non possono essere assegnati in modo del tutto libero e indipendentemente l'uno dall'altro. Gli effetti di questa limitazione riguardano direttamente il campo della velocità iniziale $\mathbf{u}_0$ che dovrà essere necessariamente a divergenza nulla, in virtù dell'incomprimibilità della corrente. In altre parole la velocità iniziale $\mathbf{u}_0$ deve soddisfare la condizione di compatibilità

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0.$$

Ma anche il dato al contorno $b_n(\mathbf{r}_S, t)$ non può essere scelto in modo completamente arbitrario. Infatti, integrando la condizione al contorno su tutta la superficie S, si ottiene immediatamente

$$\oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)_{|S} = \oint_S b_n(\mathbf{r}_S, t),$$

per ogni istante di tempo $t > 0$. D'altra parte, in virtù del teorema della divergenza l'integrale al primo membro si può trasformare in un integrale di volume, ovvero,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \oint_S b_n(\mathbf{r}_S, t).$$

Siccome il campo della velocità deve essere a divergenza nulla per $\forall t > 0$, l'integrale al primo membro è nullo e quindi deve necessariamente essere

$$\oint_S b_n(\mathbf{r}_S, t) = 0$$

per ogni $t > 0$. Questa è una condizione di compatibilità globale che il dato al contorno $b_n(\mathbf{r}_S, t)$ deve rispettare per ogni $t > 0$ affinché il campo di velocità possa soddisfare sempre il vincolo d'incomprimibilità.

Nello studio delle correnti attorno a corpi che partono in modo impulsivo, argomento sul quale non ci soffermiamo, esiste una ulteriore condizione che esprime la compatibilità *fra* il dato iniziale *e* il dato al contorno, su S e per $t = 0$. Quest'ultima condizione di compatibilità ha la forma seguente

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}_0(\mathbf{r})_{|S} = b_n(\mathbf{r}_S, 0).$$

L'insieme delle tre condizioni di compatibilità è quindi dato da

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}_0 = 0, \\ &\oint_S b_n(\mathbf{r}_S, t) = 0, \\ &\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}_0(\mathbf{r})_{|S} = b_n(\mathbf{r}_S, 0). \end{aligned}$$

Nel caso dei problemi *stazionari*, non esiste alcun dato iniziale e il valore prescritto sul contorno per la velocità normale non dipende dal tempo, abbiamo cioè $b_n = b_n(\mathbf{r}_S)$. Allora vi sarà la sola condizione di compatibilità globale

$$\oint_S b_n(\mathbf{r}_S) = 0.$$

3.5 Equazione della quantità di moto con la vorticità

L'equazione della quantità di moto per una corrente incomprimibile può essere scritta in una forma alternativa, ma del tutto equivalente, che è particolarmente utile nel caso di correnti stazionarie e di correnti irrotazionali. Mediante l'identità vettoriale[1]

$$\boldsymbol{\nabla}\big(|\mathbf{u}|^2\big) = 2\,\mathbf{u}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u} + 2\,(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}$$

il termine non lineare $(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}$ dell'equazione della quantità di moto può essere riscritto nella forma seguente

$$(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u})\times\mathbf{u} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\big(|\mathbf{u}|^2\big).$$

[1] Questa identità vettoriale è semplicemente il caso particolare per $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ della seguente identità $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{a}$, che è riportata nel paragrafo A.10 dell'appendice A.

3.9 Flussi piani incomprimibili e funzione di corrente

Il campo della velocità di un flusso incomprimibile in *due dimensioni* può essere descritto mediante una funzione scalare chiamata *funzione di corrente*. Si tratta di una grandezza molto utile in quanto, come indica lo stesso nome, questa funzione ha una relazione molto stretta con le linee di corrente del campo.

Consideriamo un campo di velocità bidimensionale piano,

$$\mathbf{u}(x, y) = u(x, y)\, \hat{\mathbf{x}} + v(x, y)\, \hat{\mathbf{y}}$$

e supponiamo che il flusso descritto da esso sia incomprimibile. In tale caso è possibile introdurre una funzione $\psi = \psi(x, y)$, che si chiama **funzione di corrente**, e scrivere

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Le componenti della velocità così definite soddisfano automaticamente la condizione di incomprimibilità in *due dimensioni* in quanto si verifica immediatamente

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0$$

in virtù del teorema di uguaglianza delle derivate seconde miste. Una proprietà importante della funzione di corrente ψ è conseguenza immediata della definizione della velocità $\mathbf{u}$ in termini della stessa ψ:

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi = u\, \frac{\partial \psi}{\partial x} + v\, \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$$

per cui ψ è costante lungo una linea di corrente. Questo significa che le curve ψ = costante sono semplicemente le linee di corrente del flusso incomprimibile 2D rappresentato da ψ.

Definizione della funzione di corrente

La funzione di corrente $\psi(\mathbf{r}, t)$ di un campo di velocità incomprimibile piano $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ è definita come la portata volumetrica del fluido che, in un determinato istante t, passa fra un punto di riferimento $\mathbf{r}_\star = (x_\star, y_\star)$ (scelto arbitrariamente) e il punto considerato $\mathbf{r} = (x, y)$. In realtà, essendo il campo di moto considerato piano, la portata è da intendersi per unità di lunghezza normale al piano del moto. In termini matematici, la portata volumetrica di fluido che passa fra i punti $\mathbf{r}_\star$ e $\mathbf{r}$ (per unità di lunghezza) è data dall'integrale di linea

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbf{r}_\star}^{\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{s}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s}),$$

dove $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s})$ è il versore normale alla curva nel punto di integrazione $\mathbf{s}$. Se il campo di velocità $\mathbf{u}$ è a divergenza nulla, l'integrale considerato non dipenderà dal percorso scelto ma solo dal punto iniziale $\mathbf{r}_\star$ e dal punto finale $\mathbf{r}$. Infatti, se consideriamo due percorsi diversi L_1 e L_2 che partono dallo stesso punto $\mathbf{r}_\star$ e terminano nello stesso punto $\mathbf{r}$, come mostrato in figura 3.24, possiamo prendere il percorso chiuso $L_1 + (-L_2)$ ottenuto percorrendo prima L_1 e poi L_2 in senso inverso al suo senso originario. Calcolando l'integrale di linea lungo tale percorso chiuso avremo, in virtù del teorema della divergenza in due dimensioni,

$$\oint_{L_1+(-L_2)} \mathbf{u}(\mathbf{s},t)\cdot\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s}) = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}$$

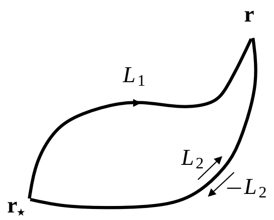

Figura 3.24 Il percorso $L_1 + (-L_2)$ è una curva chiusa

a condizione che la curva $L_1 + (-L_2)$ costituisca l'intero contorno della regione V (ovvero se tutta la regione del piano compresa fra L_1 e L_2 appartiene al dominio di definizione del campo vettoriale $\mathbf{u}$). In questo caso, essendo $\mathbf{u}$ a divergenza nulla, l'integrale di volume è nullo e quindi

$$\oint_{L_1+(-L_2)} \mathbf{u}(\mathbf{s},t)\cdot\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s}) = 0$$

da cui si ricava subito

$$\int_{\mathbf{r}_\star;\,L_1}^{\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{s}_1,t)\cdot\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s}_1) = \int_{\mathbf{r}_\star;\,L_2}^{\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{s}_2,t)\cdot\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s}_2)$$

con ovvio significato dei simboli.

Nel caso in cui invece la regione del piano compresa fra L_1 e L_2 contiene un'"isola" inaccessibile al fluido, ovvero se il dominio occupato dal fluido è molteplicemente connesso, allora si deve tenere conto che il contorno della regione in cui si applica il teorema della divergenza comprende anche la curva chiusa che rappresenta la "costa dell'isola". Ma la componente di $\mathbf{u}$ normale a questa parte del contorno è nulla per la condizione di non penetrazione, per cui si ha ancora l'uguaglianza fra l'integrale di linea lungo $L_1 + (-L_2)$ e l'integrale di volume su V. Pertanto anche nel secondo caso l'integrale di linea della componente normale della velocità dipende solo dal punto iniziale $\mathbf{r}_\star$ e dal punto finale $\mathbf{r}$.

Per una definizione di dominio *molteplicemente connesso* si veda il paragrafo B.3 dell'appendice B.

Una volta dimostrato che la definizione di $\psi(x, y, t)$ identifica una vera funzione della posizione (x, y) dei punti del piano, in ogni istante di tempo t, rimane da verificare che questa definizione implica le due relazioni esprimenti le componenti cartesiane u e v della velocità in termini di ψ, che sono state scritte all'inizio del paragrafo.

Nella definizione di $\psi(\mathbf{r},t)$ possiamo esprimere il versore normale $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s})$ in termini del versore $\hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{s})$ tangente alla curva di integrazione tenendo conto che i tre versori $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s})$, $\hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{s})$ e $\hat{\mathbf{z}}$ costituiscono una terna ortogonale destra, per cui $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{s}) = \hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{s}) \times \hat{\mathbf{z}}$. Un calcolo diretto mostra allora

$$\psi(\mathbf{r},t) = \int_{\mathbf{r}_\star}^{\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{s},t)\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{s})\times\hat{\mathbf{z}} = \int_{\mathbf{r}_\star}^{\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{s},t)\times\hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{s})\cdot\hat{\mathbf{z}} = \int_{\mathbf{r}_\star}^{\mathbf{r}} [\mathbf{u}(\mathbf{s},t)\times d\mathbf{s}]_z.$$

Siccome $\mathbf{u} = (u, v, 0)$ e $d\mathbf{s} = (dx, dy, 0)$, il prodotto vettoriale sotto il segno d'integrazione si calcola immediatamente

$$\psi(x,y,t) = \int_{(x_\star,y_\star)}^{(x,y)} [u(x,y,t)\,dy - v(x,y,t)\,dx]$$

per cui risulta:

$$u(x,y,t) = \frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad v(x,y,t) = -\frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial x}.$$

Un modo molto conveniente di scrivere le due relazioni che definiscono il campo della velocità in termini della funzione di corrente è

$$\mathbf{u} = (\nabla\psi)\times\hat{\mathbf{z}}.$$

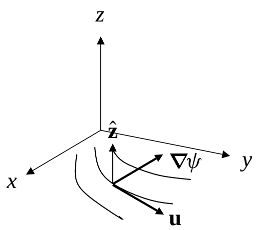

Figura 3.25 Campo di velocità incomprimibile piano $\mathbf{u}(x,y)$ espresso mediante $\nabla\psi$

Questa relazione vettoriale può essere interpretata geometricamente: essa mostra che il campo di velocità piano $\mathbf{u}$ è ottenuto, in ogni punto, facendo ruotare di 90 gradi il vettore gradiente $\nabla\psi$ in senso orario attorno a un asse normale al piano.

Il vantaggio di questa relazione è il suo carattere vettoriale intrinseco che ne permette l'uso anche in un sistema di coordinate del piano diverso da quello cartesiano. Ad esempio, se considero le coordinate polari (r,θ) e ricordo l'espressione del gradiente in tali coordinate, $\nabla = \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$, osservo che nella formula vettoriale le componenti polari della velocità u_r e u_θ sono espresse in termini della funzione di corrente $\psi(r,\theta)$ dalle relazioni

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad \text{e} \qquad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Un campo di velocità piano così definito soddisfa automaticamente la condizione di incomprimibilità che in coordinate polari si scrive

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} = 0.$$

Infatti risulta

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)=0,$$

per l'uguaglianza delle derivate seconde miste. La medesima rappresentazione vale per un campo di velocità incomprimibile piano descritto in coordinate cilindriche (R,θ), nel quale caso la funzione di corrente $\psi(R,\theta)$ permette di esprimere le componenti cilindriche non nulle della velocità tramite le relazioni

$$u_R=\frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \qquad \text{e} \qquad u_\theta=-\frac{\partial \psi}{\partial R}.$$

Equazione della funzione di corrente

La variabile funzione di corrente ψ è governata da un'equazione che interviene in certe formulazioni alternative delle equazioni dei flussi incomprimibili in due dimensioni. L'equazione si ottiene semplicemente calcolando la vorticità scalare ω a partire dalla definizione di u e v in termini di ψ. Un calcolo diretto fornisce

$$\omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}=-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

e quindi avremo l'equazione di Poisson bidimensionale

$$\nabla^2\psi=-\omega,$$

dove ∇^2 è l'operatore di Laplace nel piano x-y. Questa equazione di Poisson per ψ può essere risolta soltanto se la vorticità del moto bidimensionale è nota, ovvero se si conosce la funzione scalare $\omega=\omega(x,y,t)$. Sfortunatamente questa variabile deve essere calcolata risolvendo l'equazione della vorticità 2D introdotta nel paragrafo precedente. È quindi necessario considerare le due equazioni assieme e costruire un sistema di due equazioni che dovranno essere soddisfatte contemporaneamente.

3.10 Il sistema vorticità–funzione di corrente dei flussi piani

Nell'equazione della vorticità per flussi incomprimibili piani è presente il termine advettivo $\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\omega$. Se velocità $\mathbf{u}$ a divergenza nulla è espressa mediante la funzione di corrente ψ, un calcolo diretto mostra che

$$\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\omega=[(\boldsymbol{\nabla}\psi)\times\hat{\mathbf{z}}]\cdot\boldsymbol{\nabla}\omega=\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}-\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

3.8 Equazione della vorticità

L'equazione di Eulero della quantità di moto può essere scritta

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\boldsymbol{\nabla} H,$$

dove $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}$ e dove si è introdotta la funzione scalare

$$H \equiv \frac{P}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \chi.$$

Prendendo il rotore dell'equazione è possibile eliminare il gradiente e fare così scomparire la quantità H che contiene la pressione ottenendo

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = 0.$$

Consideriamo ora l'identità $\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{b} + \mathbf{a}\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b}\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a}$ e usiamola prendendo $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{u}$. Il terzo termine è nullo per l'incomprimibilità ($\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0$) e il quarto è nullo in virtù della definizione di vorticità, ($\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} = 0$) per cui otteniamo $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}$. Sostituendo questo risultato nell'equazione precedente si ottiene

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u},}$$

oppure, ricorrendo al simbolo di "derivata" materiale introdotto nel paragrafo 3.1,

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}.$$

Questa è l'**equazione della vorticità** per correnti incomprimibili in assenza di viscosità. Si noti che il termine contenente la pressione è scomparso; tuttavia l'equazione coinvolge i due campi vettoriali $\mathbf{u}$ e $\boldsymbol{\omega}$ che sono inoltre collegati fra loro dall'equazione

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}.$$

Equazione della vorticità in 2D

Nel caso particolare di correnti in due dimensioni, cioè tali che

$$\mathbf{u} = u(x, y, t)\,\hat{\mathbf{x}} + v(x, y, t)\,\hat{\mathbf{y}} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega(x, y, t)\,\hat{\mathbf{z}},$$

allora

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = \omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0.$$

Di conseguenza l'equazione della vorticità per correnti piane sarà

$$\boxed{\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}\omega = 0}$$

oppure, ricorrendo ancora alla notazione della "derivata" materiale,

$$\frac{D\omega}{Dt} = 0.$$

Si può quindi concludere che nei flussi incomprimibili non viscosi in due dimensioni, quando le forze di volume presenti sono conservative, la vorticità (scalare) ω di ciascuna particella di fluido si conserva. Nel caso particolare di flussi stazionari l'equazione precedente si riduce a

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}\omega = 0$$

per cui la vorticità ω è costante lungo ciascuna linea di corrente.

Esempio 1 **Irrotazionalità del flusso stazionario 2D incomprimibile non viscoso attorno a un cilindro infinito di sezione qualsiasi**

Un'applicazione interessante dell'equazione $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}\omega = 0$ si ha nel caso di un flusso stazionario incomprimibile di un fluido non viscoso che investe perpendicolarmente un corpo di forma cilindrica con sezione costante, essendo uniforme la velocità a grande distanza dal cilindro. Sotto determinate condizioni questo flusso può essere descritto con buona approssimazione da un campo di velocità 2D nel piano di una sezione. In tale caso vale l'equazione della vorticità 2D appena scritta. Pertanto, visto che tutte le linee di corrente provengono dall'infinito dove la velocità $\mathbf{u}$ è uniforme e il fluido ha vorticità nulla, allora $\omega = 0$ in qualunque altro punto e quindi il flusso 2D considerato è irrotazionale.