

Note di
Modelli Matematici per la Biologia

Simone Zuccher

6 aprile 2017

Queste note non hanno nessuna pretesa di completezza né vogliono sostituire i numerosi libri di testo sull'argomento. Sono le dispense della *Parte A* del corso di *Modelli Matematici per la Biologia* tenuto dall'autore nella primavera del 2017 presso l'Università degli Studi di Verona per studenti iscritti al secondo anno del corso di laurea in matematica applicata. Sono state pensate per evitare allo studente l'inconveniente di doversi procurare più libri di testo dai quali estrarre, di volta in volta, i diversi argomenti trattati e sono da considerarsi in *continuo divenire*.

Alcuni testi per eventuali approfondimenti sono:

- Squassina, M. & Zuccher, S.: *Introduzione all'analisi qualitativa dei sistemi dinamici discreti e continui*, Springer-Verlag (2016)
- Edelstein-Keshet, L.: *Mathematical Models in Biology*, SIAM, Classics in Applied Mathematics (2005)
- Murray, J.D.: *Mathematical biology*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1993).

Per segnalare eventuali errori presenti in queste note, oppure per suggerire possibili migliorie, scrivere all'indirizzo email: simone.zuccher@univr.it. L'ultima versione di questo file è reperibile gratuitamente al link

<http://profs.sci.univr.it/~zuccher/downloads/mmb-zuccher.pdf>

Indice

1	Il caso discreto ad una equazione	1
1.1	Alcuni esempi introduttivi di crescita di una popolazione	1
1.1.1	Solo nuovi nati	1
1.1.2	Nuovi nati e morti	2
1.1.3	Nuovi nati, morti e migrazioni	3
1.2	Un esempio più complicato di crescita di una popolazione	5
1.3	Richiami di teoria	9
1.4	Alcuni esempi di studio della stabilità dei punti di equilibrio	12
1.5	Il modello logistico classico	13
1.6	Problemi di fine capitolo	18
2	Il caso discreto a più equazioni	19
2.1	Richiami di teoria	19
2.1.1	Il caso lineare	19
2.1.2	Il caso non lineare	20
2.2	Il modello ospite-parassita (Nicholson-Bailey)	21
2.3	Il modello preda-predatore (Lotka-Volterra discreto)	26
2.4	Problemi di fine capitolo	30
3	Il caso continuo ad una equazione	31
3.1	Richiami di teoria	31
3.2	Il modello logistico continuo	32
3.3	Problemi di fine capitolo 3	36
4	Il caso continuo a due equazioni lineari	37
4.1	Un modello continuo e semplificato di preda-predatore	37
4.2	Richiami di teoria	38
4.2.1	Autovalori reali distinti	40
4.2.2	Autovalori reali multipli	42
4.2.3	Autovalori complessi (coniugati)	43
4.2.4	Il piano $T-D$	45
4.3	Un esempio di sistema planare lineare	45
4.4	Problemi di fine capitolo 4	47
5	Il caso continuo a più equazioni non-lineari	49
5.1	Richiami di teoria	49
5.2	Un modello per la diffusione delle epidemie	54
5.3	Studio qualitativo del ritratto di fase: isocline e flussi	58

5.4	Modelli preda-predatore (Lotka-Volterra)	64
5.5	Modelli di competizione intra- e inter-specifica	71
5.6	Modelli di esclusione competitiva tra specie	76
5.7	Problemi di fine capitolo 5	79
6	Preparazione all'esame	81
6.1	Problemi da portare risolti all'orale	81
7	Soluzioni esercizi di fine capitolo	83
7.1	Soluzione degli esercizi di fine capitolo 1	83
7.2	Soluzione degli esercizi di fine capitolo 2	87
7.3	Soluzione degli esercizi di fine capitolo 3	89
7.4	Soluzione degli esercizi di fine capitolo 4	94
7.5	Soluzione degli esercizi di fine capitolo 5	95

Capitolo 1

Il caso discreto ad una equazione

1.1 Alcuni esempi introduttivi di crescita di una popolazione

Vogliamo scrivere un modello matematico che, a partire dai dati della popolazione nell'anno $aaaa$, possa predire l'andamento negli anni futuri. Indichiamo con x_1 il numero di individui il primo gennaio dell'anno $aaaa$. Chiameremo poi x_2, x_3, \dots il numero di individui il primo gennaio degli anni $aaaa + 1, aaaa + 2, \dots$. Vediamo come, a seconda delle ipotesi, si ottengano modelli più o meno aderenti alla realtà.

1.1.1 Solo nuovi nati

Cominciamo a scrivere il modello tenendo conto solo dei nuovi nati. Per questo, assumeremo essere fisso il *tasso di natalità* che chiameremo λ . Dunque, il numero di individui nell'anno $aaaa + 1$ è

$$x_2 = x_1 + \lambda x_1$$

ossia il numero di individui nell'anno $aaaa$ più il numero di nuovi nati nel corso dell'anno $aaaa$. Ad essere precisi, poiché moltiplichiamo il numero intero x_1 per un numero decimale, dovremmo prendere la parte intera di x_2 (o ammettere che ci siano, per esempio, mezze persone...). Trascureremo questo fatto. Se il tasso di natalità si mantiene costante, possiamo scrivere, in generale, che nell'anno $aaaa + k$ la popolazione è di

$$x_{k+1} = x_k + \lambda x_k = (1 + \lambda)x_k, \quad k \geq 1$$

individui. Chiaramente,

$$x_{k+1} = (1 + \lambda)x_k = (1 + \lambda)^2 x_{k-1} = \dots = (1 + \lambda)^k x_1, \quad (1.1)$$

pertanto si osserva una effettiva *crescita* della popolazione solo se $1 + \lambda > 0$, ossia se il tasso di natalità è positivo (λ , alla peggio, è nullo, ma non può essere negativo). La crescita descritta da questo modello è detta *crescita esponenziale*.

Esercizio 1.2 *Una popolazione triplica in cinque anni. Utilizzando il modello di crescita esponenziale, determinare il tasso di natalità annuale, supponendo che esso non cambi nel tempo.*

Risoluzione. Utilizzando l'equazione (1.1) con $k = 5$ e $x_{k+1} = 3x_1$, si ha

$$3x_1 = (1 + \lambda)^5 x_1 \iff 3 = (1 + \lambda)^5 \implies 1 + \lambda = \sqrt[5]{3} \implies \lambda = \sqrt[5]{3} - 1 \approx 0.246.$$

■

1.1.2 Nuovi nati e morti

Se consideriamo anche i morti, chiamando μ il *tasso di mortalità* fisso, il numero di individui nell'anno $aaaa + 1$ è

$$x_2 = x_1 + \lambda x_1 - \mu x_1$$

ossia il numero di individui nell'anno $aaaa$ più il numero di nuovi nati nell'anno $aaaa$ meno il numero di morti nell'anno $aaaa$. Generalizzando agli anni successivi possiamo scrivere

$$x_{k+1} = (1 + r)x_k, \quad k \geq 1, \quad (1.3)$$

dove $r = \lambda - \mu$ è detto *fattore di accrescimento* o anche *potenziale biotico*. Si osservi che entrambi i tassi sono positivi o nulli, ma $0 \leq \mu \leq 1$ in quanto i morti in un anno non possono superare il numero degli individui della popolazione di quell'anno, mentre $\lambda \geq 0$. Pertanto il potenziale biotico non può essere inferiore a -1 , ossia $r \geq -1$.

Esercizio 1.4 Studia il comportamento di una popolazione che evolve secondo il modello

$$x_{k+1} = (1 + \lambda - \mu)x_k,$$

dove λ e μ sono, rispettivamente, i tassi di natalità e mortalità costanti nel tempo.

Risoluzione. Sia $r = \lambda - \mu$. Applicando ricorsivamente la legge di evoluzione si ottiene immediatamente

$$x_{k+1} = (1 + r)^k x_1,$$

che è un andamento esponenziale (come nel modello con soli nati), ma il comportamento della popolazione dipende dal segno di r .

1. Se $r > 0$ si ha una *crescita indefinita*, consistente con il fatto che il tasso di natalità è maggiore di quello di mortalità.
2. Se $r < 0$, siccome $r \geq -1$, si ha $-1 \leq r < 0 \implies 0 \leq 1 + r < 1$. In questo caso la popolazione è destinata all'*estinzione*, in accordo con il fatto che il tasso di natalità è minore di quello di mortalità e, quindi, il numero di individui non può che diminuire.
3. Se $r = 0$ i nuovi nati compensano *esattamente* i morti, pertanto la popolazione rimane costante nel tempo e pari al numero iniziale di individui.

■

Esercizio 1.5 Una popolazione ha tassi di natalità e mortalità costanti e pari, rispettivamente, a λ e μ . Se x_1 indica la popolazione oggi e $\lambda < \mu$, determina fra quanti anni la popolazione si estinguerà.

Risoluzione. Bisogna risolvere, in k , l'equazione $(1+r)^k x_1 = 0$, dove abbiamo posto $r = \lambda - \mu$. Se $x_1 \neq 0$ e $-1 \leq r < 0$, ossia $0 \leq 1 + r < 1$, questa equazione non ammette soluzione. Tuttavia occorre ricordare che il numero di individui è un numero *naturale*, quindi non appena si raggiungerà una popolazione con al massimo un individuo, l'anno seguente ci sarà estinzione (anche perché un individuo, da solo, non può avere figli). Dunque, si deve risolvere l'equazione (in α)

$$(1+r)^\alpha x_1 = 1 \iff (1+r)^\alpha = \frac{1}{x_1} \implies \ln(1+r)^\alpha = \ln \frac{1}{x_1} \implies \alpha = -\frac{\ln x_1}{\ln(1+r)} = -\frac{\ln x_1}{\ln(1+\lambda-\mu)}.$$

Si osservi che $\alpha > 0$ in quanto $x_1 > 1$ e $0 < 1 + r < 1$, inoltre α è un numero reale, pertanto l'estinzione avverrà al primo k , numero naturale, tale che $k \geq \alpha$. ■

1.1.3 Nuovi nati, morti e migrazioni

Ipotizziamo ora che vi sia una quota costante di migrazione che chiamiamo m , indipendente dalla popolazione indigena. In generale m può essere positivo (immigrazione), negativo (emigrazione) o nullo (caso già trattato in §1.1.2). Con le solite notazioni, nell'anno $aaaa + k$ la popolazione è

$$x_{k+1} = x_k + \lambda x_k - \mu x_k + m = (1 + r)x_k + m.$$

Esercizio 1.6 *In uno stato della Comunità Europea, la popolazione ha tassi di natalità e mortalità costanti e pari, rispettivamente, a λ e μ . La popolazione oggi è di x_1 individui. Siccome $\lambda < \mu$, il governo permette l'ingresso, ogni anno, di m stranieri con lo scopo di fare in modo che la popolazione si stabilizzi, sul lungo periodo, su un valore asintotico x_∞ di individui. Determina il numero di immigrati m (costante) che il governo deve far entrare ogni anno.*

Risoluzione. Se esiste un valore asintotico x_∞ , allora per k sufficientemente grande si avrà $x_{k+1} = x_k = x_\infty$. Pertanto,

$$x_{k+1} = (1 + r)x_k + m \implies x_\infty = (1 + r)x_\infty + m \implies m = -x_\infty r.$$

Si osservi che, siccome $r < 0$, il numero di immigrati è certamente positivo. ■

Esercizio 1.7 *Ipotizzando che la popolazione di uno stato europeo cresca secondo il modello con nuovi nati, morti ed immigrazione costante*

$$x_{k+1} = (1 + r)x_k + m,$$

esprimere il numero di individui nell'anno $aaaa + k$ in funzione del numero di individui x_1 presenti nell'anno $aaaa$.

Risoluzione. Osserviamo che

$$\begin{aligned} x_2 &= (1 + r)x_1 + m \\ x_3 &= (1 + r)x_2 + m = (1 + r)^2 x_1 + (1 + r)m + m \\ x_4 &= (1 + r)x_3 + m = (1 + r)^3 x_1 + (1 + r)^2 m + (1 + r)m + m \end{aligned}$$

e quindi, in generale,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (1 + r)^k x_1 + \left(1 + (1 + r) + (1 + r)^2 + \dots + (1 + r)^{k-1}\right) m \\ &= (1 + r)^k x_1 + m \sum_{s=0}^{k-1} (1 + r)^s. \end{aligned}$$

Ricordando che

$$\sum_{s=0}^k q^s = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q},$$

la somma che raccoglie m si può riscrivere in modo più compatto come

$$\sum_{s=0}^{k-1} (1+r)^s = \frac{1 - (1+r)^{(k-1)+1}}{1 - (1+r)} = \frac{1 - (1+r)^k}{-r} = \frac{(1+r)^k - 1}{r},$$

da cui

$$x_{k+1} = (1+r)^k x_1 + \frac{(1+r)^k - 1}{r} m.$$

■

Esercizio 1.8 Una popolazione ha tassi di natalità e mortalità costanti e pari, rispettivamente, a λ e μ . La popolazione oggi è di x_1 individui. Il governo permette una migrazione annuale costante e pari a m ($m \in \mathbb{R}$, ossia ci può essere sia immigrazione che emigrazione). Determina, al variare del segno di $r = \lambda - \mu$ (potenziale biotico), il comportamento della popolazione nel lungo periodo ($k \rightarrow \infty$), ossia se essa esplose, se si stabilizza su un valore asintotico non nullo o se si estingue, dipendentemente dal valore assunto da m .

Risoluzione. Indichiamo con x_∞ il limite per $k \rightarrow \infty$ del numero di individui,

$$x_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[(1+r)^k x_1 + \frac{(1+r)^k - 1}{r} m \right].$$

Questo limite varia a seconda del segno di r e dei valori assunti da m .

1. Se $r > 0$, ossia se il tasso di natalità è superiore a quello di mortalità, allora $1+r > 1$ e $(1+r)^k \rightarrow +\infty$ per $k \rightarrow \infty$. Pertanto si ottiene $x_\infty \rightarrow (1+r)^k \left[x_1 + \frac{m}{r} \right]$, da cui i seguenti sottocasi.
 - (a) Se $x_1 + m/r > 0$, ossia (ricordando che siamo nel caso $r > 0$) $m > -x_1 r$, si ha $x_\infty \rightarrow +\infty$, pertanto la popolazione esplose nel lungo periodo. Si osservi che il valore $m_{\min} = -x_1 r$ è negativo in quanto $r > 0$, pertanto la condizione $m > m_{\min}$ traduce il fatto che anche in presenza di *emigrazione* è possibile avere esplosione se l'emigrazione è inferiore ad un certo valore di soglia, e purché il saldo tra nuovi nati e morti sia positivo ($r > 0$).
 - (b) Se $x_1 + m/r < 0$, ossia $m < m_{\min} = -x_1 r < 0$, si ottiene $x_\infty \rightarrow -\infty$, cosa ovviamente impossibile in quanto $x_k \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Quindi se $m < m_{\min}$, l'*emigrazione* è troppo intensa e anche se il tasso di natalità è maggiore di quello di mortalità la popolazione si estingue a causa della eccessiva emigrazione.
 - (c) Se $x_1 + m/r = 0$, ossia $m = -x_1 r$, allora $x_\infty \rightarrow (1+r)^k \left[x_1 + \frac{m}{r} \right]$ darebbe origine ad una forma indeterminata. Per dirimere la questione torniamo indietro al limite iniziale

$$\begin{aligned} x_\infty &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[(1+r)^k x_1 + \frac{(1+r)^k - 1}{r} m \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[(1+r)^k x_1 - \frac{(1+r)^k - 1}{r} x_1 r \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[(1+r)^k x_1 - (1+r)^k x_1 + x_1 \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_1 \\ &= x_1. \end{aligned}$$

La popolazione rimane, quindi, sempre identica al valore iniziale x_1 perché l'emigrazione compensa *esattamente* il saldo positivo tra nuovi nati e morti. Si osservi che, applicando la successione per ricorrenza, si sarebbe ottenuto immediatamente $x_2 = (1+r)x_1 + m = x_1 + rx_1 - x_1r = x_1$, da cui la costanza del numero di individui della popolazione per ogni altro anno.

2. Se $r < 0$, ossia se il tasso di natalità è inferiore a quello di mortalità osserviamo che, essendo $0 \leq \mu \leq 1$ (non possono morire più individui di quelli che fanno parte della popolazione) e $\lambda \geq 0$, allora il valore minimo di $r = \lambda - \mu$ si ha per $\lambda = 0$ e $\mu = 1$ il che corrisponde a $r = -1$. In definitiva, il caso $r < 0$ si traduce in $-1 \leq r < 0 \iff 0 \leq 1+r < 1$ e si ha

$$x_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[(1+r)^k x_1 + \frac{(1+r)^k - 1}{r} m \right] = -\frac{m}{r}.$$

Tenendo conto che $r < 0$, si hanno i seguenti sottocasi.

- Se $m > 0$, ossia siamo in presenza di *immigrazione*, allora $x_\infty = -m/r > 0$ e, quindi, la popolazione si stabilizza su un valore asintotico grazie al fatto che l'immigrazione è tale da sopperire al saldo negativo tra nuovi nati e morti.
 - Se $m < 0$, ossia siamo in presenza di *emigrazione*, allora $x_\infty = -m/r < 0$, cosa che non può essere (il numero di individui non può essere negativo) e quindi $x_\infty = 0$. La popolazione si estingue perché, oltre al saldo negativo tra nuovi nati e morti si aggiunge l'emigrazione.
 - Se $m = 0$ (assenza di migrazioni) allora $x_\infty = 0$ a causa del saldo negativo tra nuovi nati e morti.
3. Se $r = 0$, ossia se i nuovi nati compensano esattamente i morti, allora il destino della popolazione è deciso da m . In particolare, ricordando che

$$x_{k+1} = (1+r)^k x_1 + m \sum_{s=0}^{k-1} (1+r)^s$$

per $r = 0$ si ottiene semplicemente $x_{k+1} = x_1 + (k-1)m$, da cui i seguenti sottocasi.

- Se $m > 0$ (immigrazione) la popolazione sul lungo periodo esplode, ossia $x_\infty \rightarrow +\infty$.
- Se $m < 0$ (emigrazione) si avrebbe $x_\infty \rightarrow -\infty$, ma questo non è possibile in quanto, alla peggio, $x_\infty = 0$, pertanto la popolazione si estingue.
- Se $m = 0$ (assenza di migrazioni) la popolazione rimane costante e pari al valore iniziale.

■

1.2 Un esempio più complicato di crescita di una popolazione

I modelli di crescita precedentemente introdotti prevedono che i coefficienti λ , μ , m siano tutti costanti. Questo fatto ha dato origine a modelli *lineari* (i termini x_k compaiono solo come monomi di grado uno). Si potrebbe pensare di complicare l'ultimo modello visto (con migrazioni)

assumendo coefficienti dipendenti dal tempo (cioè da k). In questo caso si avrebbe

$$x_{k+1} = x_k + (\lambda_k - \mu_k)x_k + m_k. \quad (1.9)$$

Per i flussi migratori la cosa appare plausibile quando si fissino, per esempio per legge, le quote di immigrati ed emigrati negli anni a venire. Per i tassi di natalità e mortalità, invece, può capitare che varino in base al numero stesso di individui (che varia con gli anni) a causa di competizione all'interno della popolazione. Infatti, se la popolazione dispone di risorse limitate (per esempio una quantità di acqua o di grano ben definita e non illimitata), è possibile che al crescere della popolazione il tasso di natalità diminuisca e/o che il tasso di mortalità cresca. In prima approssimazione possiamo assumere che questo avvenga in maniera *lineare* rispetto alla popolazione stessa.

Se indichiamo con x_k il numero di individui al tempo t_k , allora i tassi di natalità e mortalità, dipendenti da k , possono essere espressi dalle relazioni

$$\lambda_k = \lambda_0 - ax_k \quad \text{e} \quad \mu_k = \mu_0 + bx_k,$$

dove λ_0, μ_0, a e b sono tutte costanti positive. Si noti che λ_0 e μ_0 sono i tassi di natalità e mortalità nel caso limite di popolazione nulla, mentre a e b sono dei coefficienti che misurano il grado di *influenza* della popolazione sui tassi di natalità e mortalità, ovvero il grado di competizione all'interno della specie. In assenza di flusso migratorio, dalla relazione (1.9) si ha

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (1 + \lambda_k - \mu_k)x_k \\ &= (1 + \lambda_0 - ax_k - \mu_0 - bx_k)x_k \\ &= [(1 + \lambda_0 - \mu_0) - (a + b)x_k]x_k. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Esercizio 1.11 *Si consideri il modello di crescita non lineare*

$$x_{k+1} = [(1 + \lambda_0 - \mu_0) - (a + b)x_k]x_k.$$

Esiste un valore x_∞ (al tendere di k all'infinito) sul quale il numero di individui si stabilizza?

Risoluzione. Si osservi che se la popolazione raggiunge, per tempi molto grandi, un valore asintotico x_∞ , allora per k grande si ha $x_{k+1} = x_k = x_\infty$. Pertanto, per determinare x_∞ , basta sostituirlo nell'equazione che descrive l'evoluzione della popolazione

$$x_\infty = [(1 + \lambda_0 - \mu_0) - (a + b)x_\infty]x_\infty$$

da cui

$$x_\infty = \frac{\lambda_0 - \mu_0}{a + b}.$$

Possiamo quindi concludere che:

- se $\lambda_0 \leq \mu_0$ allora $x_\infty = 0$, ovvero la popolazione si estingue (il numero di individui non può essere negativo, alla peggio è nullo);
- se $\lambda_0 > \mu_0$ allora $x_\infty \neq 0$ e la popolazione si stabilizza su questo valore a meno di "comportamenti strani";
- al crescere di a e b , che misurano il grado di competizione per le risorse all'interno della specie, si ha che x_∞ diminuisce come atteso;

- nel limite in cui $a = b = 0$, introducendo $r_0 = \lambda_0 - \mu_0$, la logistica si riduce all'equazione

$$x_{k+1} = (1 + r_0)x_k \implies x_{k+1} = (1 + r_0)^k x_1,$$

che produce un andamento esponenziale (esplosione o estinzione) come visto nel problema 1.4.

■

Esercizio 1.12 Si consideri il modello di crescita non lineare

$$x_{k+1} = [(1 + \lambda_0 - \mu_0) - (a + b)x_k]x_k.$$

Esiste un valore massimo x^{\max} raggiungibile dalla popolazione, eventualmente maggiore di x_∞ ?

Risoluzione. Sotto l'ipotesi $x_k \geq 0$, si ha

$$x_{n+1} \geq 0 \iff [(1 + \lambda_0 - \mu_0) - (a + b)x_k]x_k \geq 0$$

da cui

$$0 \leq x_k \leq \frac{1 + \lambda_0 - \mu_0}{a + b}.$$

Pertanto esiste un valore massimo del numero di individui

$$x_{\max} = \frac{1 + \lambda_0 - \mu_0}{a + b}.$$

Confrontando questo valore con $x_\infty = \frac{\lambda_0 - \mu_0}{a + b}$ e ricordando che $a + b > 0$, si ha che

$$x_{\max} = \frac{1 + \lambda_0 - \mu_0}{a + b} = \frac{1}{a + b} + \frac{\lambda_0 - \mu_0}{a + b} = \frac{1}{a + b} + x_\infty > x_\infty,$$

ossia l'assestamento della popolazione sul valore asintotico x_∞ può avvenire in maniera non monotona con possibili fenomeni di *overshooting*. ■

Esercizio 1.13 Si consideri il modello di crescita non lineare

$$x_{k+1} = [(1 + \lambda_0 - \mu_0) - (a + b)x_k]x_k.$$

Riscrivere il modello per una popolazione "riscalata" rispetto al valore massimo x^{\max} .

Risoluzione. Da

$$x_{k+1} = [(1 + \lambda_0 - \mu_0) - (a + b)x_k]x_k,$$

dividendo entrambi i membri per x^{\max} si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{x_{k+1}}{x^{\max}} &= [(1 + \lambda_0 - \mu_0) - (a + b)x_k] \frac{x_k}{x^{\max}} \\ &= (1 + \lambda_0 - \mu_0) \left[1 - \frac{a + b}{1 + \lambda_0 - \mu_0} x_k \right] \frac{x_k}{x^{\max}} \\ &= (1 + \lambda_0 - \mu_0) \left[1 - \frac{x_k}{x^{\max}} \right] \frac{x_k}{x^{\max}} \end{aligned}$$

da cui, introducendo

$$A = 1 + \lambda_0 - \mu_0 \quad \text{e} \quad p_k = \frac{x_k}{x^{\max}} = \frac{a + b}{1 + \lambda_0 - \mu_0} x_k,$$

si ottiene semplicemente

$$p_{k+1} = Ap_k(1 - p_k), \quad (1.14)$$

nota come *equazione logistica discreta*. Essa è così importante da meritare l'intera sezione 1.5. Si osservi che $A = 1 + \lambda_0 - \mu_0 \geq 0$ in quanto, come visto nella sezione 1.1.2, $r_0 = \lambda_0 - \mu_0 \geq -1$.

■

Esercizio 1.15 *Si consideri il modello di crescita non lineare e normalizzato*

$$p_{k+1} = Ap_k(1 - p_k).$$

- (a) Quanto vale il valore asintotico p_∞ ?
 (b) In quali condizioni la popolazione si estingue?

Risoluzione. (a) Sostituendo $p_k = p_{k+1} = p_\infty$ nell'equazione (1.14) si ottiene immediatamente $p_\infty = 0$ oppure $p_\infty = 1 - 1/A$.

(b) In base a questo risultato si può concludere che si ha estinzione della popolazione se $p_\infty = 1 - 1/A \leq 0$, ossia (siccome $A \geq 0$) $1 - 1/A \leq 0 \implies A \leq 1$. Pertanto, se $0 < A \leq 1$ la popolazione è condannata all'estinzione. In altre parole, essendo $A = 1 + \lambda_0 - \mu_0 \geq 0$, in mancanza di migrazioni, se il potenziale biotico iniziale $\lambda_0 - \mu_0$ è negativo, l'estinzione è assicurata indipendentemente dai valori di a e b che misurano la competizione all'interno della popolazione. ■

Esercizio 1.16 *Si consideri il modello di crescita non lineare e normalizzato*

$$p_{k+1} = Ap_k(1 - p_k) \quad \text{con} \quad A = 1 \quad \text{e} \quad A = 2.$$

È possibile utilizzare un metodo grafico per determinare l'evoluzione nel tempo e il destino della popolazione normalizzata p_k al variare del valore iniziale \bar{p}_1 ?

Risoluzione. Basta disegnare la parabola $f(x) = x(1 - x)$ e la retta $y = x$. Dopo aver inizializzato $p_k = \bar{p}_1$, basta ripetere il ciclo

1. calcolare $p_{k+1} = f(p_k)$
2. calcolare $\epsilon = |p_{k+1} - p_k|$
 - (a) se ϵ è inferiore ad una tolleranza fissata, uscire dal ciclo (raggiungimento del valore asintotico p_∞)
 - (b) altrimenti riportare il valore di p_{k+1} sull'asse delle ascisse utilizzando la bisettrice $y = x$ e ripetere dal punto 1

■

1.3 Richiami di teoria

Definizione 1.17 Si chiama *successione definita per ricorrenza* (o per induzione) una successione espressa dalla legge $x_{k+1} = f(x_k)$. Una successione x_k viene detta *regolare* se ammette limite, finito o infinito, per $k \rightarrow \infty$. Diciamo che $x_0 \in I$ è un *punto di equilibrio* se x_0 è un punto fisso di f ossia $f(x_0) = x_0$. Si parla anche di *equilibrio della mappa f* , o del *sistema dinamico discreto (f, I)* .

Definizione 1.18 Si dice *iterata “kappesima”* della mappa $f : I \rightarrow I$ e si indica con $f^k(x)$ la funzione composta di k funzioni uguali a $f(x)$, ovvero $f^k(x) = f(f(f(\dots f(x)\dots)))$.

Definizione 1.19 Un punto di equilibrio x_0 per la successione $x_{k+1} = f(x_k)$ si dice *localmente stabile* se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni y_0 con $|y_0 - x_0| < \delta$, si ha

$$|x_k - x_0| = |f^k(y_0) - x_0| < \epsilon, \quad \text{per ogni } k \geq 0.$$

Se il punto x_0 non è stabile allora si dice *instabile*. Diciamo che un equilibrio x_0 è *localmente attrattivo* se esiste $\varrho_0 > 0$ tale che per ogni dato iniziale y_0 tale che $|y_0 - x_0| < \varrho_0$ si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0,$$

dove $x_k = f^k(y_0)$ per ogni $k \geq 0$. Diciamo che un equilibrio x_0 è *localmente asintoticamente stabile* se è localmente attrattivo e localmente stabile.

In pratica, un punto di equilibrio x_0 è localmente stabile se, partendo da una condizione iniziale y_0 abbastanza vicina a x_0 , la successione originata da y_0 rimane ad una distanza finita, ma *non necessariamente nulla*, da x_0 . Invece per un punto di equilibrio localmente *asintoticamente* stabile, partendo da una condizione iniziale y_0 , abbastanza vicina a x_0 , la successione originata da y_0 tende a x_0 per $k \rightarrow \infty$, ossia la distanza tra la successione originata da y_0 ed il punto di equilibrio *tende a zero* (come nel caso degli asintoti di una funzione).

Oltre alla stabilità asintotica *locale*, per cui la successione x_k converge all'equilibrio solo partendo da dati iniziali sufficientemente vicini all'equilibrio stesso, è possibile dare una nozione di stabilità *globale* rispetto al dato iniziale.

Definizione 1.20 Sia $f : I \rightarrow I$ una mappa e $x_0 \in I$. Un punto di equilibrio x_0 per $x_{k+1} = f(x_k)$ si dice *globalmente attrattivo* se per ogni dato iniziale $y_0 \in I$ si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0,$$

dove $x_k = f^k(y_0)$. Diciamo che un equilibrio x_0 è *globalmente asintoticamente stabile* se è globalmente attrattivo e localmente stabile.

Definizione 1.21 Un punto di equilibrio x_0 per la successione $x_{k+1} = f(x_k)$ si dice *localmente semistabile superiormente* se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni y_0 tale che $x_0 < y_0 < x_0 + \delta$, si ha

$$|x_k - x_0| = |f^k(y_0) - x_0| < \epsilon, \quad \text{per ogni } k \geq 0.$$

Se il punto x_0 non è semistabile superiormente allora si dice *instabile superiormente*. Diciamo che un equilibrio x_0 è *localmente attrattivo superiormente* se esiste $\varrho_0 > 0$ tale che per ogni dato iniziale y_0 tale che $x_0 < y_0 < x_0 + \varrho_0$ si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0,$$

dove $x_k = f^k(y_0)$ per ogni $k \geq 0$. Diciamo che un equilibrio x_0 è localmente asintoticamente stabile superiormente se è localmente attrattivo superiormente e localmente semistabile superiormente.

L'avverbio *superiormente* indica che la condizione iniziale y_0 appartiene ad un intorno destro di x_0 . Se si considera un intorno *sinistro* di x_0 si ottengono le stesse definizioni con l'avverbio *inferiormente*.

Il problema che si affronta concretamente per le successioni definite per ricorrenza è il seguente: data la successione definita per ricorrenza, determinare i possibili punti di equilibrio x_0 e studiare la loro natura, ossia se sono localmente (globalmente) stabili o instabili. I punti di equilibrio x_0 si trovano risolvendo l'equazione $x = f(x)$ dei *punti uniti*.

Per stabilire la natura dei punti di equilibrio può essere utile ragionare sull'eventuale monotonia della successione.

Teorema 1.22 Sia $f : I \rightarrow I, I \subseteq \mathbb{R}$ una funzione crescente. Allora la successione x_k definita da

$$x_0 \in I, \quad x_{k+1} = f(x_k),$$

è monotona. In particolare, se $x_1 \geq x_0$ allora x_k è crescente mentre se $x_1 \leq x_0$ allora x_k è decrescente, ovvero x_k è costante se $x_1 = x_0$. Inoltre, il limite di x_k per $k \rightarrow \infty$ esiste e si ha:
 (a) se $x_1 > x_0$ ed esistono punti di equilibrio \bar{x} tali che $\bar{x} > x_0$ allora la successione x_k converge (crescendo) a quello più vicino a x_0 , altrimenti x_k diverge a $+\infty$;
 (b) se $x_1 < x_0$ ed esistono punti di equilibrio \bar{x} tali che $\bar{x} < x_0$ allora la successione x_k converge (decrescendo) a quello più vicino a x_0 , altrimenti x_k diverge a $-\infty$.

Teorema 1.23 Sia $f : I \rightarrow I$ una funzione decrescente. Allora la successione definita da

$$x_0 \in I, \quad x_{k+1} = f(x_k),$$

ha le sottosuccessioni x_{2k} e x_{2k+1} monotone. In particolare, se $x_2 \geq x_0$ allora x_{2k} è crescente e x_{2k+1} è decrescente, mentre se $x_2 \leq x_0$ allora x_{2k} è decrescente e x_{2k+1} è crescente. Inoltre, se $x_1 \geq x_0$ allora $x_{2k+1} \geq x_{2k}$ per ogni k ; se invece $x_1 \leq x_0$ allora $x_{2k+1} \leq x_{2k}$ per ogni k . La condizione necessaria affinché x_k abbia limite è che x_2 sia compreso tra x_0 e x_1 .

Nel caso in cui la funzione f che definisce la successione per ricorrenza $x_{k+1} = f(x_k)$ non sia monotona, si può utilizzare il seguente teorema generale.

Teorema 1.24 Sia $f : I \rightarrow I, I \subseteq \mathbb{R}$ una funzione di classe C^3 e x_0 un punto di equilibrio per la successione definita da $x_{k+1} = f(x_k)$. Allora vale il seguente schema:

1. se $|f'(x_0)| < 1$ allora x_0 è (localmente asintoticamente) stabile;
2. se $|f'(x_0)| > 1$ allora x_0 è instabile;
3. se $|f'(x_0)| = 1$ si ha:
 - (a) se $f'(x_0) = -1$ si ha:
 - i. se $2f'''(x_0) + 3[f''(x_0)]^2 < 0$ allora x_0 è instabile;
 - ii. se $2f'''(x_0) + 3[f''(x_0)]^2 > 0$ allora x_0 è (localmente asintoticamente) stabile;
 - (b) se $f'(x_0) = 1$ si ha:
 - i. se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è (localmente asintoticamente) stabile superiormente ed instabile inferiormente;

- ii. se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è instabile superiormente e (localmente asintoticamente) stabile inferiormente;
- iii. se $f''(x_0) = 0$ si ha
 - A. se $f'''(x_0) < 0$ allora x_0 è (localmente asintoticamente) stabile;
 - B. se $f'''(x_0) > 0$ allora x_0 è instabile;

Le successioni definite per ricorrenza possono dare origine ad orbite periodiche, ossia da un certo valore di k in poi i valori assunti sono solo alcuni e si ripetono ciclicamente ogni p passi.

Definizione 1.25 Sia $f : I \rightarrow I$ una mappa. Diciamo che $\xi \in I$ è una soluzione periodica di periodo $p > 1$ se

$$f^p(\xi) = \xi, \quad f^j(\xi) \neq \xi, \quad \forall j = 1, \dots, p-1.$$

Se ξ_1 è una soluzione periodica di periodo $p > 1$ per f , allora l'insieme $\mathcal{O}_p \subset I$,

$$\mathcal{O}_p = \{\xi_1, f(\xi_1), \dots, f^{p-1}(\xi_1)\}$$

si dice orbita periodica di ξ_1 . Diciamo p -ciclo un insieme di punti $\mathcal{C}_p \subset I$,

$$\mathcal{C}_p = \{\xi_1, \dots, \xi_p\}$$

dove ξ_j è una soluzione periodica di periodo p per ogni $j = 1, \dots, p$. Un 2-ciclo è un insieme $\mathcal{C}_2 = \{x_1, x_2\} \subset I$ con $f(x_1) = x_2$ e $f(x_2) = x_1$.

Richiamiamo ora un collegamento tra la stabilità asintotica e l'esistenza di 2-cicli per $x_{k+1} = f(x_k)$, quando f soddisfa opportune ipotesi.

Teorema 1.26 Sia $f : I \rightarrow I$ una mappa di classe C^1 . Allora il p -ciclo per $x_{k+1} = f(x_k)$

$$\{\xi_1, \xi_2 = f(\xi_1), \dots, \xi_p = f^{p-1}(\xi_1)\}$$

è localmente asintoticamente stabile se

$$|f'(\xi_1)f'(\xi_2)\dots f'(\xi_p)| < 1.$$

La condizione di stabilità per i 2-cicli $\{x_0, x_1\} \subset I$ è data da $|f'(x_0)f'(x_1)| < 1$.

Osservazione 1.27 Questa semplice caratterizzazione di stabilità dei cicli discende dalle formule di derivazione per composizione di f^p ; ad esempio, per $p = 2$, si ha

$$\left. \frac{d}{dx} f^2 \right|_{\xi_1} = f'(f(\xi_1))f'(\xi_1) = f'(\xi_2)f'(\xi_1) = \left. \frac{d}{dx} f^2 \right|_{\xi_2},$$

da cui si vede anche che

$$\left| \left. \frac{d}{dx} f^2 \right|_{\xi_1} \right| < 1 \iff |f'(\xi_1)f'(\xi_2)| < 1 \iff \left| \left. \frac{d}{dx} f^2 \right|_{\xi_2} \right| < 1.$$

Introduciamo ora una possibile definizione di caos, per cui un modello alle differenze del primo ordine è caotico se si trova un insieme non numerabile di valori che per certe iterazioni sono vicini, mentre per altre sono lontani. La definizione è soddisfatta dalla logistica classica per valori del parametro A maggiori di 3.57 (si veda il problema 1.31).

Definizione 1.28 Siano $f : I \rightarrow I$ e $x_0 \in I$. Diciamo che f esibisce una dipendenza sensibile dal dato iniziale x_0 se esiste $\epsilon_0 > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistono $y_0 \in I$ e $k \geq 1$ tali che

$$|x_0 - y_0| < \delta \quad e \quad |f^k(x_0) - f^k(y_0)| \geq \epsilon_0.$$

Se una mappa f esibisce dipendenza sensibile dal dato iniziale x_0 per ogni $x_0 \in I$ diremo che f esibisce dipendenza sensibile dai dati iniziali.

La sensibilità al dato iniziale è una caratteristica dei sistemi caotici, come per esempio la logistica classica per valori del parametro A maggiori di 3.57 (si veda il problema 1.31).

1.4 Alcuni esempi di studio della stabilità dei punti di equilibrio

Vediamo alcuni esempi che si possono studiare utilizzando, ad esempio, i criteri di monotonia, teoremi 1.22 e 1.23 o il teorema 1.24.

Esercizio 1.29 Sia $x_0 \in (0, \pi)$ e si consideri la successione definita da

$$x_{k+1} = x_k + \sin x_k.$$

Provare che $x_k \in (0, \pi)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, che (x_k) cresce e calcolare il limite di (x_k) per $k \rightarrow \infty$.

Risoluzione. Si noti che $x_{k+1} = f(x_k)$ e $f(x) = x + \sin x$ è strettamente crescente su $(0, \pi)$ essendo $f'(x) = 1 + \cos x$ e $0 < 1 + \cos x < 2 \forall x \in (0, \pi)$, ovvero $f'(x) > 0 \forall x \in (0, \pi)$. Essendo $f(0) = 0$, $f(\pi) = \pi$, e la funzione strettamente crescente, allora $x_{k+1} = f(x_k) \in (0, \pi)$. Essendo $x_{k+1} - x_k = \sin x_k > 0 \forall x_k \in (0, \pi)$, la successione è crescente. Per $k \rightarrow \infty$ si ha l'equazione $x = x + \sin x$, che è soddisfatta per $x = 0$ e $x = \pi$. Di questi, in base al teorema 1.22, l'unico limite possibile è $x = \pi$ in quanto la successione è crescente e parte con il valore $x_0 \in (0, \pi)$. Un altro modo di procedere è tramite il teorema 1.24. Si osservi che $|f'(0)| = 2 > 0$ e pertanto l'origine è un punto di equilibrio instabile, mentre $|f'(\pi)| = 0 < 1$ e quindi è asintoticamente stabile. La figura 1.1 riporta la storia temporale e il *cobwebbing* (procedura a “zigo-zago”

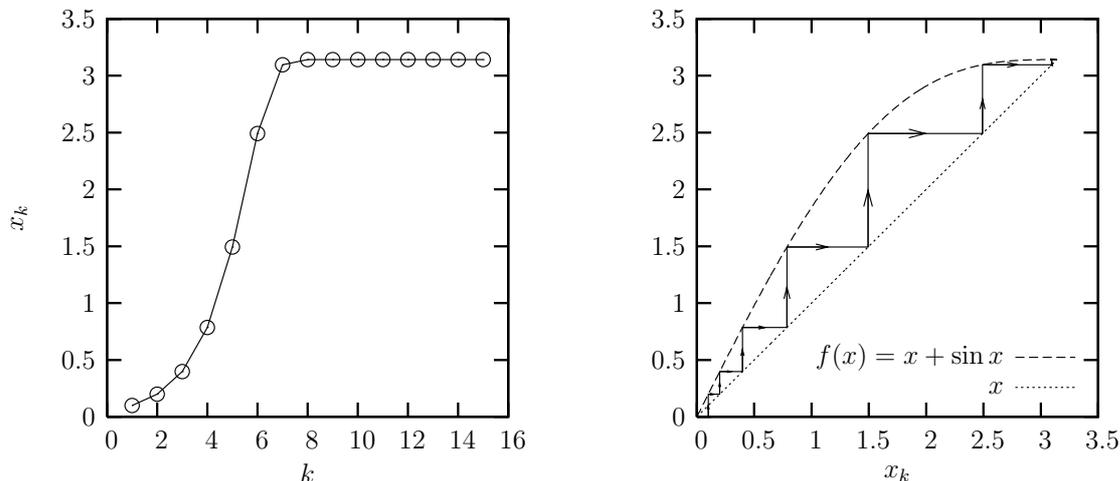


Figura 1.1: Storia temporale x_k e studio dei punti di equilibrio per il problema 1.29, $N = 15$, $x_0 = 0.1$

ottenuta partendo da x_0 , calcolando $x_1 = f(x_0)$ tramite la f , riportando il valore x_1 sulla bisettrice del primo e terzo quadrante, quindi calcolando $x_2 = f(x_1)$ tramite la f , e così via) ottenuti per $N = 15$ e $x_0 = 0.1$. Si noti il raggiungimento veloce del valore asintotico $x_n = \pi$.

■

Esercizio 1.30 Calcolare il limite della successione definita da

$$x_0 = 1, \quad x_{k+1} = \int_0^{x_k} e^{-t^2} dt.$$

Risoluzione. Si noti che la successione può essere riscritta in modo più compatto come $x_{k+1} = f(x_k)$ con $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x)$. Essendo $f'(x) = e^{-x^2} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, la funzione è sempre crescente ed essendo $x_2 < x_1$ la successione è decrescente per il teorema 1.22. L'unico punto di equilibrio che soddisfa l'equazione $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x)$ è $x = 0$, che risulta il limite della successione in quanto essa è decrescente e $x_0 = 1$. Si osservi che l'analisi di stabilità del punto $x = 0$ porta a $f'(0) = 1$ ($f'(x) = e^{-x^2}$), per cui la determinazione della sua natura richiede l'uso delle derivate successive secondo quanto previsto dal teorema 1.24. Essendo $f''(x) = -2xe^{-x^2}$, si ha $f''(0) = 0$ e quindi bisogna analizzare la derivata terza che è $f'''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$. Essendo $f'''(0) = -2 < 0$, $x = 0$ è un punto di equilibrio localmente asintoticamente stabile. In figura 1.2 sono riportati

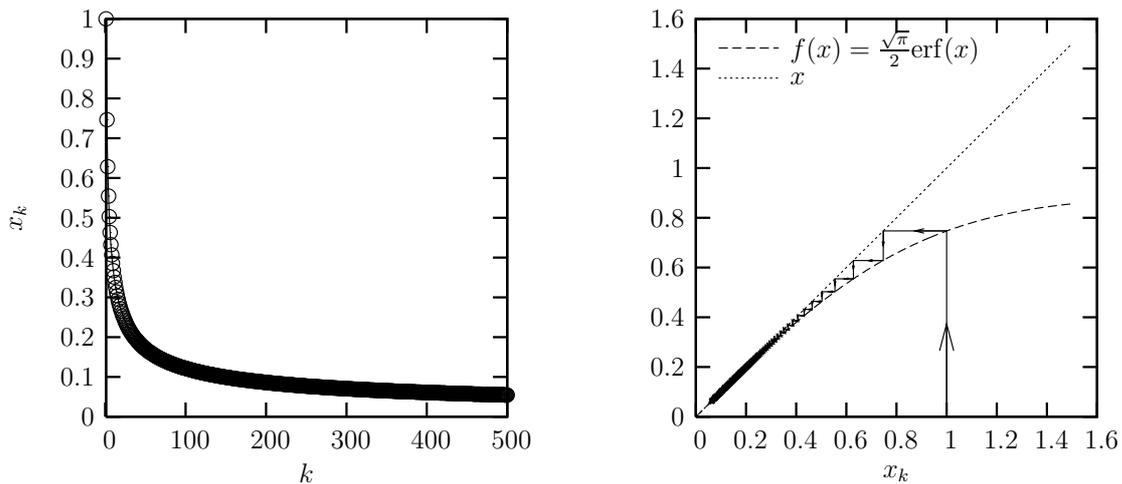


Figura 1.2: Storia temporale x_k e studio dei punti di equilibrio per il problema 1.30, $N = 500$

la storia temporale e il *cobwebbing*, ottenuti per $N = 500$. Si può notare la natura dell'origine, attrattiva se pur con una velocità di convergenza molto bassa. ■

1.5 Il modello logistico classico

Nei problemi seguenti analizziamo nel dettaglio il comportamento della mappa logistica

$$x_{k+1} = Ax_k(1 - x_k), \quad A > 0$$

ricavata nella sezione 1.2.

Esercizio 1.31 Determinare i valori di $A \in \mathbb{R}$ affinché l'equazione normalizzata

$$x_{k+1} = Ax_k(1 - x_k) \tag{1.32}$$

abbia un effettivo significato biologico.

Risoluzione. Il modello logistico discreto(1.32) descrive la legge di crescita di una popolazione “riscalata” x_k al tempo k -esimo. Si noti che, essendo la popolazione normalizzata rispetto al suo valore massimo, affinché il tutto abbia senso deve essere $0 \leq x_k \leq 1 \forall k \geq 0$. Siccome popolazioni negative non esistono (ovvero non esistono popolazioni in cui il numero dei morti supera quello dei vivi essendo esse estinte al momento in cui $x_k = 0$), deve essere $A > 0$. Siccome la legge di crescita è $x_{k+1} = f(x_k)$ con $f(x) = Ax(1-x)$, ovvero una parabola rivolta verso il basso con vertice in $V(1/2; A/4)$, il massimo valore che può assumere x_{k+1} è $A/4$, da cui la limitazione $A \leq 4$. Pertanto, $0 < A \leq 4$. Si può verificare che, per ogni valore di $A > 4$, esistono dei valori del dato iniziale x_0 tali che il valore iterato x_k è negativo per un opportuno indice k . ■

Esercizio 1.33 Determinare i punti di equilibrio di(1.32) e discuterne la stabilità.

Risoluzione. Si tratta di determinare i punti di equilibrio della successione $x_{k+1} = f(x_k)$ con $f(x) = Ax(1-x)$ e $0 \leq x_0 \leq 1$. Risolvendo $x = f(x)$ si ottengono le soluzioni $x = 0$ e $x = 1 - 1/A$. La soluzione $x = 1 - 1/A$ è accettabile, ovvero positiva, solo per $1 - 1/A > 0$, da cui $A > 1$. Pertanto, per $0 \leq A \leq 1$ si ha una sola soluzione di equilibrio ($x = 0$) mentre per $1 < A \leq 4$ si hanno 2 punti di equilibrio ($x = 0, 1 - 1/A$). In figura 1.3 sono riportate le curve $f(x) = Ax(1-x)$ per alcuni valori significativi del parametro A . Si noti la presenza di una o due soluzioni dipendentemente da A . Per quanto riguarda la stabilità dei punti di

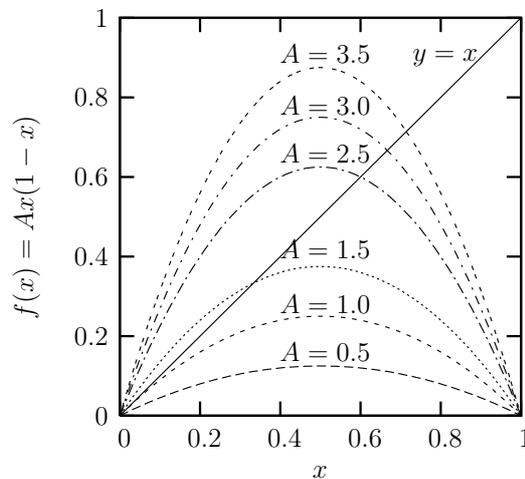


Figura 1.3: Grafico di $f(x) = Ax(1-x)$ per diversi valori di A

equilibrio, si osservi che $f'(x) = A - 2Ax$. Pertanto $f'(0) = A$, quindi si ha stabilità della soluzione $x = 0$ solo per $0 < A < 1$. Si noti che in tal caso $x = 0$ è l'unica soluzione possibile. Pertanto, se $0 < A < 1$ la popolazione è condannata all'estinzione. Nel caso $1 < A \leq 4$, invece, le soluzioni sono 2 e $x = 0$ è instabile. Questo fatto implica che la popolazione non è destinata all'estinzione. Per quanto riguarda la stabilità dell'altro punto di equilibrio $x = 1 - 1/A$ (che esiste solo se $1 < A \leq 4$), si ha $f'(1 - 1/A) = 2 - A$, per cui la condizione di stabilità si traduce in $|2 - A| < 1$, ossia $1 < A < 3$. Pertanto, la soluzione $x = 1 - 1/A$ è stabile per $1 < A < 3$ e instabile per $3 \leq A < 4$. Le caratteristiche di stabilità dei punti di equilibrio sono facilmente

verificabili guardando la figura 1.3 e notando che $|f'(1 - 1/A)| < 1$ per $1 < A < 3$, mentre $|f'(1 - 1/A)| > 1$ per $3 < A \leq 4$. ■

Esercizio 1.34 Studiare, per $3 < A \leq 4$, il comportamento del modello logistico definito dall'equazione(1.32).

Risoluzione. Come visto in precedenza, in questo intervallo di valori la soluzione $x = 1 - 1/A$ è instabile. Tuttavia, esistono soluzioni stabili per la mappa f^2 , dove

$$f^2(x) = A^2x(1-x)(Ax^2 - Ax + 1) = -A^3x^4 + 2A^3x^3 - A^3x^2 - A^2x^2 + A^2x$$

è l'iterata seconda della funzione $f(x) = Ax(1-x)$ (il lettore verifichi i passaggi analitici). Dire che l'iterata seconda ha punti di equilibrio equivale a dire che se x_- e x_+ sono le due soluzioni, allora partendo da $x_0 = x_+$ si avrà $x_{2k} = x_+$, $k \in \mathbb{N}$ e $x_{2k+1} = x_1 = f(x_+)$, $k \in \mathbb{N}$. Si noti che la successione per ricorrenza $x_{k+1} = f^2(x_k)$ ha significato fintanto che $x_k \in [0, 1] \forall k \in \mathbb{N}$, pertanto è necessario richiedere $0 \leq f^2(x) \leq 1$. Per comodità sia $g(x) = f^2(x)$ e studiamo rapidamente il comportamento di $g(x)$: essa è nulla in $x = 0$ e $x = 1$, la sua derivata si annulla in 3 punti dai quali si evince, tramite lo studio del segno di $g'(x)$, che due sono massimi ed uno è un minimo. In particolare, i due massimi ed il minimo sono in corrispondenza di

$$x_{\max} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 2A}}{2A}, \quad x_{\min} = \frac{1}{2},$$

e si ha $g(x_{\max}) = f^2(x_{\max}) = A/4$ e $g(x_{\min}) = f^2(x_{\min}) = A^2(A-4)/16$. Dovendo essere $0 \leq f^2(x) \leq 1 \iff 0 \leq f^2(x_{\max}) \leq 1$, si trova $0 < A \leq 4$, che è soddisfatta in quanto $3 < A \leq 4$. Inoltre $A \leq 4$ garantisce anche che il valore del minimo di $f^2(x)$ sia positivo o nullo.

Concentriamoci ora sui punti di equilibrio di $f^2(x)$, che sono 4: $x = 0$, $x = 1 - 1/A$ e

$$x_+ = \frac{A + 1 + \sqrt{A^2 - 2A - 3}}{2A}, \quad x_- = \frac{A + 1 - \sqrt{A^2 - 2A - 3}}{2A}.$$

Gli ultimi due esistono solo per $A \geq 3$ e, in tal caso, è comunque assicurato che tutti i punti di equilibrio si trovino nell'intervallo $[0, 1]$ (si verifichi per esercizio). In figura 1.4 sono riportate $f^2(x)$ e $f(x)$ al variare di A . Si noti che il punto di equilibrio compreso tra x_+ e x_- è il punto di equilibrio $x = 1 - 1/A$ di $f(x)$. Ai fini della stabilità occorre conoscere la derivata prima di $f^2(x)$ (o, in alternativa, utilizzare il Teorema 1.26) che vale

$$g'(x) = \frac{d}{dx}f^2(x) = -4A^3x^3 + 6A^3x^2 - 2A^3x - 2A^2x + A^2.$$

Essendo $g'(0) = A^2$, il punto di equilibrio $x = 0$ è instabile per $A > 1$ (lo si sapeva già). In $x = 1 - 1/A$ si ottiene $g'(1 - 1/A) = (A - 2)^2$, per cui questo punto di equilibrio è stabile per $|A - 2| < 1$, ovvero $1 < A < 3$ (si ricordi che per $0 < A < 1$ questo punto di equilibrio non esiste), conclusione già nota dall'analisi precedente. Per i nuovi punti di equilibrio, si ottiene $g'(x_+) = g'(x_-) = -(A^2 - 2A - 4)$, ovvero essi hanno la stessa tangente, e affinché siano stabili deve essere $|-(A^2 - 2A - 4)| < 1$, ossia $3 < A < 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$. Le caratteristiche di stabilità dei punti di equilibrio sono facilmente verificabili guardando la figura 1.4 e notando che $|f'(x_+)f'(x_-)| < 1$ per $3 < A < 1 + \sqrt{6}$, mentre $|f'(x_+)f'(x_-)| > 1$ per $1 + \sqrt{6} < A \leq 4$. Il comportamento per $1 + \sqrt{6} < A \leq 4$, chiaramente, non può più essere descritto utilizzando l'iterata seconda, ma si deve ricorrere all'iterata terza (fintanto che essa ammette punti di

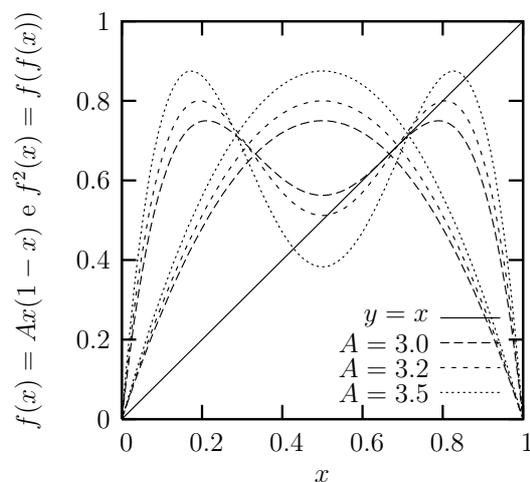


Figura 1.4: Grafico di $f^2(x) = -A^3x^4 + 2A^3x^3 - A^3x^2 - A^2x^2 + A^2x$ e $f(x) = Ax(1-x)$ per diversi valori di A

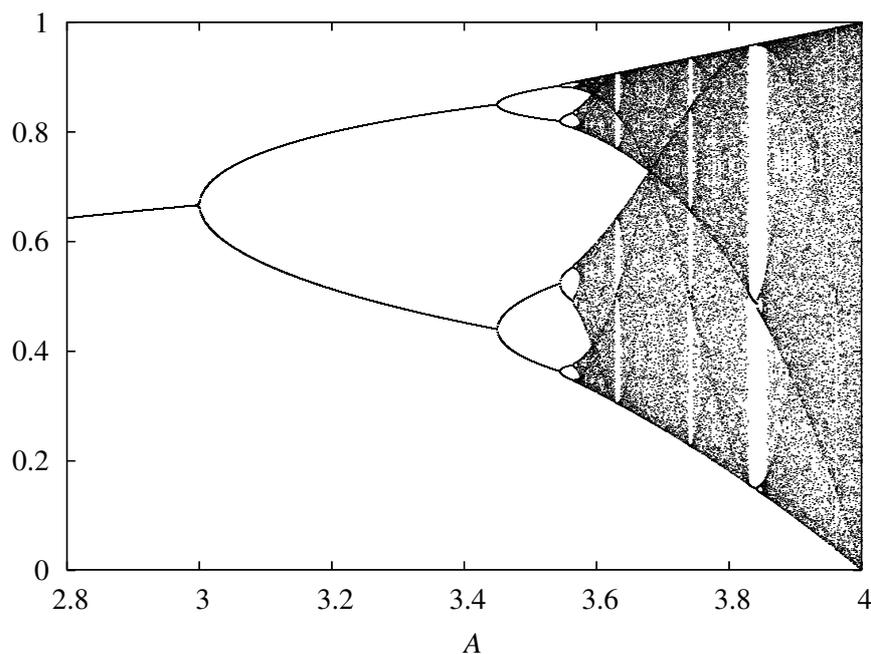


Figura 1.5: Diagramma delle biforcazioni della logistic map $x_{k+1} = Ax_k(1-x_k)$ al variare del parametro A

equilibrio stabili), quindi all'iterata quarta e così via. Per $3.45 < A < 3.54$ (si ricordi che questi valori sono approssimativi), x_k oscilla tra 4 valori, mentre per A leggermente superiore a 3.54 la soluzione oscilla tra 8 valori stabili, quindi 16, 32 etc. Questo fenomeno passa sotto il nome di *period-doubling cascade*. Si osserva che questi raddoppi del periodo si susseguono sempre più velocemente e per $A \approx 3.57$ si raggiunge una condizione in cui x_k assume tutti valori diversi con l'impossibilità di riconoscere delle oscillazioni periodiche. Inoltre, piccole variazioni iniziali portano a stati finali completamente diversi (sensibilità alle condizioni iniziali). In altre parole,

si è raggiunto un regime caotico. In figura 1.5 è riportato l'andamento dei valori della logistic map $x_{k+1} = Ax_k(1 - x_k)$ al variare del parametro A .

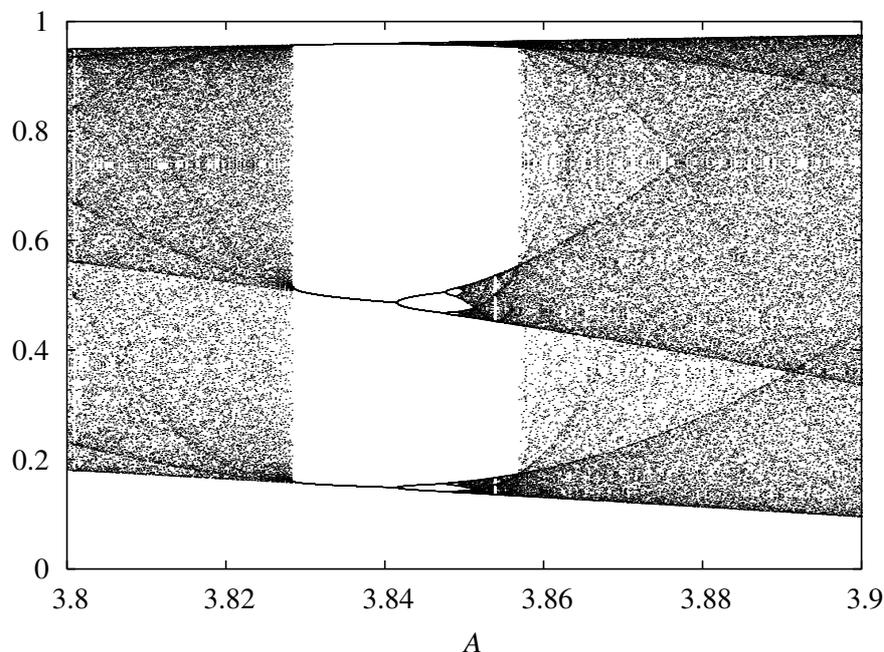


Figura 1.6: Zoom del diagramma delle biforcazioni della logistic map $x_{k+1} = Ax_k(1 - x_k)$ al variare del parametro A . Si noti la presenza di una regione con soluzioni periodiche per $A \approx 3.83$

Si osservi (figura 1.5) che per molti valori di $A > 3.57$ il comportamento è caotico, ma per valori isolati di A esiste un comportamento periodico. Queste sono regioni di stabilità delle

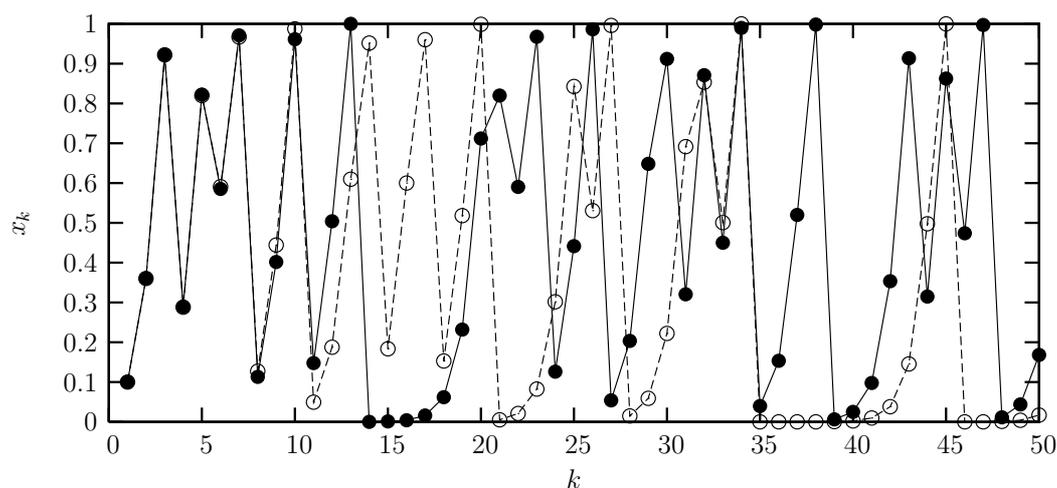


Figura 1.7: Sensibilità alle condizioni iniziali per l'equazione logistica $x_{k+1} = Ax_k(1 - x_k)$, $N = 50$, $A = 4.0$. Confronto tra $x_0 = 0.1000$ (linea continua, pallini pieni) e $x_0 = 0.1001$ (linea tratteggiata, pallini vuoti). Si noti che le due soluzioni sono praticamente sovrapposte fino a $k = 6$, ma poi si allontanano l'una dall'altra

soluzioni periodiche. Facendo uno zoom in $3.8 < A < 3.9$, vedi figura 1.6, si nota una di queste regioni intorno ad $A \approx 3.83$, dove dapprima ci sono 3 soluzioni stabili, quindi 6, 12, etc. In altri regioni di stabilità x_k oscilla tra 5 soluzioni. I fenomeni caotici, inoltre, sono caratterizzati da una dipendenza sensibile alle condizioni (dati) iniziali. Questo è particolarmente visibile in figura 1.7 in cui si osserva, per $A = 4.0$, che due soluzioni inizialmente molto vicine $x_0 = 0.1000$ (linea continua, pallini pieni) e $x_0 = 0.1001$ (linea tratteggiata, pallini vuoti), pur essendo praticamente sovrapposte fino a $k = 6$, si allontanano poi velocemente l'una dall'altra. ■

1.6 Problemi di fine capitolo

Esercizio 1.35 Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Si studi la successione definita da

$$x_0 = \lambda, \quad x_{k+1} = 4 \int_0^{x_k} \frac{e^{2\tau}}{(e^{2\tau} + 1)^2} d\tau.$$

(Soluzione a pagina 83)

Esercizio 1.36 Sia $\alpha > 0$ e si consideri l'equazione ad un passo

$$\begin{cases} x_{k+1} = \alpha - x_k^2 \\ x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

(a) determinare gli equilibri del sistema e al variare di α studiarne la natura;

(b) tracciare il diagramma di biforcazione degli equilibri;

(c) studiare gli eventuali 2-cicli e la relativa stabilità al variare di α .

(Soluzione a pagina 84)

Esercizio 1.37 Verificare numericamente (utilizzando, per esempio, un foglio elettronico o un ambiente di calcolo scientifico) i seguenti asserti.

1. Per $A > 4$ e per quasi tutti i dati iniziali x_0 esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $x_k < 0$.
2. Per $0 < A \leq 1$ il solo punto di equilibrio è $x = 0$ e risulta stabile.
3. Per $1 < A < 3$ esistono due soluzioni di equilibrio, di cui una è $x = 0$ ed è instabile e l'altra è $x = 1 - 1/A$ ed è stabile.
4. Per $A = 3$ entrambi i punti di equilibrio sono instabili. Cosa succede partendo da $x_0 = 2/3$?
5. Si fissino x_0 ed N (possibilmente molto elevato, 5000). Si discutano i risultati ottenuti per $A \in \{3.39, 3.40, 3.41, 3.42, 3.43, 3.44, 3.45, 3.46\}$.
6. Si trovi il valore di A preciso alla quinta cifra significativa che provoca il secondo raddoppio del periodo.
7. Si fissino $x_0 = 0.1$ ed $N = 1000$ e si discutano i risultati ottenuti per $A \in \{3.6, 4.0\}$.
8. Fissati x_0 ed N , discutere i risultati per $A \approx 3.83$ e $A \approx 3.845$.

(Soluzione a pagina 85)

Capitolo 2

Il caso discreto a più equazioni

2.1 Richiami di teoria

2.1.1 Il caso lineare

Consideriamo due popolazioni x_k e y_k che evolvono nel tempo secondo le successioni per ricorrenza

$$\begin{cases} x_{k+1} = \alpha x_k + \beta y_k \\ y_{k+1} = \gamma x_k + \delta y_k \end{cases}$$

Introducendo il vettore \mathbf{x} e la matrice \mathbf{A} così definiti

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

il sistema può essere scritto in forma più compatta come

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k.$$

Iterando si ottiene facilmente

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_{k-1} = \dots = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_1,$$

dove \mathbf{A}^k denota il prodotto della matrice \mathbf{A} per se stessa per k volte, secondo il consueto prodotto righe-per-colonne delle matrici.

Il comportamento per $k \rightarrow \infty$ dipende, quindi, dal comportamento di $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k$ che, a sua volta, dipende dal *raggio spettrale* di \mathbf{A} .

Definizione 2.1 Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti reali e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ i suoi autovalori. Denotiamo con $\rho(A)$ il raggio spettrale di A , definito da

$$\rho(A) = \max_{j=1, \dots, n} |\lambda_j|.$$

Teorema 2.2 Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti reali. Allora

$$\rho(A) < 1 \quad \iff \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \mathbf{0},$$

dove A^k indica il prodotto di A per se stessa k volte e $\mathbf{0}$ denota la matrice nulla.

2.1.2 Il caso non lineare

Consideriamo un caso più generale in cui la dinamica delle due popolazioni sia descritta dal sistema alle differenze

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = g(x_k, y_k), \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.3)$$

dove f, g sono funzioni reali definite e continue su un dominio D di \mathbb{R}^2 . Un punto di equilibrio per il sistema alle differenze (2.3) è una soluzione $(x_0, y_0) \in D$ del sistema algebrico di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} f(x, y) = x, \\ g(x, y) = y, \end{cases} \quad (x, y) \in D.$$

Supponiamo che le funzioni f e g siano di classe $C^2(D)$ e consideriamo un punto di equilibrio (x_0, y_0) per (2.3). Ricordando che $f(x_0, y_0) = x_0$ e $g(x_0, y_0) = y_0$, gli sviluppi di Taylor f e g attorno all'equilibrio (x_0, y_0) fino all'ordine due forniscono

$$\begin{aligned} f(x, y) - x_0 &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y_0)} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)} \frac{(y - y_0)^2}{2!} + \dots, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(x, y) - y_0 &= \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) \\ &+ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y_0)} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)} \frac{(y - y_0)^2}{2!} + \dots. \end{aligned}$$

Posto $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$ e introducendo la matrice Jacobiana

$$J(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \Big|_{(x_0, y_0)},$$

quando ξ e η sono piccoli si ha

$$\begin{bmatrix} f(\xi + x_0, \eta + y_0) - x_0 \\ g(\xi + x_0, \eta + y_0) - y_0 \end{bmatrix} \approx J(x_0, y_0) \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}.$$

Ponendo ora

$$\xi_k = x_k - x_0, \quad \eta_k = y_k - y_0,$$

possiamo considerare il sistema lineare alle differenze

$$\begin{bmatrix} \xi_{k+1} \\ \eta_{k+1} \end{bmatrix} = J(x_0, y_0) \begin{bmatrix} \xi_k \\ \eta_k \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Dalla rappresentazione matriciale (2.4) risulta allora che la condizione di stabilità del punto (x_0, y_0) , ossia $\xi_k \rightarrow 0$ e $\eta_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$, si traduce nella condizione $\rho(J(x_0, y_0)) < 1$. Pertanto, gli autovalori λ_i di $J(x_0, y_0)$ devono essere tali per cui

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, 2.$$

Infatti, posto $Y_k = (\xi_k, \eta_k)$, per ogni $k \geq 1$, si ha

$$Y_k = J(x_0, y_0)Y_{k-1} = J^2(x_0, y_0)Y_{k-2} = \cdots = J^k(x_0, y_0)Y_0,$$

per cui, se $\rho(J(x_0, y_0)) < 1$, dalla proposizione 2.2 si deduce che $Y_k \rightarrow 0$, che equivale a $\xi_k \rightarrow 0$ e $\eta_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$, da cui la stabilità. Ora, l'equazione caratteristica degli autovalori di $J(x_0, y_0)$ è

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} J(x_0, y_0)\lambda + \det J(x_0, y_0) = 0,$$

dove $\operatorname{tr} J$ e $\det J$ denotano rispettivamente la traccia e il determinante di J .

Come enunciato di seguito, nel caso bidimensionale, esiste un criterio molto semplice per verificare se gli autovalori sono contenuti nel disco unitario aperto di \mathbb{C} .

Teorema 2.5 [Condizioni di Jury o Criteri di Schur-Cohn] *Siano $f, g \in C^1(D)$, dove $D \subset \mathbb{R}^2$ è un sottoinsieme aperto che contiene un punto di equilibrio (x_0, y_0) del sistema (2.3). Allora (x_0, y_0) è localmente asintoticamente stabile se e soltanto se*

$$|\operatorname{tr} J(x_0, y_0)| < 1 + \det J(x_0, y_0) < 2.$$

In particolare, l'equilibrio (x_0, y_0) è instabile quando una delle seguenti disuguaglianze è soddisfatta

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} J(x_0, y_0) &> 1 + \det J(x_0, y_0), \\ \operatorname{tr} J(x_0, y_0) &< -1 - \det J(x_0, y_0), \\ \det J(x_0, y_0) &> 1. \end{aligned}$$

Naturalmente, i test di Jury (o criteri di Schur-Cohn) per verificare che gli autovalori cadano tutti nel disco unitario aperto di \mathbb{C} centrato nell'origine si possono enunciare anche per sistemi a più di due componenti. Ad esempio, se per la matrice Jacobiana di un sistema in \mathbb{R}^3 il polinomio caratteristico è

$$C(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},$$

allora $C(\lambda) = 0$ implica $|\lambda| < 1$ se e soltanto se:

$$\begin{aligned} 1 + a_1 + a_2 + a_3 &> 0, \\ 1 - a_1 + a_2 - a_3 &> 0, \\ 1 - a_3^2 &> |a_2 - a_3a_1|. \end{aligned}$$

Esistono delle condizioni di Jury, piuttosto complicate, per il caso generale di dimensioni $n \geq 2$ qualunque.

2.2 Il modello ospite-parassita (Nicholson-Bailey)

Consideriamo due popolazioni di insetti di specie diverse di cui una funge da *ospite* e l'altra da *parassita*. Tipicamente ognuna di queste specie ha un ciclo di vita abbastanza standard che passa attraverso gli stadi di uova, larve, pupe ed adulti. In figura 2.1 sono schematizzati i cicli di vita delle due specie ed il modo in cui la specie detta "parassita" sfrutta l'altra per riprodursi. Un adulto parassita (femmina) cerca un ospite nel quale depositare le proprie uova. Alcune di queste uova riescono a passare all'interno dell'organismo ospite, dove crescono progressivamente

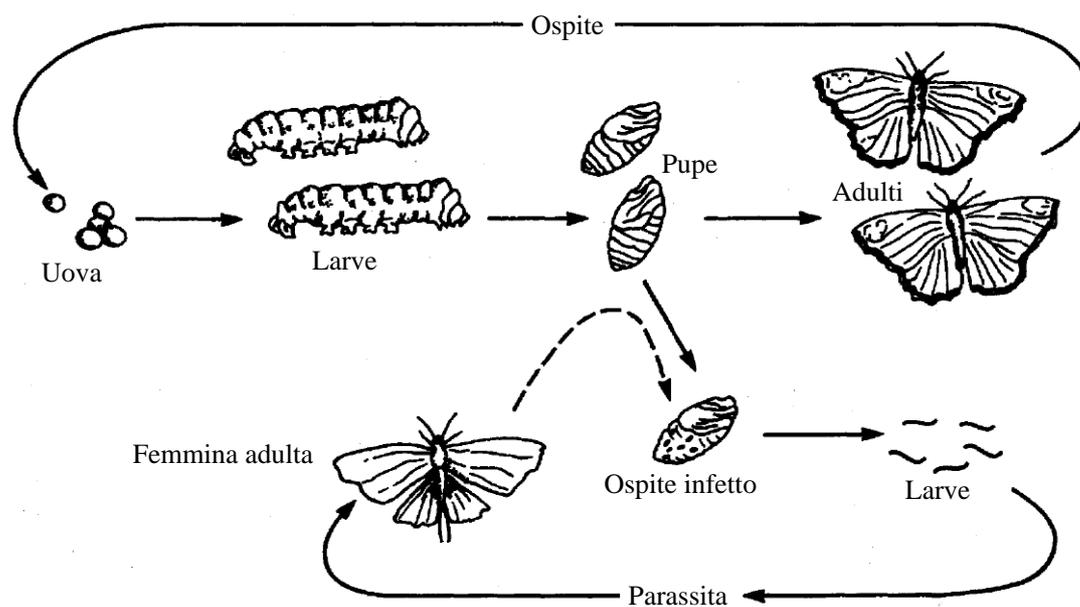


Figura 2.1: Schema di come il parassita si intromette nel ciclo vitale dell'ospite consumandolo fino alla morte

sfruttandolo e consumandolo fino a farlo morire. I cicli di vita delle due specie di insetti sono, quindi, intimamente connessi.

Per sviluppare un modello matematico che descriva la crescita delle due popolazioni e la loro inter-azione possiamo ipotizzare che:

- gli ospiti che sono stati attaccati dal parassita daranno vita alla prossima generazione di parassiti;
- gli ospiti che non sono stati attaccati dai parassiti daranno origine alla loro progenie;
- la frazione di ospiti che sono stati attaccati dai parassiti dipenda dal numero di incontri tra le due specie;
- una generazione (di ciascuna specie) dura per il periodo di tempo da k a $k + 1$, eventualmente le femmine in questo periodo depongono le uova che daranno tutte origine alla generazione $k + 1$, ma che tutti gli individui di ciascuna specie muoiano al termine del periodo di tempo (questo equivale a pensare, per esempio, che in primavera si sviluppi la nuova generazione la quale, dopo aver deposto le uova, muoia in autunno e la primavera successiva il ciclo riparte).

Introducendo le seguenti notazioni:

- x_k numero di individui della specie ospite alla generazione k ,
- y_k numero di individui parassiti alla generazione k ,
- $f(x_k, y_k)$ frazione degli ospiti non attaccati dai parassiti, pertanto $1 - f(x_k, y_k)$ è la frazione degli ospiti attaccati dai parassiti,
- α tasso netto di riproduzione della specie ospite,

- c numero medio di uova lasciate dal parassita in un singolo ospite,

il modello di evoluzione delle due specie può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} x_{k+1} = \alpha x_k f(x_k, y_k), \\ y_{k+1} = c x_k [1 - f(x_k, y_k)]. \end{cases}$$

Nel 1935 il biologo A. J. Nicholson ed il fisico V. A. Bailey svilupparono un modello per $f(x_k, y_k)$ sulla base delle seguenti assunzioni.

- Il numero di incontri N tra il parassita e l'ospite avvengono in maniera completamente casuale. Se introduciamo una costante a , che rappresenta l'efficienza con la quale un parassita riesce a scovare un ospite, allora possiamo pensare che il numero di incontri sia proporzionale al prodotto tra gli individui delle due specie scalato con a :

$$N = a x_k y_k.$$

- Un individuo della specie "ospite" funziona da ospite solo al primo incontro con un individuo della specie parassita, dando origine a c individui della specie parassita (ipotizziamo che tutte le uova rilasciate nell'ospite diventino adulti). Pertanto assumiamo che un ospite già infetto non possa essere infettato da un eventuale altro individuo parassita.
- Supponiamo che il verificarsi degli incontri sia descritto da una distribuzione di Poisson. In particolare, supponiamo che la probabilità che si verifichino r incontri in una data unità di tempo (per esempio il tempo di sopravvivenza dell'ospite) sia data da

$$p(r) = \frac{e^{-\mu} \mu^r}{r!},$$

dove μ è il numero medio di incontri nell'unità di tempo, quindi

$$\mu = \frac{N}{x_k} = \frac{a x_k y_k}{x_k} = a y_k.$$

Per esempio, la probabilità che un parassita incontri due individui ospiti e li infetti è

$$p(2) = \frac{(a y_k)^2 e^{-a y_k}}{2!}.$$

Se ci mettiamo dal punto di vista di un individuo della specie ospite, la sua probabilità di evitare di essere attaccato da un parassita è che nell'intervallo di tempo considerato (tra k e $k + 1$) non vi sia alcun incontro, ossia

$$p(0) = \frac{(a y_k)^0 e^{-a y_k}}{0!} = e^{-a y_k}$$

In definitiva, la funzione che descrive la frazione degli ospiti non attaccati, durante la loro vita, dai parassiti è

$$f(x_k, y_k) = e^{-a y_k}$$

ed il modello completo diventa

$$\begin{cases} x_{k+1} = \alpha x_k e^{-a y_k}, \\ y_{k+1} = c x_k (1 - e^{-a y_k}). \end{cases} \quad (2.6)$$

Esercizio 2.7 Studiare il sistema alle differenze di Nicholson-Bailey (2.6) per la diffusione dei parassiti nel caso particolare $a = c = 1$, e $\alpha > 0$.

Risoluzione. Si osservi che $c = 1$ significa che negli ospiti che vengono parassitati viene depositato un solo uovo, mentre $a = 1$ significa che l'efficienza con cui un parassita attacca un ospite è pari a 1. In questo caso il sistema (2.6) diventa

$$\begin{cases} x_{k+1} = \alpha x_k e^{-y_k}, \\ y_{k+1} = x_k(1 - e^{-y_k}), \end{cases} \quad (2.8)$$

Si verifica facilmente che i punti di equilibrio del sistema sono

$$(0, 0), \quad \left(\frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha - 1}, \ln \alpha \right), \quad \alpha \neq 1.$$

Si osservi che la seconda componente del secondo equilibrio è positiva quando $\alpha > 1$. La matrice Jacobiana del sistema è data da

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \alpha e^{-y} & -\alpha x e^{-y} \\ 1 - e^{-y} & x e^{-y} \end{bmatrix},$$

da cui

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J\left(\frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha - 1}, \ln \alpha\right) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha - 1} \\ \frac{\alpha - 1}{\alpha} & \frac{\ln \alpha}{\alpha - 1} \end{bmatrix}.$$

Pertanto, l'origine è localmente asintoticamente stabile se $\alpha < 1$ e instabile per $\alpha > 1$. Le condizioni di Jury per il secondo equilibrio si traducono nelle disuguaglianze

$$\left| 1 + \frac{\ln \alpha}{\alpha - 1} \right| < 1 + \frac{\ln \alpha}{\alpha - 1} + \ln \alpha < 2. \quad (2.9)$$

La prima disuguaglianza di (2.9) è ovviamente soddisfatta per $\alpha > 1$ (equilibrio positivo). La

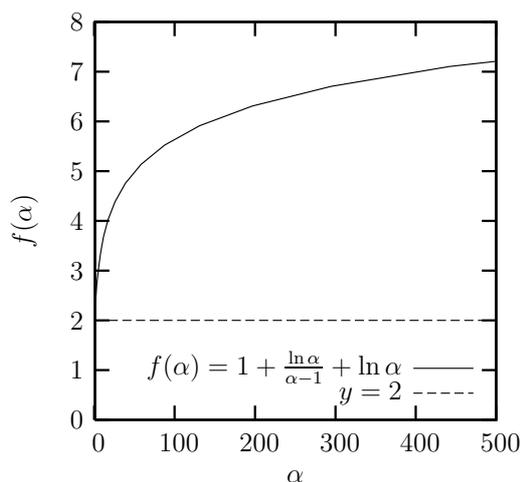


Figura 2.2: $f(\alpha) = 1 + \frac{\ln \alpha}{\alpha - 1} + \ln \alpha$ e $y = 2$

seconda disuguaglianza di (2.9) non è mai verificata, in quanto la funzione

$$f(\alpha) = 1 + \frac{\ln \alpha}{\alpha - 1} + \ln \alpha, \quad \alpha > 0,$$

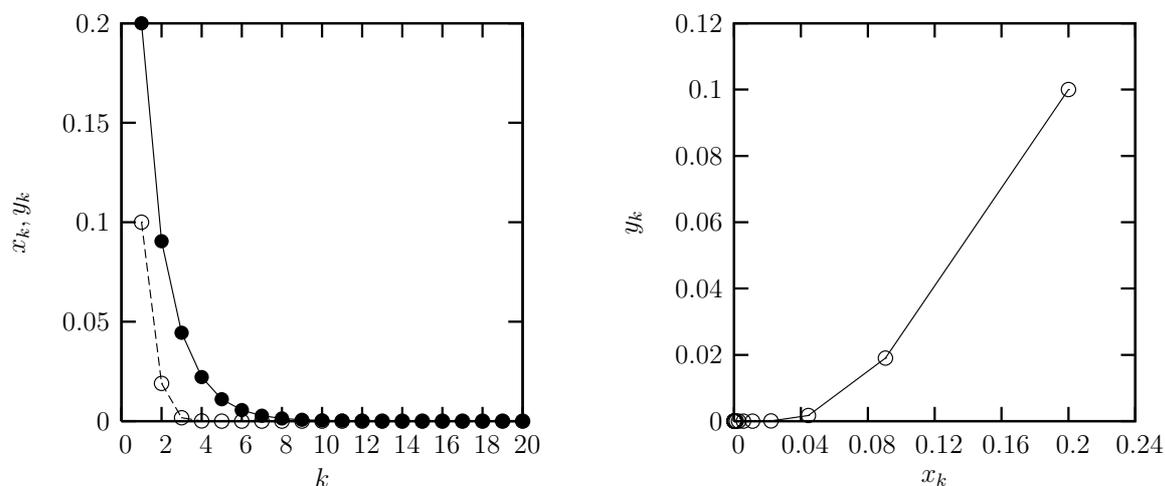


Figura 2.3: Storia temporale di x_k (linea continua, pallini pieni) e y_k (linea tratteggiata, pallini vuoti), ed evoluzione dell'orbita nel piano delle fasi (x_k, y_k) per il sistema di Nicholson-Bailey (2.8), $\alpha = 0.5$, $(x_0, y_0) = (0.2, 0.1)$, $N = 20$. Si noti la natura stabile dell'origine $(0, 0)$

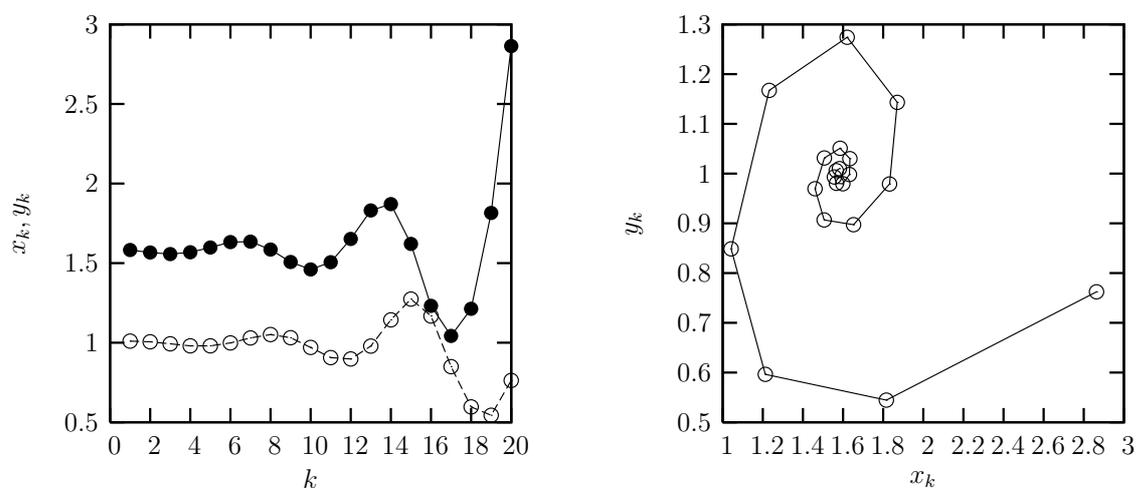


Figura 2.4: Storia temporale di x_k (linea continua, pallini pieni) e y_k (linea tratteggiata, pallini vuoti), ed evoluzione dell'orbita nel piano delle fasi (x_k, y_k) per il sistema di Nicholson-Bailey (2.8), $\alpha = e$, $(x_0, y_0) = (e/(e-1) + .01, 1.01)$, $N = 20$. Si noti la natura instabile sia del punto di equilibrio $(\frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha - 1}, \ln \alpha)$ (la condizione iniziale è molto vicina ad esso) sia dell'origine $(0, 0)$

è sempre superiore a 2, come evidente dal confronto grafico riportato in figura 2.2. Pertanto, esistono autovalori della matrice Jacobiana in modulo maggiori di uno e l'equilibrio non banale del sistema è instabile. In figura 2.3 viene riportata l'evoluzione di un'orbita nel caso $\alpha = 0.5 < 1$; come si vede entrambe le popolazioni si estinguono essendo $(0, 0)$ un equilibrio stabile. In figura 2.4 viene rappresentata l'evoluzione di un'orbita nel caso $\alpha = e > 1$, da cui si evince la natura instabile sia dell'equilibrio non banale $(\frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha - 1}, \ln \alpha)$, sia dell'origine. ■

2.3 Il modello preda-predatore (Lotka-Volterra discreto)

Consideriamo due specie di cui una è la preda preferita dell'altra. Se con x_k denotiamo la popolazione di prede alla generazione k e con y_k la popolazione di predatori, possiamo pensare che *in assenza di inter-azione tra le due popolazioni* le prede crescano secondo il modello logistico discreto, ossia con potenziale biotico $r > 0$ e coefficiente di competizione intra-specifico $\gamma > 0$ (le risorse sono limitate e quindi le prede competono per esse), mentre i predatori “soffrono” a causa dell'assenza di prede di cui cibarsi e quindi siano destinati all'estinzione con un tasso di mortalità $\mu > 0$ (nel modello di crescita dei predatori trascuriamo i nuovi nati). Sotto queste ipotesi di non-interazione, si ha il seguente sistema *disaccoppiato*

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + rx_k - \gamma x_k^2 \\ y_{k+1} = y_k - \mu y_k. \end{cases}$$

Se ora le due popolazioni vengono messe in contatto tra di loro ed i predatori iniziano a cibarsi delle prede, allora il numero di prede diminuirà proporzionalmente al numero di incontri $x_k y_k$ scalato da una costante positiva a , che può essere pensata come l'efficienza con la quale un predatore riesce a scovare (e cibarsi) di una preda. Di contro, la popolazione di predatori sarà favorita dalla presenza delle prede ed aumenterà proporzionalmente al numero di incontri di una quantità $b x_k y_k$, dove $b > 0$. Sotto queste ipotesi di inter-azione tra prede e predatori aggiungiamo i nuovi termini in entrambe le equazioni ottenendo il seguente sistema *accoppiato*

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + rx_k - \gamma x_k^2 - ax_k y_k \\ y_{k+1} = y_k - \mu y_k + bx_k y_k, \end{cases}$$

da cui, introducendo $\alpha = 1 + r$ e $\beta = 1 - \mu$ con $\alpha \in (0, \infty)$ e $\beta \in (0, 1)$, si ottiene il modello generale preda-predatore discreto

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k(\alpha - \gamma x_k) - ax_k y_k \\ y_{k+1} = \beta y_k + bx_k y_k. \end{cases} \quad (2.10)$$

Esercizio 2.11 Studiare il sistema preda-predatore (2.10) con $\gamma = a = b = 1$, $\alpha > 0$ e $0 < \beta < 1$.

Risoluzione. In questo caso particolare il sistema (2.10) diventa

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k(\alpha - x_k) - x_k y_k \\ y_{k+1} = \beta y_k + x_k y_k, \end{cases} \quad (2.12)$$

con $\alpha \in (0, \infty)$ e $\beta \in (0, 1)$, dove x_k sono le prede e y_k i predatori. I punti di equilibrio (x_0, y_0) di (2.12), che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} x(\alpha - x - y - 1) = 0 \\ y(\beta + x - 1) = 0, \end{cases}$$

sono l'origine $(0, 0)$, $(\alpha - 1, 0)$ (non banale e positivo per le prede se e solo se $\alpha > 1$) e $(1 - \beta, \alpha + \beta - 2)$ (non banale e positivo per prede e predatori se e solo se $\alpha + \beta > 2$). La matrice Jacobiana risulta

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \alpha - 2x - y & -x \\ y & \beta + x \end{bmatrix}.$$

In particolare, nei punti di equilibrio, si ha

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad J(\alpha-1,0) = \begin{bmatrix} -\alpha+2 & 1-\alpha \\ 0 & \beta+\alpha-1 \end{bmatrix},$$

e

$$J(1-\beta, \alpha+\beta-2) = \begin{bmatrix} \beta & \beta-1 \\ \alpha+\beta-2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stabilità dell'equilibrio $(0,0)$. Ricordando la condizione 2.5 e che α e β sono entrambi positivi, si ha

$$\alpha + \beta < 1 + \alpha\beta < 2 \iff \begin{cases} \alpha + \beta < 1 + \alpha\beta \\ 1 + \alpha\beta < 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha(1-\beta) < 1-\beta \\ \alpha\beta < 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha < 1 \\ \alpha < \frac{1}{\beta}, \end{cases}$$

da cui $\alpha < 1$ ($0 < \beta < 1 \implies 1/\beta > 1$). Pertanto l'origine è localmente asintoticamente stabile

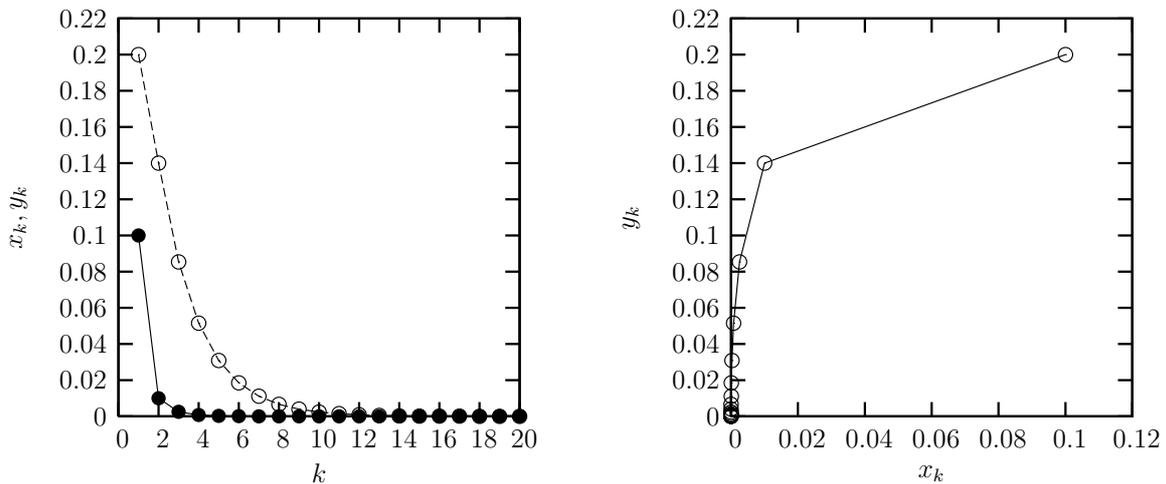


Figura 2.5: Storia temporale di x_k (linea continua, pallini pieni) e y_k (linea tratteggiata, pallini vuoti), ed evoluzione dell'orbita nel piano delle fasi (x_k, y_k) per il sistema (2.12), $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.6$, $(x_0, y_0) = (0.1, 0.2)$, $N = 20$. Si noti la natura stabile dell'origine, che comporta l'estinzione sia della popolazione delle prede che dei predatori ($\alpha < 1$)

se e solo se $\alpha < 1$, per cui si ha l'estinzione di entrambe le specie per $k \rightarrow \infty$. Si veda, a tal proposito, la figura 2.5.

Stabilità dell'equilibrio $(\alpha-1, 0)$. Ricordando che questo equilibrio è significativo per $\alpha > 1$, la condizione di locale asintotica stabilità per $(\alpha-1, 0)$ è

$$\beta + 1 < 1 + (\alpha + \beta - 1)(2 - \alpha) < 2 \iff \begin{cases} (\alpha - 1)(\alpha + \beta - 2) < 0 \\ \alpha^2 + \alpha(\beta - 3) + (3 - 2\beta) > 0, \end{cases}$$

Siccome $\alpha > 1$, la prima disequazione è verificata per $\alpha + \beta < 2$. Per quanto riguarda la seconda, affinché esistano punti in cui la parabola si annulla, il discriminante $\Delta = (\beta - 3)^2 - 4(3 - 2\beta)$ dovrebbe essere positivo. Svolgendo i calcoli si ottiene $\Delta = \beta^2 + 2\beta - 3 > 0 \implies \beta < -2 \vee \beta > 1$. Siccome $0 < \beta < 1$, $\Delta < 0$ e quindi la parabola è sempre positiva e la seconda disequazione è

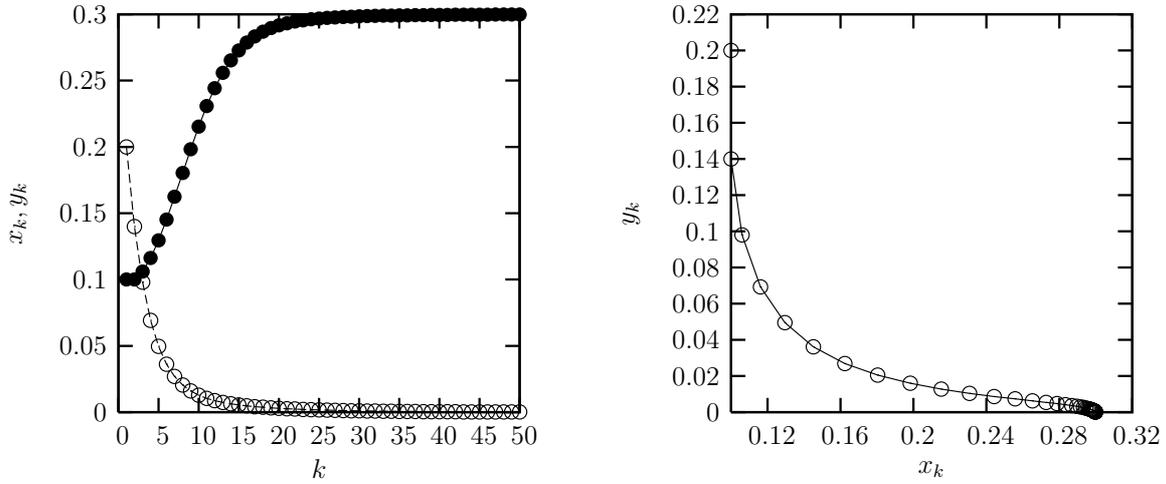


Figura 2.6: Storia temporale di x_k (linea continua, pallini pieni) e y_k (linea tratteggiata, pallini vuoti), ed evoluzione dell'orbita nel piano delle fasi (x_k, y_k) per il sistema (2.12), $\alpha = 1.3$, $\beta = 0.6$, $(x_0, y_0) = (0.1, 0.2)$, $N = 50$. Si noti la natura stabile del punto di equilibrio $(\alpha - 1, 0)$, che comporta la sopravvivenza delle prede e l'estinzione dei predatori ($\alpha > 1$ e $\alpha + \beta < 2$)

verificata per ogni valore di α . La condizione che garantisce la stabilità dell'equilibrio $(\alpha - 1, 0)$ è quindi

$$\alpha + \beta < 2, \quad \alpha > 1.$$

In figura 2.6 sono riportati il diagramma di fase e le storie temporali ottenute per $\alpha > 1$ e $\alpha + \beta < 2$, che garantiscono la stabilità del punto di equilibrio $(\alpha - 1, 0)$, ovvero la sopravvivenza delle prede e l'estinzione dei predatori.

Stabilità dell'equilibrio $(1 - \beta, \alpha + \beta - 2)$. Affinché l'equilibrio abbia significato deve essere $\alpha + \beta > 2$. Ricordando che $0 < \beta < 1$, la condizione di locale asintotica stabilità per questo punto di equilibrio è

$$\beta + 1 < 1 + \beta - (\alpha + \beta - 2)(\beta - 1) < 2 \iff \begin{cases} \alpha + \beta > 2 \\ (1 - \beta)(\alpha + \beta - 3) < 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha + \beta > 2 \\ \alpha + \beta - 3 < 0, \end{cases}$$

per cui l'equilibrio $(1 - \beta, \alpha + \beta - 2)$ è positivo e localmente asintoticamente stabile se, e soltanto se,

$$2 < \alpha + \beta < 3, \quad 0 < \beta < 1.$$

Le figure 2.7 e 2.8 riportano i diagrammi di fase nei quali si nota il raggiungimento dell'equilibrio $(1 - \beta, \alpha + \beta - 2)$ in due modi diversi dipendentemente dai valori di α e β . Riassumendo, valgono i seguenti fatti:

- se $\alpha < 1$ entrambe le specie si estinguono;
- se $\alpha > 1$ e $\alpha + \beta < 2$ allora le prede sopravvivono mentre i predatori sono destinati ad estinguersi;

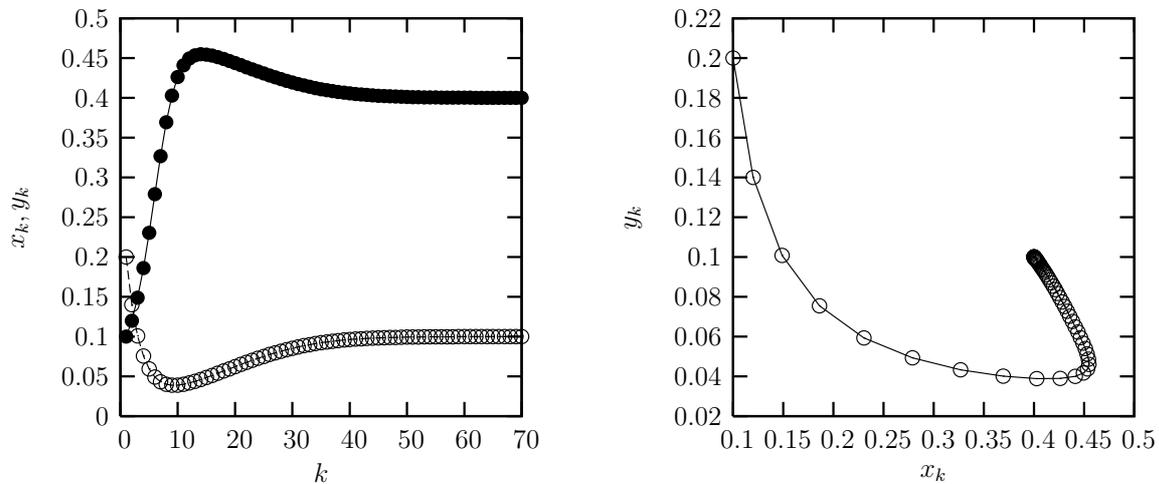


Figura 2.7: Storia temporale di x_k (linea continua, pallini pieni) e y_k (linea tratteggiata, pallini vuoti), ed evoluzione dell'orbita nel piano delle fasi (x_k, y_k) per il sistema (2.12), $\alpha = 1.5$, $\beta = 0.6$, $(x_0, y_0) = (0.1, 0.2)$, $N = 70$. Si noti la stabilità dell'equilibrio non banale $(1 - \beta, \alpha + \beta - 2)$, che comporta la sopravvivenza sia delle prede che dei predatori ($\alpha > 1$ e $2 < \alpha + \beta < 3$)

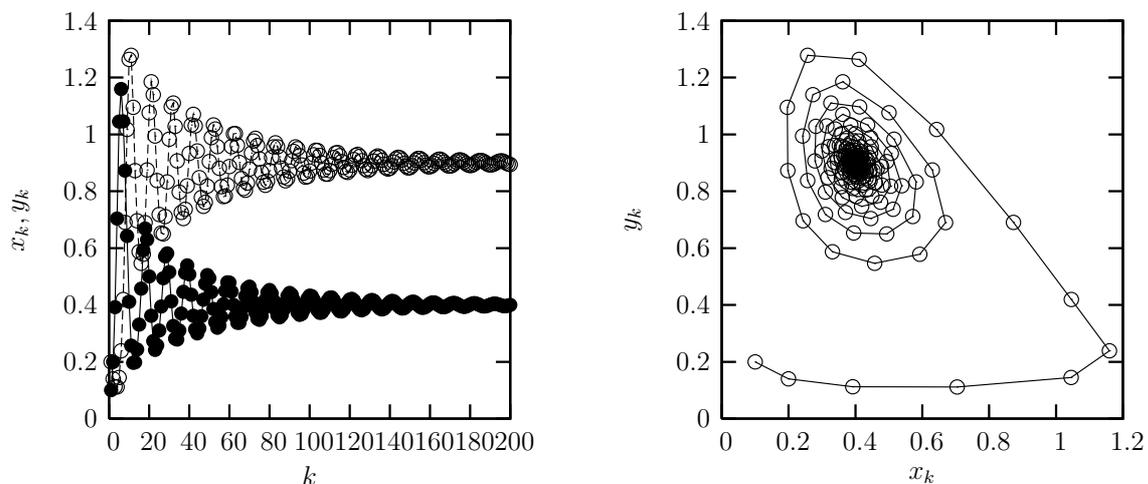


Figura 2.8: Storia temporale di x_k (linea continua, pallini pieni) e y_k (linea tratteggiata, pallini vuoti), ed evoluzione dell'orbita nel piano delle fasi (x_k, y_k) per il sistema (2.12), $\alpha = 2.3$, $\beta = 0.6$, $(x_0, y_0) = (0.1, 0.2)$, $N = 200$. Si noti la stabilità dell'equilibrio non banale $(1 - \beta, \alpha + \beta - 2)$ (essendo $\alpha > 1$ e $2 < \alpha + \beta < 3$) raggiunto tramite una traiettoria a spirale

- se $2 < \alpha + \beta < 3$, allora entrambe le specie sopravvivono convergendo all'equilibrio non banale $(1 - \beta, \alpha + \beta - 2)$.

■

2.4 Problemi di fine capitolo

Esercizio 2.13 *Il modello ospite-parassita di Nicholson e Bailey (vedi la sezione 2.2) è poco realistico in quanto non si ha mai non-estinzione. Studiare il modello realistico ospite-parassita descritto dal sistema alle differenze*

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{\alpha_1 x_k}{1 + y_k} \\ y_{k+1} = \frac{\alpha_2 y_k}{1 + \frac{y_k}{x_k}} \end{cases}, \quad (2.14)$$

con $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, \infty)$. (Soluzione a pagina 87)

Capitolo 3

Il caso continuo ad una equazione

3.1 Richiami di teoria

Definizione 3.1 Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $f(t, x)$ una funzione continua su $I \times \mathbb{R}$. Diciamo che $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una soluzione dell'equazione differenziale ordinaria (del prim'ordine, in forma normale)

$$\dot{x} = f(t, x),$$

se x è derivabile su I e $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, per ogni $t \in I$.

Teorema 3.2 [Esistenza e unicità locale] Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f(t, x)$ una funzione di classe C^1 su $I \times \mathbb{R}$. Si consideri il problema di Cauchy

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (3.3)$$

Allora esistono $\delta > 0$ e un'unica soluzione locale $x :]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\rightarrow \mathbb{R}$ di (3.3). Infine, le soluzioni dipendono con continuità dai dati iniziali, ossia se x e y sono due soluzioni di (3.3) definite sull'intervallo $[t_0, t_1]$ e corrispondenti ai dati iniziali x_0 e y_0 , esiste una costante $K > 0$ (dipendente da t_0, t_1) tale che

$$|y(t) - x(t)| \leq K|y_0 - x_0|,$$

per ogni $t \in [t_0, t_1]$.

Osservazione 3.4 L'ipotesi che f sia di classe C^1 può essere indebolita supponendo che f sia localmente Lipschitziana rispetto a x uniformemente rispetto a t , ossia esista $c > 0$ tale che

$$|f(t, x_2) - f(t, x_1)| \leq c|x_2 - x_1|,$$

per ogni x_1, x_2 in un intorno del dato iniziale x_0 , uniformemente rispetto al tempo $t \in I$.

Teorema 3.5 [Esistenza globale] Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $f(t, x)$ una funzione continua su $I \times \mathbb{R}$ e localmente Lipschitziana rispetto a x uniformemente rispetto a t . Si consideri l'equazione differenziale

$$\dot{x} = f(t, x).$$

Sia $x : J \rightarrow \mathbb{R}$ una sua soluzione con $J \subseteq I$ intervallo massimale di definizione (ossia non esistono soluzioni \tilde{x} dell'equazione definite su un intervallo $\tilde{J} \supset J$ e tali che $\tilde{x} = x$ su J). Supponiamo che esistano due costanti $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ tali che

$$|f(t, x(t))| \leq \alpha + \beta|x(t)|, \quad \forall t \in J.$$

Allora $J = I$. In particolare, se $I = \mathbb{R}$ una condizione di crescita sub-lineare della funzione f rispetto al secondo argomento e uniformemente rispetto a t ,

$$|f(t, \xi)| \leq \alpha + \beta|\xi|, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}$$

implica che le soluzioni massimali sono definite su tutto \mathbb{R} .

Teorema 3.6 [Asintoto orizzontale] Siano $a > 0$ e $x : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che esistano i limiti

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t) = \gamma \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Allora $\gamma = 0$.

Definizione 3.7 Diremo che x_0 è un punto di equilibrio se $f(x_0) = 0$. Diremo che $x(t) = x_0$ è una soluzione stazionaria (o soluzione di equilibrio) se soddisfa l'equazione $\dot{x} = f(x)$.

Osservazione 3.8 In base alle definizioni precedenti, possiamo affermare che le soluzioni stazionarie sono tutti e soli i punti di equilibrio.

Teorema 3.9 [Stabilità dei punti di equilibrio] Se x_0 è un punto di equilibrio per $\dot{x} = f(x)$, ossia $f(x_0) = 0$, e $f \in C^1$, allora valgono i seguenti fatti:

- (a) se $f'(x_0) < 0$, allora x_0 è localmente asintoticamente stabile;
- (b) se $f'(x_0) > 0$, allora x_0 è instabile;
- (c) se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \neq 0$, allora x_0 è instabile;
- (d) se $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) < 0$, allora x_0 è localmente asintoticamente stabile;
- (e) $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) > 0$, allora x_0 è instabile.

3.2 Il modello logistico continuo

Vogliamo costruire un modello *differenziale continuo* che descriva la crescita di una popolazione di batteri. Sia $x(t)$ il numero di individui al tempo $t \geq 0$ e $x(0) = x_0$ il valore iniziale del numero di individui al tempo iniziale $t = 0$. Se $k(t)$ è il tasso di crescita della popolazione, allora il problema di Cauchy che modella questa situazione è

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = k(t)x(t) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Il modello può essere più o meno complicato a seconda dell'espressione di $k(t)$.

Caso $k(t) = k$ costante. In questo caso soluzione è particolarmente semplice

$$x(t) = x_0 e^{kt},$$

da cui la dizione *crescita esponenziale*.

Caso $k(t)$ generale. In questo caso l'equazione differenziale è lineare omogenea e la soluzione è nota

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t k(s) ds}.$$

Caso $k(t)$ proporzionale alle risorse. Tra il caso banale k costante e quello generale $k = k(t)$, merita una discussione particolare quello in cui il tasso di crescita della popolazione dipenda

dalle risorse presenti nell'ambiente. Sia $y(t)$ la funzione che descrive l'andamento di queste risorse al tempo t . Allora è ragionevole pensare che anche il tasso di crescita della popolazione sia proporzionale alle risorse disponibili, ossia

$$k(t) = \alpha y(t), \quad \alpha > 0.$$

Chiaramente anche le risorse $y(t)$ varieranno nel tempo dipendentemente da quante ne vengono consumate, in particolare esse diminuiranno proporzionalmente alla crescita della popolazione di batteri, ossia

$$\dot{y} = -\beta \dot{x} = -\beta kx = -\beta \alpha xy, \quad \beta > 0.$$

In definitiva si ottiene il sistema accoppiato

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha xy \\ \dot{y} = -\beta \alpha xy, \end{cases}$$

con α e β costanti positive. Se introduciamo $x_0 = x(0)$ e $y_0 = y(0)$, integrando $\dot{y} = -\beta \dot{x}$ si ottiene immediatamente

$$y(t) - y_0 = -\beta(x(t) - x_0)$$

da cui

$$y(t) = -\beta x(t) + c, \quad c = y_0 + \beta x_0.$$

Pertanto l'equazione per l'evoluzione dei batteri diventa

$$\dot{x} = \alpha(c - \beta x)x,$$

che, dopo aver introdotto $r = \alpha c > 0$ e $K = c/\beta > 0$, può essere riscritta in forma standard come

$$\dot{x} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) x, \quad (3.10)$$

in letteratura nota come *equazione logistica*. Le costanti r e K sono, rispettivamente, il *tasso intrinseco di crescita* (o *potenziale biotico*) e la *capacità portante dell'ambiente* (in inglese *carrying capacity*), ossia il livello di popolazione che l'ambiente riesce a sostenere per $t \rightarrow \infty$. Si osservi che, per valori di x piuttosto piccoli (che non significa assolutamente $t \rightarrow 0$), la crescita è di tipo esponenziale, ossia

$$x \rightarrow 0 \quad \implies \quad \dot{x} \approx rx \quad \implies \quad x(t) \approx x_0 e^{rt}.$$

La soluzione dell'equazione logistica è facilmente ottenibile in forma chiusa (si veda l'Esercizio 3.13) ed è

$$x(t) = \frac{x_0 K}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}}. \quad (3.11)$$

Esercizio 3.12 *Studia il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) x \\ x(0) = \alpha, \end{cases} \quad \alpha > 0.$$

Risoluzione. Preliminarmente osserviamo che, volendo riscrivere il problema nella forma $\dot{x} = f(t, x)$, si ha

$$f(t, x) = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) x,$$

che è di classe C^1 , pertanto è applicabile il Teorema di esistenza e unicità locale 3.2. Questo teorema garantisce che, localmente, le soluzioni non possano “incrociarsi”. Pertanto risulta particolarmente utile determinare le soluzioni stazionarie del problema, quelle nella forma $x(t) = \gamma$, in quanto costituiscono dei “limiti invalicabili” dalla soluzione $x(t)$.

Per il calcolo di queste soluzioni stazionarie occorre risolvere l'equazione $\dot{x} = 0$, ossia

$$r \left(1 - \frac{x}{K}\right) x = 0 \implies x(t) = 0 \vee x(t) = K.$$

Pertanto, separiamo lo studio del comportamento qualitativo in due regioni $0 < \alpha < K$ e $\alpha > K$.

Caso $0 < \alpha < K$. Siccome $x(0)$ è positivo ma inferiore a K , allora inizialmente $\dot{x} > 0$, ossia la soluzione $x(t)$ cresce nell'intorno di $t = 0$. Ovviamente la soluzione $x(t)$ deve comunque rimanere limitata dalla soluzione stazionaria $x(t) = K$, pertanto in questo primo caso la derivata prima è sempre positiva e $x(t)$ cresce in modo monotono fino al valore asintotico K . Per raggiungere il valore asintotico la soluzione $x(t)$, da un certo \bar{t} in poi, deve crescere ma sempre di meno, ossia deve avere concavità verso il basso (per poter tendere al valore asintotico K senza oltrepassarlo). Pertanto la soluzione ammette un punto di flesso. La sua ricerca è piuttosto semplice, basta calcolare \ddot{x} e studiarne il segno. Si ha quindi

$$\ddot{x} = -\frac{r}{K}\dot{x}x + r \left(1 - \frac{x}{K}\right) \dot{x} = \left(-\frac{r}{K}x + r - \frac{r}{K}x\right) \dot{x} = r \left(1 - \frac{2}{K}x\right) \dot{x}.$$

Dal momento che, per $0 < \alpha < K$, la soluzione è sempre crescente, l'unico punto in cui $\ddot{x} = 0$ (e quindi l'unico candidato al flesso) è quel valore \bar{t} tale che

$$1 - \frac{2}{K}x(\bar{t}) = 0 \implies x(\bar{t}) = \frac{K}{2}.$$

Studiando il segno di \ddot{x} è immediato verificare che essa è positiva per $0 < t < \bar{t}$ e negativa per $t > \bar{t}$. Questo significa che esiste sempre, per $0 < \alpha \leq K/2$, un punto di flesso in corrispondenza del quale la velocità di crescita della popolazione è massima e pari a

$$(\dot{x})_{\max} = r \left(1 - \frac{K/2}{K}\right) \frac{K}{2} = \frac{rK}{4}.$$

In figura 3.1 è riportata l'evoluzione della soluzione per $K = 1$ e $r = 2$ al variare della condizione iniziale $x_0 = \alpha$ con $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$. Il flesso esiste solo per $\alpha \leq K/2$ (nel caso $\alpha = K/2$ il flesso si trova al tempo $t = 0$), e la soluzione è comunque sempre strettamente crescente verso il valore asintotico K .

Caso $\alpha > K$. Siccome $x(0)$ è positivo e superiore a K , allora inizialmente \dot{x} è negativa, con conseguente decrescita della popolazione. La derivata prima potrebbe cambiare segno se la popolazione scendesse sotto al valore asintotico K , ma questo non è possibile perché le soluzioni non possono intersecarsi. Pertanto, se $\alpha > K$ la popolazione decresce in maniera monotona verso il valore asintotico $x_\infty = K$. In figura 3.1 è riportata l'evoluzione della soluzione per $K = 1$, $r = 2$ e $\alpha = 1.3$.

Concludiamo osservando che K , la capacità portante dell'ambiente, è un *equilibrio stabile globale*, che viene raggiunto *indipendentemente* dal valore del dato iniziale $x(0) = \alpha > 0$ (vedi figura 3.1). ■

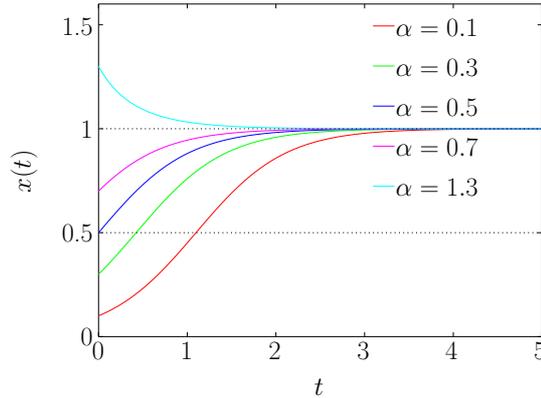


Figura 3.1: Evoluzione della soluzione del problema di Cauchy 3.12 per $K = 1$ e $r = 2$ al variare della condizione iniziale $x_0 = \alpha$. Si osservi che il flesso è presente solo per $0 < \alpha \leq K/2$ e che si trova sempre ad $x(t) = K/2$. Il valore asintotico $x(\infty) = K$, ossia la capacità portante dell'ambiente, è un *equilibrio stabile globale*

Esercizio 3.13 Determina la soluzione analitica (o in forma chiusa) del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) x \\ x(0) = x_0, \quad x_0 > 0. \end{cases}$$

Risoluzione. L'equazione differenziale è a variabili separabili, per cui la riscriviamo nella forma conveniente

$$\frac{dx}{dt} = r \left(\frac{K-x}{K} \right) x \iff \frac{K}{x(K-x)} dx = r dt \iff \frac{K}{x(x-K)} dx = -r dt.$$

Integrando si ha

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{K}{x(x-K)} dx = \int_0^t -r dt \iff \int_{x_0}^{x(t)} \left[\frac{1}{x-K} - \frac{1}{x} \right] dx = -r[t-0]$$

da cui

$$\left[\ln |x-K| - \ln |x| \right]_{x_0}^{x(t)} = -rt \implies \left[\ln \left| \frac{x-K}{x} \right| \right]_{x_0}^{x(t)} = -rt \iff \ln \left| \frac{x-K}{x} \right| - \ln \left| \frac{x_0-K}{x_0} \right| = -rt.$$

Compattando nuovamente i logaritmi e passando agli argomenti si ha

$$\ln \left| \frac{x-K}{x} \cdot \frac{x_0}{x_0-K} \right| = -rt \implies \left| \frac{x-K}{x} \cdot \frac{x_0}{x_0-K} \right| = e^{-rt} \iff \left| \frac{x-K}{x} \right| = \left| \frac{x_0-K}{x_0} \right| e^{-rt}.$$

Siccome dallo studio qualitativo abbiamo concluso che se $x_0 > K$ allora $x(t) > K$ per ogni $t > 0$ e che se $0 < x_0 < K$ allora $0 < x(t) < K$ per ogni $t > 0$, possiamo concludere che gli argomenti dei due moduli hanno sempre segno *concorde*, pertanto i moduli possono essere tolti senza problemi ottenendo

$$\frac{x-K}{x} = \frac{x_0-K}{x_0} e^{-rt} \iff 1 - \frac{K}{x} = \frac{x_0-K}{x_0} e^{-rt} \iff \frac{K}{x} = 1 - \frac{x_0-K}{x_0} e^{-rt}$$

da cui

$$\frac{K}{x} = \frac{x_0 - (x_0 - K)e^{-rt}}{x_0} \iff \frac{x}{K} = \frac{x_0}{x_0 - (x_0 - K)e^{-rt}} \implies x(t) = \frac{x_0 K}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}}.$$

■

3.3 Problemi di fine capitolo 3

Esercizio 3.14 Studiare, al variare del dato iniziale $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}(-2x^3 + 3x^2 - x) \\ x(0) = \alpha. \end{cases}$$

Determinare, poi, la soluzione in forma chiusa e verificare la correttezza dello studio qualitativo. (Soluzione a pagina 89)

Esercizio 3.15 Studiare, al variare del dato iniziale $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \\ x(0) = \alpha. \end{cases}$$

Determinare, poi, la soluzione in forma chiusa e verificare la correttezza dello studio qualitativo. (Soluzione a pagina 91)

Esercizio 3.16 Studiare, al variare del dato iniziale $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - x \\ x(0) = \alpha. \end{cases} \quad (3.17)$$

Si risolva inoltre esplicitamente il problema determinando i tempi di estinzione t_α delle soluzioni che hanno intervallo massimale $J_\alpha \neq \mathbb{R}$. (Soluzione a pagina 91)

Capitolo 4

Il caso continuo a due equazioni lineari

Prima di passare a modelli continui che descrivano in modo abbastanza realistico il comportamento di due popolazioni interagenti, e che per questo motivo sono non-lineari (vedi gli esempi del capitolo 5), in questo capitolo cerchiamo di capire come affrontare lo studio di un modello semplificato continuo e *lineare*. Infatti, nel caso più generale di sistemi non-lineari sarà comunque necessario passare attraverso la linearizzazione nell'intorno dei punti di equilibrio, come fatto nel capitolo 2 per il caso discreto.

4.1 Un modello continuo e semplificato di preda-predatore

Consideriamo due specie x e y delle quali la prima è la preda preferita e la fonte di sostentamento della seconda. Dapprima ipotizziamo che esse non interagiscano tra loro. Se, in un modello estremamente semplificato, ipotizziamo anche che siano caratterizzate da tassi di crescita e/o decrescita costanti, allora possiamo scrivere

$$\begin{cases} x' = \alpha x \\ y' = -\delta y, \end{cases}$$

dove si suppone che le prede, in assenza di predatori, crescano con un tasso costante $\alpha > 0$ e, quindi, indefinitamente mentre i predatori, in assenza di prede, non facciano che diminuire (a causa dell'assenza di cibo) con un tasso di decrescita costante $\delta > 0$.

Se ora permettiamo che le due popolazioni interagiscano, allora le prede diminuiranno certamente a causa della presenza di predatori e proporzionalmente al numero di quest'ultimi, mentre i predatori aumenteranno proporzionalmente al numero di prede (il loro cibo). Pertanto il sistema di equazioni si modifica nella forma

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y \\ y' = \gamma x - \delta y, \end{cases}$$

dove $\beta > 0$ e $\gamma > 0$ misurano il grado di inter-azione tra le due specie.

In definitiva, si tratta di capire il comportamento di un generico sistema lineare del tipo

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy. \end{cases}$$

4.2 Richiami di teoria

Pur limitandoci a sistemi lineari di due equazioni in due incognite (2×2), tutta la teoria riportata può essere facilmente estesa a sistemi $n \times n$ con $n > 2$. Consideriamo il sistema planare del prim'ordine del tipo

$$\begin{cases} x' = ax + by + f(t) \\ y' = cx + dy + g(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

dove a, b, c, d sono coefficienti arbitrari ed $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue del tempo t assegnate, dove I è un intervallo in \mathbb{R} .

Definizione 4.2 Il sistema (4.1) si dice *accoppiato* se $b \neq 0$ e $c \neq 0$, ovvero se ciascuna delle due equazioni differenziali contiene entrambe le incognite x e y .

Definizione 4.3 Il sistema (4.1) si dice *disaccoppiato* se $b = 0$ oppure $c = 0$, ovvero se almeno una delle due equazioni contiene una sola incognita e pertanto può essere risolta indipendentemente dall'altra.

Definizione 4.4 Il sistema (4.1) si dice *omogeneo* se $f(t) = g(t) = 0$ per ogni $t \in I$, ovvero se non compaiono "forzanti" esterne.

Definizione 4.5 Si chiamano *soluzioni di equilibrio* (o *stazionarie*) del sistema (4.1) con $f = g = 0$ le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0. \end{cases}$$

Nel caso $ad \neq bc$ (sistema non singolare), l'unica soluzione stazionaria è l'origine $(0, 0)$.

Definizione 4.6 Chiamiamo *ritratto di fase* il luogo dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ aventi come ascissa la soluzione $x(t)$ e come ordinata la soluzione $y(t)$ del sistema (4.1).

Se il sistema (4.1) è disaccoppiato, la soluzione esplicita si trova ricavando dapprima l'incognita disaccoppiata (integrando con le tecniche note per le equazioni del prim'ordine), quindi la si sostituisce nella seconda equazione che diventa anch'essa ad una sola incognita e può essere integrata. Se entrambe le equazioni sono disaccoppiate, ovvero se $b = 0$ e $c = 0$, allora ciascuna equazione si risolve in modo indipendente.

Consideriamo il sistema (4.1) nel caso omogeneo e accoppiato:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy. \end{cases} \quad (4.7)$$

Il sistema (4.7) può essere riscritto come

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (4.8)$$

dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Osservazione 4.9 Essendo (4.8) un sistema lineare, vale il principio di sovrapposizione degli effetti, ovvero se \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 sono due soluzioni distinte, allora una loro qualsiasi combinazione lineare $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2$ è ancora soluzione di (4.8), $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

Il sistema (4.8) ricorda l'equazione differenziale ordinaria $x' = ax$, che ha come soluzione l'esponenziale $x(t) = Ce^{at}$, dove C è una costante arbitraria. È quindi lecito aspettarsi come soluzione di (4.8) un vettore del tipo $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}e^{\lambda t}$ con $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$, essendo u_1 e u_2 due costanti arbitrarie. Sostituendo la soluzione $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}e^{\lambda t}$ in (4.8) si ottiene:

$$\lambda \mathbf{u}e^{\lambda t} = \mathbf{A} \mathbf{u}e^{\lambda t},$$

ovvero

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}, \quad (4.10)$$

che è un classico problema agli autovalori; in particolare, tutte le coppie $(\lambda_i, \mathbf{u}_i)$ che soddisfano la (4.10) si chiamano rispettivamente *autovalori* e *autovettori* associati alla matrice \mathbf{A} . Per ricavare \mathbf{u} da (4.10), basta riscrivere il sistema come

$$[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2] \mathbf{u} = 0, \quad (4.11)$$

dove \mathbf{I}_2 è la matrice identità 2×2

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema (4.11), essendo omogeneo, ammette la soluzione banale $\mathbf{u} = 0$. Affinché vi sia anche una soluzione diversa dalla soluzione nulla è necessario che

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2| = 0,$$

ovvero

$$\left| \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0.$$

Il polinomio di grado due $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$ è detto anche *polinomio caratteristico* e fornisce, appunto, gli autovalori della matrice \mathbf{A} (in generale, questo polinomio ha grado n pari alla dimensione della matrice quadrata \mathbf{A} ; nel caso di sistemi planari gli autovalori sono solo due λ_1 e λ_2). Una volta noti gli autovalori λ_i , gli autovettori \mathbf{u}_i associati a ciascun autovalore si ricavano sostituendo λ_i in (4.11):

$$[\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_2] \mathbf{u}_i = 0.$$

Si noti che gli autovettori \mathbf{u}_i sono definiti a meno di una costante arbitraria e, tipicamente, vengono normalizzati in modo che la loro norma euclidea sia unitaria. Le radici del polinomio caratteristico di secondo grado $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$, essendo solo due (nel campo complesso), possono essere reali e distinte, reali e coincidenti (ovvero un autovalore di molteplicità doppia) oppure complesse (coniugate). Si noti che, essendo

$$a + d = \text{tr}(\mathbf{A}), \quad ad - bc = \det(\mathbf{A}),$$

gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$\lambda^2 - T\lambda + D = 0, \quad T = \text{tr}(\mathbf{A}), \quad D = \det(\mathbf{A}).$$

Pertanto, la presenza di autovalori reali e distinti, reali e coincidenti o complessi coniugati dipende esclusivamente dal segno di $T^2 - 4D$.

4.2.1 Autovalori reali distinti

Nel caso di autovalori reali e distinti, essendo $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{u}_1 e^{\lambda_1 t}$ e $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{u}_2 e^{\lambda_2 t}$ entrambe soluzioni del sistema (4.8), in base all'osservazione 4.9 la soluzione generale è una qualsiasi loro combinazione lineare

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \mathbf{u}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathbf{u}_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (4.12)$$

Il comportamento asintotico della soluzione del sistema lineare (4.7) (ossia per $t \rightarrow +\infty$) dipende esclusivamente dal segno degli autovalori associati alla matrice \mathbf{A} . In particolare, se entrambi gli autovalori sono negativi, ossia $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$, le due funzioni esponenziali tendono a zero e pertanto, indipendentemente dalle costanti C_1 e C_2 , la soluzione $x(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$. Siccome l'unica soluzione stazionaria (o di equilibrio) del sistema (4.7) è l'origine, essa risulta essere asintoticamente stabile e prende il nome di *nodo (proprio) stabile* o *nodo a due tangenti stabile*. Questo significa che, partendo da una qualsiasi condizione iniziale, arbitrariamente lontana dall'origine, la soluzione viene attratta da quest'ultima per $t \rightarrow +\infty$, come si vede in figura 4.1 (sinistra). Se almeno uno degli autovalori è positivo, i.e. $\lambda_1 > 0$ oppure $\lambda_2 > 0$, invece, $x(t) \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow +\infty$. Tuttavia si distinguono due casi. Se *entrambi* gli autovalori sono positivi l'origine si dice *nodo (proprio) instabile* o *nodo a due tangenti instabile* (figura 4.1, destra), mentre se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ l'origine si dice *punto di sella o colle* (figura 4.2). I vari casi sono riassunti in tabella 4.1, a pagina 45.

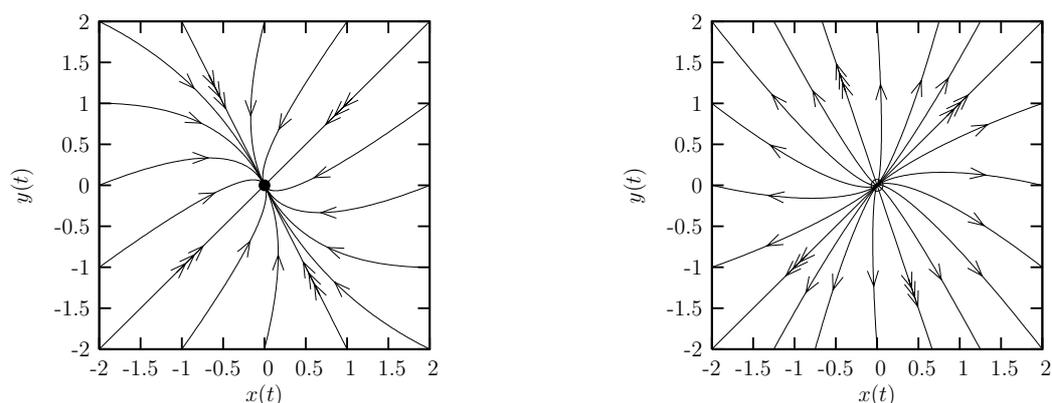


Figura 4.1: Ritratto di fase per un nodo proprio (o a due tangenti) stabile (sinistra) e instabile (destra) e direzioni degli autovettori (con tripla freccia). Si noti come le soluzioni, nell'intorno dell'origine si allineino lungo una direzione preferenziale corrispondente sempre alla direzione dell'autovalore di modulo minimo, sia nel caso stabile (destra) che instabile (sinistra)

Se si è interessati esclusivamente a determinare la natura dell'origine (nodo stabile/instabile o sella), si potrebbe pensare che sia inutile determinare gli autovettori in quanto l'informazione utile è contenuta negli autovalori. In realtà gli autovettori sono importanti sia per la determinazione della soluzione in forma esplicita (si veda l'equazione (4.12)), sia per il ritratto di fase, ovvero quando si vuole riportare sul piano (x, y) le soluzioni $x(t)$ e $y(t)$ parametrizzate in funzione del tempo.

Nel caso di nodo (proprio) stabile, i.e. se entrambi gli autovalori sono negativi, le traiettorie al crescere di t convergono verso l'origine allineandosi lungo la retta passante per l'origine ed avente coefficiente angolare pari al rapporto tra la seconda e la prima componente dell'autovettore corrispondente all'autovalore di modulo minimo, indipendentemente dalle costanti

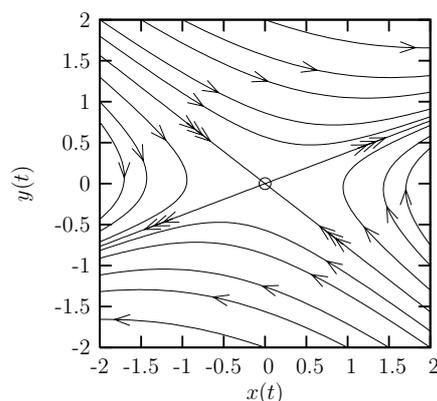


Figura 4.2: Ritratto di fase per un punto di sella e direzioni degli autovettori (con tripla freccia)

arbitrarie C_1 e C_2 . Questo succede perché la dinamica dell'esponenziale legata all'autovalore di modulo massimo si estingue prima dell'altra. La retta passante per l'origine ed avente coefficiente angolare pari al rapporto tra la seconda e la prima componente dell'altro autovalore (quello di modulo massimo) viene percorsa *solo* se si parte da una condizione iniziale che giace su di essa. Per $t \rightarrow -\infty$ le traiettorie si allineano lungo la direzione dell'autovalore di modulo massimo perché, in tal caso, la dinamica legata all'autovalore di modulo minimo si estingue prima dell'altra.

Nel caso di nodo (proprio) instabile, al contrario, le traiettorie si allontanano dall'origine seguendo, nell'intorno dell'origine, la retta passante da essa ed avente coefficiente angolare pari al rapporto tra la seconda e la prima componente dell'autovettore corrispondente all'autovalore di modulo minimo. Questo perché, per $t \rightarrow -\infty$ la dinamica dell'esponenziale legata all'autovalore di modulo massimo è trascurabile rispetto all'altra. Le due rette passanti per l'origine e che indentificano le due direzioni degli autovalori (entrambi instabili) vengono percorse *solo* se si parte da una condizione iniziale che giace su di esse. Tuttavia, per $t \rightarrow +\infty$ le traiettorie si allontanano dall'origine e vengono attratte dalla direzione corrispondente all'autovalore di modulo massimo.

Nel caso di punto di sella, la retta passante per l'origine ed avente coefficiente angolare pari al rapporto tra la seconda e la prima componente dell'autovalore negativo individua la direzione stabile, ovvero una soluzione passante per un punto vicino a tale retta viene inizialmente attratta verso l'origine. A maggior ragione, una soluzione passante da un punto su tale retta viene attratta dall'origine al crescere di t . Al contrario, la retta passante per l'origine ed avente coefficiente angolare pari al rapporto tra la seconda e la prima componente dell'autovalore positivo individua la direzione instabile, ovvero una soluzione passante da un punto vicino a tale retta (o appartenente alla retta stessa) viene respinta dall'origine. È chiaro, quindi, che per $t \rightarrow +\infty$ le traiettorie si allineano lungo la direzione instabile, mentre per $t \rightarrow -\infty$ le traiettorie si allineano lungo la direzione stabile. Dalle rette individuate dai due autovettori si può facilmente desumere anche il verso di percorrenza delle traiettorie nelle regioni comprese tra esse comprese.

4.2.2 Autovalori reali multipli

Per un sistema lineare planare, gli autovalori possono essere multipli solo nel caso reale, in quanto gli autovalori complessi sono sempre coniugati e quindi distinti. Separiamo in due casi, tra loro diversi. Nel primo caso la matrice \mathbf{A} del sistema lineare (4.7) è multipla della matrice identità, ovvero

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \mathbf{I}_2.$$

Le due equazioni sono disaccoppiate in quanto si ottiene $x' = \lambda x$ e $y' = \lambda y$ e la soluzione è banalmente

$$\mathbf{x}(t) = C\mathbf{u}e^{\lambda t},$$

dove C è una costante arbitraria da determinare con le condizioni iniziali, e \mathbf{u} è un vettore qualsiasi in quanto il problema $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ è soddisfatto per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$. Per comodità, quindi, si può scrivere la soluzione come $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{\lambda t}$, dove $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0]$ è la condizione iniziale. In questo primo caso l'origine prende il nome di *stella*. Essa è una *stella stabile* se $\lambda < 0$ (figura 4.3, sinistra), una *stella instabile* se $\lambda > 0$ (figura 4.3, destra).

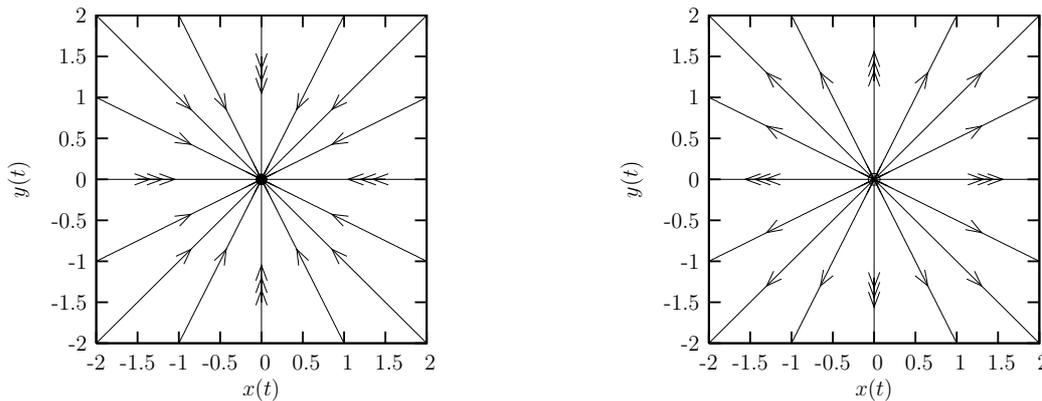


Figura 4.3: Ritratto di fase per una stella stabile (sinistra) e instabile (destra) e direzioni degli autovettori (con tripla freccia)

Nel secondo caso la matrice \mathbf{A} del sistema lineare (4.7) non è multipla della matrice identità. Essendo possibile la determinazione di un solo autovalore λ , è noto un solo autovettore ad esso corrispondente, che indichiamo con \mathbf{u}_1 . Si può dimostrare che nel caso di autovalori reali multipli (coincidenti) la soluzione generale è

$$\mathbf{x}(t) = (C_1 t + C_2)\mathbf{u}_1 e^{\lambda t} + C_1 \mathbf{u}_2 e^{\lambda t},$$

essendo \mathbf{u}_1 l'autovettore associato all'unico autovalore λ e \mathbf{u}_2 l'autovettore *generalizzato* ottenuto risolvendo il sistema

$$[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2]\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1.$$

In questo caso, a differenza del precedente, la soluzione del sistema lineare (4.7) dipende non solo dai termine esponenziale $e^{\lambda t}$ ma anche dal termine $C_1 t$, che aumenta in modulo al crescere del tempo. Pertanto, se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ allora $x(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$, mentre $x(t) \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow +\infty$ se $\lambda > 0$. L'origine, con \mathbf{A} non multipla di \mathbf{I}_2 , prende il nome di *nodo improprio stabile* o *nodo ad una tangente stabile* se $\lambda < 0$ (figura 4.4, sinistra) e *nodo improprio instabile* o *nodo ad una tangente instabile* se $\lambda > 0$ (figura 4.4, destra).

Nel piano delle fasi si osserva che le traiettorie raggiungono (nel caso stabile) o si dipartono (nel caso instabile) dall'origine tangenzialmente alla retta passante per l'origine ed avente coefficiente angolare pari al rapporto tra la seconda e la prima componente dell'autovettore \mathbf{u}_1 , da cui il nome *nodo ad una tangente*, contrariamente al caso di autovalori reali e distinti. I vari casi sono riassunti in tabella 4.1, a pagina 45.

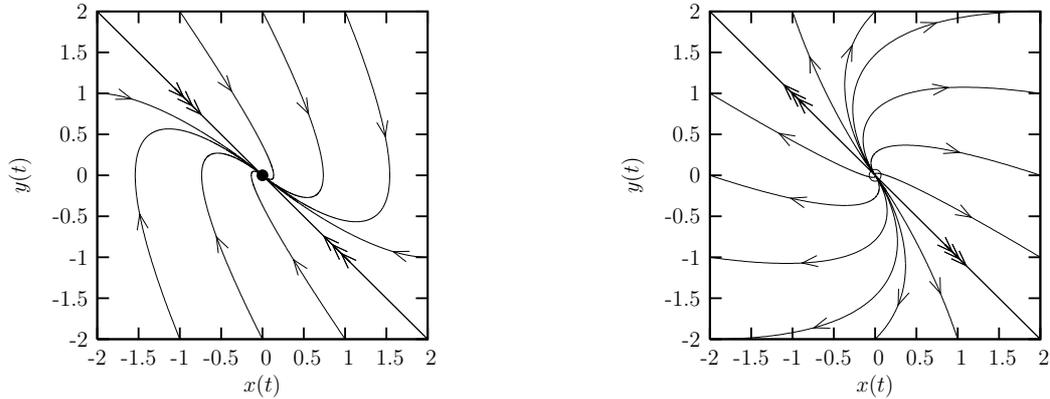


Figura 4.4: Ritratto di fase per un nodo improprio (o ad una tangente) stabile (sinistra) e instabile (destra) e direzione dell'autovettore \mathbf{u}_1 (con tripla freccia)

4.2.3 Autovalori complessi (coniugati)

Nel caso di autovalori complessi coniugati, si ha $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega$ con $\mu, \omega \in \mathbb{R}$. Inoltre, anche gli autovettori associati $\mathbf{u}_{1,2}$ sono complessi coniugati e possono essere riscritti come $\mathbf{u}_{1,2} = \mathbf{u}^r \pm i\mathbf{u}^i$, essendo i vettori \mathbf{u}^r e \mathbf{u}^i entrambi reali. La soluzione generale

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \mathbf{u}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathbf{u}_2 e^{\lambda_2 t},$$

pertanto, può essere riscritta come

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \mathbf{u}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathbf{u}_2 e^{\lambda_2 t} = C[\mathbf{u}^r + i\mathbf{u}^i]e^{(\mu+i\omega)t} + \bar{C}[\mathbf{u}^r - i\mathbf{u}^i]e^{(\mu-i\omega)t}.$$

Nell'ultima sostituzione si è tenuto conto anche del fatto che, affinché la soluzione $\mathbf{x}(t)$ sia reale, è necessario che le costanti arbitrarie siano l'una la complessa coniugata dell'altra, ovvero $C_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Siccome la soluzione generale è la somma di due contributi in cui l'uno è il complesso coniugato dell'altro, tenendo conto del fatto che $z + \bar{z} = 2\Re(z)$, essa può essere riarrangiata come

$$\mathbf{x}(t) = 2\Re(C[\mathbf{u}^r + i\mathbf{u}^i]e^{(\mu+i\omega)t}).$$

Ricordando che un numero complesso $z = \rho e^{i\theta}$ può sempre essere riscritto come $z = \cos \theta + i \sin \theta$, la soluzione diventa

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= 2e^{\mu t} \Re((\alpha + i\beta)(\cos \omega t + i \sin \omega t)[\mathbf{u}^r + i\mathbf{u}^i]) \\ &= 2e^{\mu t} [(\alpha \cos \omega t - \beta \sin \omega t)\mathbf{u}^r - (\beta \cos \omega t + \alpha \sin \omega t)\mathbf{u}^i], \end{aligned}$$

ed introducendo le costanti reali $A = 2\alpha$ e $B = -2\beta$,

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mu t} [(A \cos \omega t + B \sin \omega t)\mathbf{u}^r + (B \cos \omega t - A \sin \omega t)\mathbf{u}^i].$$

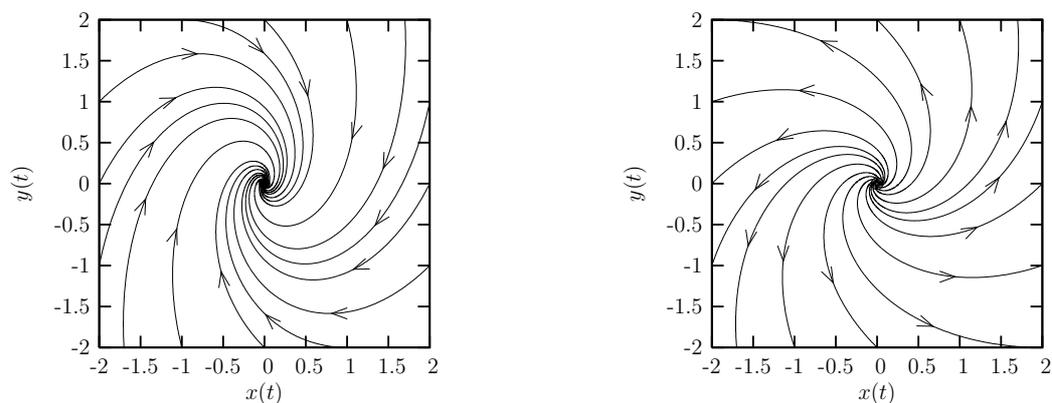


Figura 4.5: Ritratto di fase per un fuoco stabile (sinistra) e instabile (destra). Si noti l'assenza delle direzioni degli autovettori essendo essi complessi

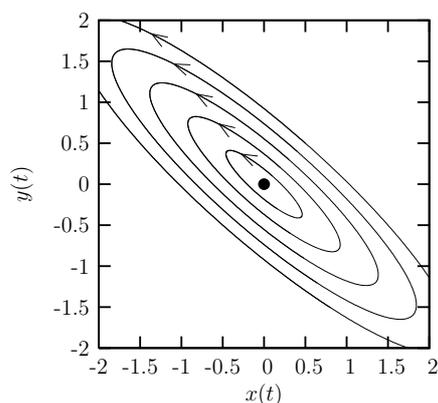


Figura 4.6: Ritratto di fase per un centro (orbite periodiche). Si noti l'assenza delle direzioni degli autovettori essendo essi complessi

Il comportamento asintotico della soluzione nel caso di autovalori complessi coniugati è determinato dall'esponentiale $e^{\mu t}$. Quindi, $x(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ se $\mu = \Re(\lambda_1) = \Re(\lambda_2) < 0$; $x(t) \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow +\infty$ se $\mu = \Re(\lambda_1) = \Re(\lambda_2) > 0$. Nel caso $\mu = \Re(\lambda_1) = \Re(\lambda_2) = 0$ la soluzione è periodica e limitata essendo la somma di funzioni periodiche limitate (seni e coseni). Nel piano delle fasi, queste considerazioni si traducono rispettivamente in un insieme di orbite che si avvolgono a spirale sull'origine se $\mu < 0$, ottenendo così un *fuoco stabile* (figura 4.5, sinistra); un insieme di orbite che si dipartono a spirale dall'origine se $\mu > 0$, ottenendo così un *fuoco instabile* (figura 4.5, destra), ed un insieme di orbite chiuse che ricordano delle ellissi concentriche se $\mu = 0$, ottenendo così un *centro* (figura 4.6). Si noti che un centro è stabile ma non asintoticamente. I vari casi sono riassunti in tabella 4.1, a pagina 45.

Nel caso di autovalori complessi coniugati l'utilità degli autovettori al fine del disegno nel piano delle fasi è meno evidente.

Autovalori		Natura dell'origine
Reali e distinti	$\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$	Nodo proprio (o a due tangenti) stabile
	$\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$	Nodo proprio (o a due tangenti) instabile
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	Sella o colle
Reali e coincidenti	$\mathbf{A} \propto \mathbf{I}_2, \lambda < 0$	Stella stabile
	$\mathbf{A} \propto \mathbf{I}_2, \lambda > 0$	Stella instabile
	$\mathbf{A} \not\propto \mathbf{I}_2, \lambda < 0$	Nodo improprio (o ad una tangente) stabile
	$\mathbf{A} \not\propto \mathbf{I}_2, \lambda > 0$	Nodo improprio (o ad una tangente) instabile
Complessi coniugati	$\lambda = \mu \pm i\omega, \mu < 0$	Fuoco stabile
	$\lambda = \mu \pm i\omega, \mu > 0$	Fuoco instabile
	$\lambda = \mu \pm i\omega, \mu = 0$	Centro

Tabella 4.1: Schema riassuntivo sulla natura dell'origine per sistemi lineari omogenei. **Nota:** il simbolo \propto significa “proporzionale a”, mentre $\not\propto$ significa “non proporzionale a”

4.2.4 Il piano T - D

I vari casi di autovalori reali e distinti, reali coincidenti, e complessi coniugati sono riassunti in tabella 4.1.

Tuttavia, siccome la natura dell'origine per sistemi lineari omogenei di matrice \mathbf{A} è determinata esclusivamente da $T = \text{tr}(\mathbf{A})$ e $D = \det(\mathbf{A})$, la casistica può essere graficamente riassunta nel piano T - D , come riportato in figura 4.7. Si noti che quando il determinante è negativo gli autovalori sono reali e di segno opposto e quindi l'origine è un punto di sella. Quando il determinante è positivo gli autovalori sono concordi e la natura dell'origine dipende dalla traccia. Siccome quest'ultima è la somma degli autovalori, quando essa è negativa l'origine risulta stabile (semipiano di sinistra con $T < 0$), mentre quando la traccia è positiva l'origine è instabile (semipiano di destra con $T > 0$). I punti del piano T - D sulla parabola $D = T^2/4$ individuano le situazioni di autovalori reali e coincidenti. In questo caso l'origine è stabile se $T < 0$ e instabile se $T > 0$, ma dal piano T - D non è possibile capire se si tratti di nodo ad una tangente o di stella.

4.3 Un esempio di sistema planare lineare

Esercizio 4.13 *Determinare la natura dell'origine per il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y, \\ \dot{y} = -2x - y, \end{cases}$$

tracciare il ritratto di fase, e scrivere la soluzione in forma esplicita per la condizione iniziale $(x_0, y_0) = (-2, 1)$.

Risoluzione. Dopo aver riscritto il sistema in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

determiniamo gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

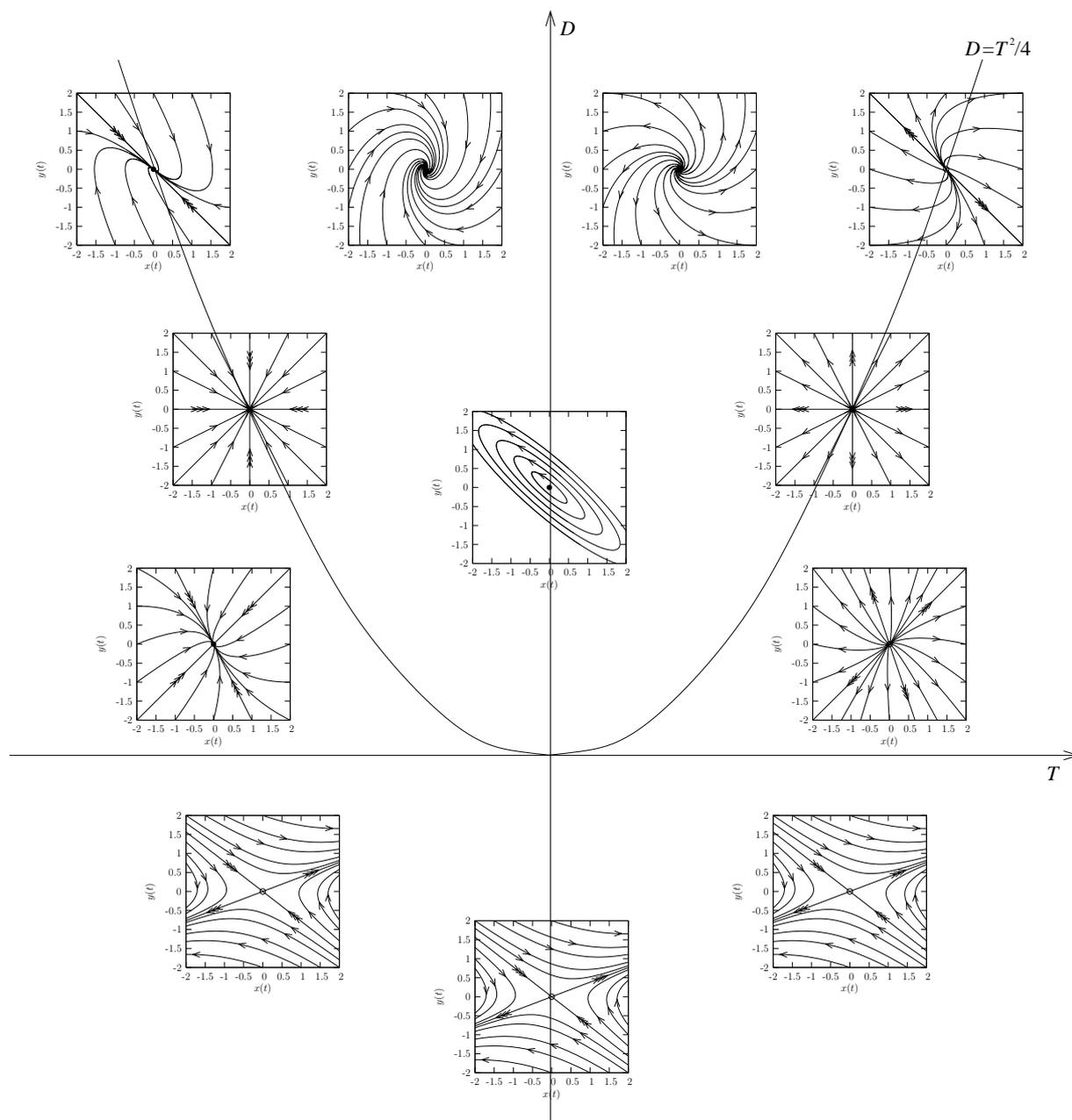


Figura 4.7: Piano T - D con $T = \text{tr}(\mathbf{A})$ e $D = \det(\mathbf{A})$

ottenendo $\lambda_1 = -2 + i$ e $\lambda_2 = -2 - i$ (autovalori complessi coniugati). Gli autovettori corrispondenti, ciascuno definito a meno di una costante arbitraria, sono $\mathbf{u}_1 = [k, 2k]^T + i[-k, 0]^T$ e $\mathbf{u}_2 = [k, 2k]^T - i[-k, 0]^T$ con $k \in \mathbb{R}$; pertanto $\mathbf{u}^r = [k, 2k]^T$ e $\mathbf{u}^i = [-k, 0]^T$. Essendo i due autovalori complessi coniugati a parte reale negativa, $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$, l'origine è un fuoco stabile. In questo caso, quindi, il ritratto di fase (vedi figura 4.8) consiste in una serie di orbite che si avvolgono a spirale (in verso orario) attorno all'origine. Pur non essendo determinanti per tracciare il ritratto di fase, gli autovettori sono necessari per scrivere la soluzione in forma esplicita. Prendendo, per comodità, $k = 1$ si ottiene $\mathbf{u}^r = [1, 2]^T$ e $\mathbf{u}^i = [-1, 0]^T$; inoltre, essendo $\mu = -2$

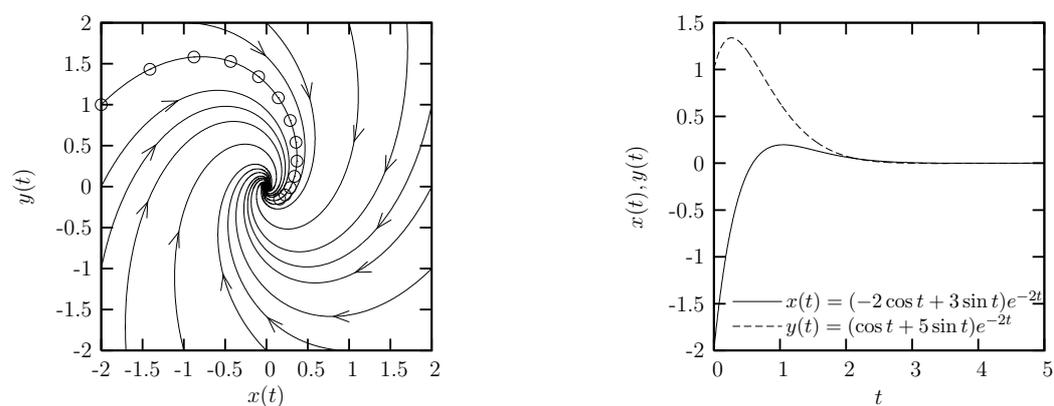


Figura 4.8: Ritratto di fase (sinistra) e soluzione analitica (destra) per $(x_0, y_0) = (-2, 1)$ ($x(t)$ in linea continua e $y(t)$ in linea tratteggiata). Nel ritratto di fase la soluzione per $(x_0, y_0) = (-2, 1)$ è contrassegnata da pallini vuoti

e $\omega = 1$, le due soluzioni in forma esplicita sono

$$\begin{cases} x(t) = [(A \cos t + B \sin t) - (B \cos t - A \sin t)]e^{-2t}, \\ y(t) = 2(A \cos t + B \sin t)e^{-2t}, \end{cases}$$

con A e B da determinarsi utilizzando le condizioni iniziali, a $t = 0$, $(x_0, y_0) = (-2, 1)$. Così facendo si ottiene

$$\begin{cases} -2 = A - B \\ 1 = 2A, \end{cases}$$

da cui $A = 1/2$ e $B = 5/2$, ovvero

$$\begin{cases} x(t) = (-2 \cos t + 3 \sin t)e^{-2t} \\ y(t) = (\cos t + 5 \sin t)e^{-2t}. \end{cases}$$

La soluzione analitica è riportata in figura 4.8 (destra), mentre la soluzione $(x(t), y(t))$ è riportata sul ritratto di fase (sinistra) con una linea continua contrassegnata da pallini vuoti.

■

4.4 Problemi di fine capitolo 4

Esercizio 4.14 Determinare la natura dell'origine per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 5y \\ \dot{y} = 4x + 4y, \end{cases}$$

tracciare il ritratto di fase, e scrivere la soluzione in forma esplicita per la condizione iniziale $(x_0, y_0) = (1, -4/3)$. (Soluzione a pagina 94)

Capitolo 5

Il caso continuo a più equazioni non-lineari

5.1 Richiami di teoria

Nel seguito, con $|\cdot|$ indichiamo la norma euclidea su \mathbb{R}^m , $m \geq 2$, ossia

$$|(x_1, \dots, x_m)| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2},$$

per ogni $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$.

Teorema 5.1 [Esistenza ed unicità locale] *Sia I un intervallo in \mathbb{R} con $0 \in I$ e Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^m . Supponiamo che f_1, \dots, f_m siano funzioni di classe C^1 su $I \times \Omega$. Allora, per ogni dato iniziale (y^1, \dots, y^m) contenuto in Ω esiste un'unica soluzione locale $(x_1(t), \dots, x_m(t)) : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ definita su un intorno $J \subseteq I$ di 0, del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_m), \\ \vdots \\ \dot{x}_m = f_m(t, x_1, \dots, x_m), \\ x_1(0) = y^1, \\ \vdots \\ x_m(0) = y^m. \end{cases} \quad (5.2)$$

In aggiunta, la soluzione dipende con continuità dai dati iniziali.

Definizione 5.3 *Se le funzioni f_i non dipendono esplicitamente dal tempo t il sistema si dice autonomo. Altrimenti si dice non autonomo.*

Definizione 5.4 *L'intervallo di definizione $J \subseteq I$ della soluzione $x \in \mathbb{R}^m$ si dice massimale se non esiste nessuna soluzione $\tilde{x} = (\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_m(t))$ del sistema definita su un intervallo $\tilde{J} \subseteq I$ con $J \subset \tilde{J}$ e tale che $\tilde{x}_j|_J = x_j$ per ogni $j = 1, \dots, m$. Se $J = I$ la soluzione si dice globale, se $J = I = \mathbb{R}$ per le soluzioni del sistema ha senso lo studio asintotico.*

Definizione 5.5 *La soluzione $\{t \mapsto (x_1(t), \dots, x_m(t))\}$, con $t \in J$, descrive parametricamente un tratto di curva (regolare) in \mathbb{R}^m . Per i sistemi autonomi, il supporto (immagine) di tale*

parametrizzazione (non unica) si dice *traiettoria* (o *orbita*) del sistema. L'ambiente dove si rappresenta la traiettoria viene detto, rispettivamente, *spazio delle fasi* se $m = 3$, *piano delle fasi* se $m = 2$ e *linea delle fasi* se $m = 1$. Un complesso di più traiettorie del sistema, al variare delle condizioni iniziali, si dice *ritratto* (o *diagramma*) di fase del sistema.

Osservazione 5.6 Un sistema non-autonomo in \mathbb{R}^m di m -equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_m), \\ \vdots \\ \dot{x}_m = f_m(t, x_1, \dots, x_m), \end{cases}$$

si può sempre reinterpretare come sistema autonomo in \mathbb{R}^{m+1} di $(m+1)$ -equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_{m+1}, x_1, \dots, x_m), \\ \vdots \\ \dot{x}_m = f_m(x_{m+1}, x_1, \dots, x_m), \\ \dot{x}_{m+1} = 1. \end{cases}$$

Osservazione 5.7 In presenza di un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_m; \alpha), \\ \vdots \\ \dot{x}_m = f_m(x_1, \dots, x_m; \alpha), \end{cases}$$

dipendono con continuità dalla scelta dei dati iniziali e del parametro se le funzioni $f_i : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono regolari. Infatti, il sistema si può sempre reinterpretare come il sistema autonomo senza parametro

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_m; \alpha), \\ \vdots \\ \dot{x}_m = f_m(x_1, \dots, x_m; \alpha), \\ \dot{\alpha} = 0, \end{cases}$$

da cui si ottiene subito la dipendenza continua dai dati iniziali e dal parametro.

Ci limitiamo ora al caso di sistemi autonomi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_m), \\ \vdots \\ \dot{x}_m = f_m(x_1, \dots, x_m). \end{cases} \quad (5.8)$$

Definizione 5.9 Diciamo *punto di equilibrio* (o *punto stazionario*) per il sistema differenziale (5.8) ogni soluzione costante di (5.8), ossia ogni soluzione (x^1, \dots, x^m) del sistema algebrico in \mathbb{R}^m di m -equazioni in m -incognite

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m) = 0, \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_m) = 0. \end{cases}$$

Definizione 5.10 Un punto di equilibrio (x^1, \dots, x^m) per il sistema (5.8) si dice localmente stabile (secondo Lyapunov) se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che ogni soluzione di (5.8) con la condizione iniziale $(x_1(0), \dots, x_m(0)) = (y^1, \dots, y^m)$ e

$$|(y^1, \dots, y^m) - (x^1, \dots, x^m)| < \delta$$

soddisfa

$$|(x_1(t), \dots, x_m(t)) - (x^1, \dots, x^m)| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Se un punto di equilibrio non è localmente stabile si dice instabile. Un punto di equilibrio (x^1, \dots, x^m) per il sistema (5.8) si dice localmente asintoticamente stabile se è localmente stabile ed esiste $\rho > 0$ tale che per tutti i dati iniziali (y^1, \dots, y^m) che verificano $|(y^1, \dots, y^m) - (x^1, \dots, x^m)| < \rho$ si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |(x_1(t), \dots, x_m(t)) - (x^1, \dots, x^m)| = 0.$$

Definizione 5.11 Si dice bacino di attrazione di un punto di equilibrio $X_0 = (x^1, \dots, x^m)$ per il sistema (5.8) il più grande insieme $\mathcal{B}(X_0) \subset \mathbb{R}^m$ di dati iniziali a cui corrispondono soluzioni (globali) convergenti all'equilibrio X_0 per $t \rightarrow +\infty$.

Definizione 5.12 Sia $(x_1(t), \dots, x_m(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ la soluzione (globale) del sistema (5.8) che corrisponde alla condizione iniziale $X_0 = (x^1, \dots, x^m)$. Definiamo gli insiemi α -limite $\alpha(X_0) \subset \mathbb{R}^m$ e ω -limite $\omega(X_0) \subset \mathbb{R}^m$ di X_0 come

$$\alpha(X_0) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^m : \exists t_j \rightarrow -\infty : \lim_{j \rightarrow \infty} (x_1(t_j), \dots, x_m(t_j)) = (\xi_1, \dots, \xi_m) \right\},$$

$$\omega(X_0) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^m : \exists t_j \rightarrow +\infty : \lim_{j \rightarrow \infty} (x_1(t_j), \dots, x_m(t_j)) = (\xi_1, \dots, \xi_m) \right\}.$$

Se la soluzione che parte da X_0 non è globale in avanti, i.e. per t crescente (rispettivamente indietro, i.e. per t decrescente) poniamo $\omega(X_0) = \emptyset$ (rispettivamente $\alpha(X_0) = \emptyset$).

Definizione 5.13 Diciamo che un'orbita chiusa γ per il sistema (5.8) è un ciclo limite se $\gamma \subset \omega(X_0)$ oppure $\gamma \subset \alpha(X_0)$ per un qualche dato iniziale $X_0 \notin \gamma$. Nel caso in cui $\gamma \subset \omega(X_0)$ si parla di ciclo ω -limite, mentre nel caso in cui $\gamma \subset \alpha(X_0)$ si parla di ciclo α -limite.

Definizione 5.14 Siano $(x_1(t), \dots, x_m(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$ rispettivamente una soluzione globale e un punto di equilibrio per il sistema (5.8). Diciamo che $(x_1(t), \dots, x_m(t))$ è un'orbita omoclina se

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_j(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_j(t) = x^j, \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, m,$$

ossia se l'orbita approccia uno stesso equilibrio sia per $t \rightarrow -\infty$ che per $t \rightarrow +\infty$. Naturalmente, una condizione necessaria per l'esistenza di soluzioni omocline è che per il punto di equilibrio (x^1, \dots, x^m) esistano alcune direzioni stabili (varietà stabile) e altre instabili (varietà instabile), ad esempio, nel caso bidimensionale, che il punto di equilibrio sia una sella locale.

Definizione 5.15 Sia $(x_1(t), \dots, x_m(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ una soluzione globale del sistema (5.8) e $(x^1, \dots, x^m), (y^1, \dots, y^m) \in \mathbb{R}^m$ due punti di equilibrio. Diciamo che $(x_1(t), \dots, x_m(t))$ è un'orbita eteroclina (che connette gli equilibri (x^1, \dots, x^m) e (y^1, \dots, y^m)) se

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_j(t) = x^j, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_j(t) = y^j, \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, m,$$

ossia se l'orbita approssia un punto di equilibrio per $t \rightarrow -\infty$ ed un secondo punto di equilibrio per $t \rightarrow +\infty$.

Teorema 5.16 [Metodo di Linearizzazione] Supponiamo che (x^1, \dots, x^m) sia un punto di equilibrio per il sistema differenziale (5.8) (nell'ipotesi che $f_i \in C^1$) e consideriamo la matrice Jacobiana

$$J(x^1, \dots, x^m) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{bmatrix} \Big|_{(x^1, \dots, x^m)}.$$

Supponiamo che $\det J(x^1, \dots, x^m) \neq 0$ (matrice Jacobiana non singolare). Valgono allora i seguenti fatti. (a) se tutti gli autovalori di J hanno parte reale strettamente negativa, allora l'equilibrio (x^1, \dots, x^m) è localmente asintoticamente stabile; (b) se esiste almeno un autovalore di J con parte reale strettamente positiva allora l'equilibrio (x^1, \dots, x^m) è instabile.

Osservazione 5.17 Nel caso planare $m = 2$ la condizione di stabilità si può esprimere in modo semplice rispetto alla traccia $\text{Tr}(J)$ di J e al determinante $\det(J)$ della matrice Jacobiana J . Più precisamente un punto di equilibrio è localmente asintoticamente stabile se e soltanto se

$$\text{Tr}(J) < 0, \quad \det(J) > 0.$$

Sempre nel caso planare, in base al tipo di autovalori della matrice Jacobiana è possibile caratterizzare, localmente, i punti di equilibrio in base alla classificazione del caso lineare, i.e. nodi, selle, fuochi, centri.

Definizione 5.18 Un sistema planare si dice dissipativo se esiste un insieme limitato $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ tale che per ogni dato iniziale $(x_0, y_0) \in \mathcal{B}$ esiste un tempo $t_0 = t_0(x_0, y_0)$ tale che la soluzione $\varphi(t; x_0, y_0)$ del sistema per (x_0, y_0) verifica $\varphi(t; x_0, y_0) \in \mathcal{B}$ per ogni $t \geq t_0$.

Definizione 5.19 Diciamo che una soluzione non costante del sistema (5.8) è periodica, se esiste $T_0 > 0$ tale che

$$x_j(t + T_0) = x_j(t), \quad \forall j = 1, \dots, m, \quad \forall t > 0.$$

Il minimo valore di $T_0 > 0$ con tale proprietà si dice periodo della soluzione.

Restringiamo ora l'attenzione sul caso $m = 2$, ossia i sistemi planari.

Teorema 5.20 [Tricotomia di Poincaré-Bendixson] Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare e limitato, $f, g \in C^1(\Omega)$ e consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (5.21)$$

e una sua qualunque orbita che parte in $P \in \Omega$ e rimane in Ω per tutti i tempi $t \geq 0$. Supponiamo che Ω contenga solo un numero finito di punti di equilibrio del sistema. Allora, per l'insieme $\omega(P)$, l' ω -limite di P , valgono solo le seguenti tre possibilità:

- $\omega(P)$ è un equilibrio;
- $\omega(P)$ è un'orbita periodica;

- $\omega(P)$ contiene un numero finito di punti di equilibrio ed un insieme di orbite omocline o eterocline che li connettono tra loro.

In particolare, per i sistemi planari, non è ammessa alcuna dinamica caotica.

In vista di alcune applicazioni del teorema di Poincaré-Bendixson, il seguente criterio è particolarmente utile.

Teorema 5.22 [Esistenza dell'insieme invariante] Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare, $f, g \in C(\Omega)$ e consideriamo il sistema (5.21). Supponiamo che esista una regione $\mathcal{T} \subset \Omega$ tale che

$$(f(x, y), g(x, y)) \cdot \hat{\mathbf{n}}(x, y) \leq 0, \quad \forall x, y \in \partial\mathcal{T},$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ denota il versore normale esterno su $\partial\mathcal{T}$. Allora \mathcal{T} è una regione invariante (o di trapping) per il sistema, ossia orbite che entrano nell'insieme \mathcal{T} all'istante $t_0 > 0$ rimangono all'interno di \mathcal{T} per tutti i tempi $t \geq t_0$.

In altre parole, la condizione sulla frontiera $\partial\mathcal{T}$ di \mathcal{T} impone che il vettore tangente ad una generica orbita che parte in \mathcal{T} , in un punto della frontiera $\partial\mathcal{T}$ di \mathcal{T} possa essere solo ortogonale al vettore normale esterno $\hat{\mathbf{n}}$ o formare con $\hat{\mathbf{n}}$ un angolo maggiore di 90° , ossia deve puntare verso l'interno del dominio \mathcal{T} . Pertanto, l'orbita non può fuggire al di fuori di \mathcal{T} .

Ricordiamo che un dominio Ω si dice semplicemente connesso se ogni curva chiusa in Ω è contraibile (deformabile) dentro Ω in un punto. Ad esempio \mathbb{R}^2 o una palla di \mathbb{R}^2 sono domini semplicemente connessi, mentre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non è semplicemente connesso. Pensando in termini geometrici, si potrebbe dire, in modo poco preciso, che i domini semplicemente connessi di \mathbb{R}^2 sono insiemi senza buchi.

Teorema 5.23 [Criterio di Dulac] Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare semplicemente connesso, $f, g \in C^1(\Omega)$ e consideriamo il sistema (5.21). Supponiamo che $\Psi = (f, g)$ soddisfi

$$\operatorname{div} \Psi(x, y) > 0, \quad (< 0) \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Allora (5.21) non ammette alcuna orbita periodica interamente contenuta in Ω .

Dimostrazione. Supponiamo che esista un'orbita periodica interamente contenuta in Ω . Sia γ una sua parametrizzazione, ossia una curva chiusa e regolare contenuta in Ω . Allora, poiché il vettore tangente \mathbf{t} a γ si mantiene in ogni punto ortogonale al versore normale esterno $\hat{\mathbf{n}}$ e si rappresenta con (\dot{x}, \dot{y}) , tenuto conto del fatto che il dominio è semplicemente connesso, γ è la frontiera di un dominio regolare $\Omega_\#$, $\gamma = \partial\Omega_\#$ e, dal teorema della divergenza, si ha

$$\int_{\Omega_\#} \operatorname{div} \Psi(x, y) dx dy = \int_{\gamma} \Psi(x, y) \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = \int_{\gamma} (\dot{x}, \dot{y}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = \int_{\gamma} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = 0,$$

da cui si ottiene immediatamente una contraddizione. ■

Osservazione 5.24 Con riferimento alla dimostrazione del criterio di Dulac indicata sopra, se il dominio Ω non fosse semplicemente connesso, ad esempio la corona circolare con $0 < r < R$,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\},$$

allora, applicando il teorema della divergenza all'orbita $\gamma = \{x^2 + y^2 = R^2\} \subset \Omega$, essendo

$$\partial\Omega_\# = \gamma \cup \{x^2 + y^2 = r^2\},$$

si avrebbe l'identità

$$\int_{\Omega_{\#}} \operatorname{div} \Psi(x, y) dx dy = \int_{\gamma} (\dot{x}, \dot{y}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dl + \int_{\{x^2+y^2=r^2\}} \Psi(x, y) \cdot \hat{\mathbf{n}} dl.$$

Compare quindi un secondo termine di bordo (interno), in generale non nullo.

Vediamo ora un'utile generalizzazione del criterio di Dulac.

Teorema 5.25 [Criterio di Dulac generalizzato] Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare semplicemente connesso, $f, g \in C^1(\Omega)$ e consideriamo il sistema (5.21). Supponiamo che esista una funzione regolare $\varrho \in C^1(\Omega)$ tale che

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varrho f)(x, y) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho g)(x, y) > 0, \quad (< 0) \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Allora (5.21) non ammette alcuna orbita periodica interamente contenuta in Ω .

Dimostrazione. Basta ragionare come nella dimostrazione del teorema 5.23. Da

$$\int_{\Omega_{\#}} \operatorname{div}(\varrho \Psi) dx dy = \int_{\gamma} \varrho \Psi \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = \int_{\gamma} \varrho [(\dot{x}, \dot{y}) \cdot \hat{\mathbf{n}}] dl = 0$$

si ottiene direttamente la tesi. ■

5.2 Un modello per la diffusione delle epidemie

Consideriamo un semplice modello di diffusione di una epidemia e suddividiamo la popolazione di individui, al tempo $t > 0$, in tre sottoclassi disgiunte: quella degli individui *suscettibili*, che denotiamo con $S = S(t)$, quella degli individui *infettivi*, che denotiamo con $I = I(t)$, e quella degli individui *rimossi*, che denotiamo con $R = R(t)$. Pensiamo agli individui della terza classe, i rimossi, come a coloro che non sono più infettivi o suscettibili in quanto guariti, isolati o morti. Supponiamo, per semplicità, che la popolazione totale rimanga costante ($\frac{d}{dt}(S(t)+I(t)+R(t)) = 0$), che non esista un tempo di incubazione (ritardo nell'effetto) e che il passaggio dalla classe S alla classe I avvenga in modo istantaneo per contatto diretto tra individui con una probabilità proporzionale alla frequenza degli incontri (tra individui di S ed individui di I), ovvero che essa sia proporzionale al prodotto $S(t)I(t)$. Infine, supponiamo che gli individui malati abbiano una probabilità di guarigione costante nel tempo e che qualora un individuo venga infettato e quindi passi, successivamente, nella classe dei rimossi, non sia più suscettibile dell'infezione per l'eternità (situazione che ricorre frequentemente), ossia

$$S \leftrightarrow I \leftrightarrow R \not\leftrightarrow S.$$

Sulla base delle ipotesi appena fatte per il modello SIR, la velocità con la quale gli individui suscettibili diminuiscono nel tempo è proporzionale alla rapidità di trasmissione dell'infezione, ossia al numero di incontri tra un individuo suscettibile ed un individuo infetto:

$$\dot{S} = -\beta SI,$$

dove β è una costante positiva. Inoltre, è naturale pensare che la variazione del numero di rimossi R sia direttamente proporzionale al numero di infetti, ossia,

$$\dot{R} = \gamma I,$$

con γ costante positiva. Tenuto conto che $\dot{I} = -\dot{S} - \dot{R}$, si ottiene il sistema nonlineare di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI, \\ \dot{I} = \beta SI - \gamma I, \\ \dot{R} = \gamma I, \end{cases} \quad (5.26)$$

che è l'equazione classica del modello SIR. D'altra parte, essendo la popolazione totale costante,

$$S(t) + I(t) + R(t) = N, \quad t \geq 0, \quad (5.27)$$

sarà sufficiente determinare I e S in funzione del tempo per poi calcolare R per differenza. Studiamo, pertanto, il sistema planare nelle incognite S e I ,

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI, \\ \dot{I} = (\beta S - \gamma)I. \end{cases} \quad (5.28)$$

Sono equilibri del sistema tutti i punti della forma $(\tilde{S}, 0)$ con $\tilde{S} \in \mathbb{R}$. In tali punti la matrice Jacobiana è data da

$$J(\tilde{S}, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -\beta\tilde{S} \\ 0 & \beta\tilde{S} - \gamma \end{bmatrix},$$

che ammette autovalori $\lambda = 0$ e $\lambda = \beta\tilde{S} - \gamma$, positivo per $\tilde{S} > \gamma/\beta$ e negativo per $0 < \tilde{S} < \gamma/\beta$. Nel sistema cartesiano S - I le curve a tangente verticale (isocline) sono gli assi stessi ($S = 0$ e $I = 0$), mentre le curve a tangente orizzontale (isocline) sono l'asse S ($I = 0$) e la retta verticale $S = \gamma/\beta$. Sull'asse I ($S = 0$), essendo $\dot{I} = -\gamma I < 0$ la soluzione converge all'origine con velocità esponenziale. Consideriamo ora un dato iniziale per il sistema nella zona del piano

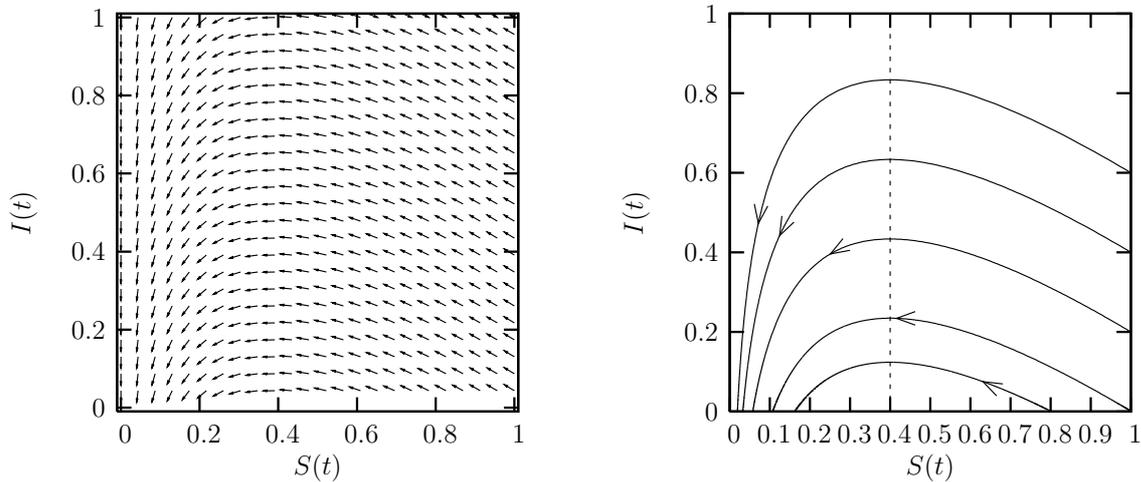


Figura 5.1: Campo di flusso (sinistra) e alcune traiettorie (destra) relativi al sistema planare nonlineare del problema 5.28 per $\beta = 0.5$ e $\gamma = 0.2$. Nella figura di destra è riportata anche l'isoclina a tangente orizzontale $x = \gamma/\beta$ in modo da mostrare che partendo dalla regione con $I > 0$ e $S > \gamma/\beta$ le traiettorie terminano su punti di equilibrio del tipo $(\tilde{S}, 0)$ con $\tilde{S} < \gamma/\beta$, essendo questi attrattivi

con $S > \gamma/\beta$ e $I > 0$. Siccome in questa zona $\dot{S} < 0$ e $\dot{I} > 0$, la popolazione dei suscettibili diminuisce ed invece aumenta la popolazione degli infettivi, che raggiunge un punto di massimo

in corrispondenza di $S = \gamma/\beta$ per poi diminuire fino ad andare a zero. Questo è particolarmente visibile in figura 5.1 in cui si osserva sia il campo di flusso (a sinistra) sia le traiettorie in questione (destra). Si osservi anche che, dividendo membro a membro le due equazioni (5.28), si ottiene

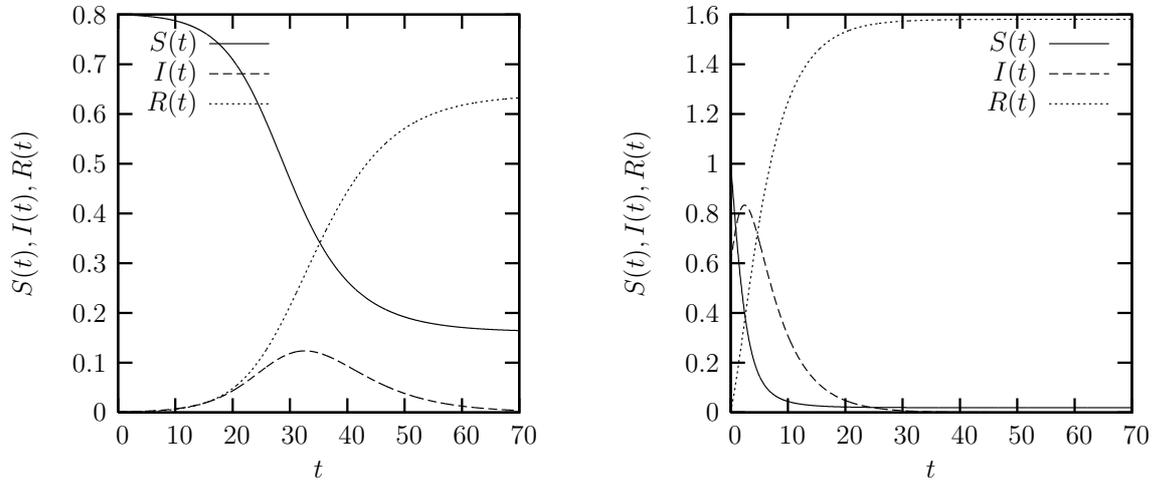


Figura 5.2: Andamento delle soluzioni $S(t), I(t)$ e $R(t)$ per diverse condizioni iniziali relative al sistema planare nonlineare del problema 5.28 per $\beta = 0.5$ e $\gamma = 0.2$ (in entrambi i casi $R(0) = 0$ e $S(t) + I(t) + R(t) = S(0) + I(0)$). Si noti la diversa velocità con la quale l'equilibrio finale viene raggiunto dipendentemente dalla condizione iniziale

$$\frac{\dot{I}}{\dot{S}} = \frac{dI}{dS} = -\frac{\beta S - \gamma}{\beta S},$$

da cui, integrando, si ottiene l'equazione delle orbite

$$I(S) = \frac{\gamma}{\beta} \log S - S + C,$$

con C costante reale. In sostanza queste curve connettono un generico equilibrio del sistema del tipo $(\tilde{S}, 0)$ con $\tilde{S} > \gamma/\beta$ ad un equilibrio del tipo $(\hat{S}, 0)$ con $0 < \hat{S} < \gamma/\beta$. In figura 5.2 sono riportate le storie temporali di due traiettorie della figura 5.1. Si noti la diversa velocità con la quale l'equilibrio finale viene raggiunto dipendentemente dalla condizione iniziale.

Nel caso in cui, contrariamente alle ipotesi fatte, gli individui rimossi non siano più immuni per l'eternità e possano tornare ad essere infettivi, ossia

$$S \leftrightarrow I \leftrightarrow R \leftrightarrow S,$$

il modello si può riscrivere come

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI + \delta R, \\ \dot{I} = \beta SI - \gamma I, \\ \dot{R} = \gamma I - \delta R, \end{cases} \quad (5.29)$$

dove δ è una terza costante positiva. In sostanza, nella legge di bilancio per gli individui suscettibili (risp. dei rimossi) si aggiunge (risp. si toglie) un contributo di individui rimossi

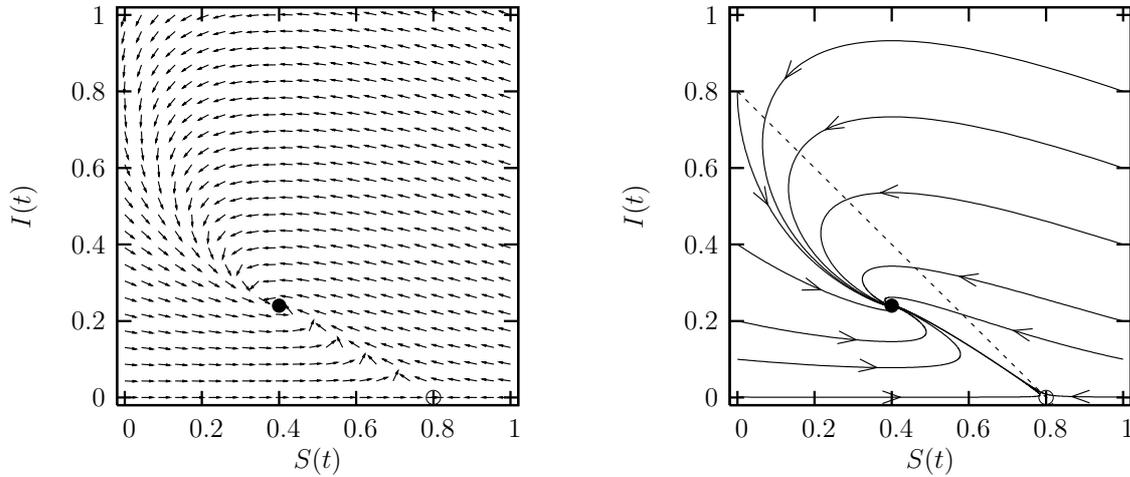


Figura 5.3: Campo di flusso (sinistra) e alcune traiettorie (destra) relativi al sistema planare nonlineare del problema 5.29 per $\beta = 0.5$, $\gamma = 0.2$, $\delta = 0.3$ e $N = 0.8$. Si osservi che $N > \gamma/\beta$ per cui esistono due punti di equilibrio: $(N, 0)$ (sella, e quindi instabile, con direzione stabile la retta $I = 0$) e l'equilibrio non banale stabile. Si osservi inoltre la regione invariante Σ definita da tutti i punti del primo quadrante che non stanno sopra la retta tratteggiata ($S + I \leq N$)

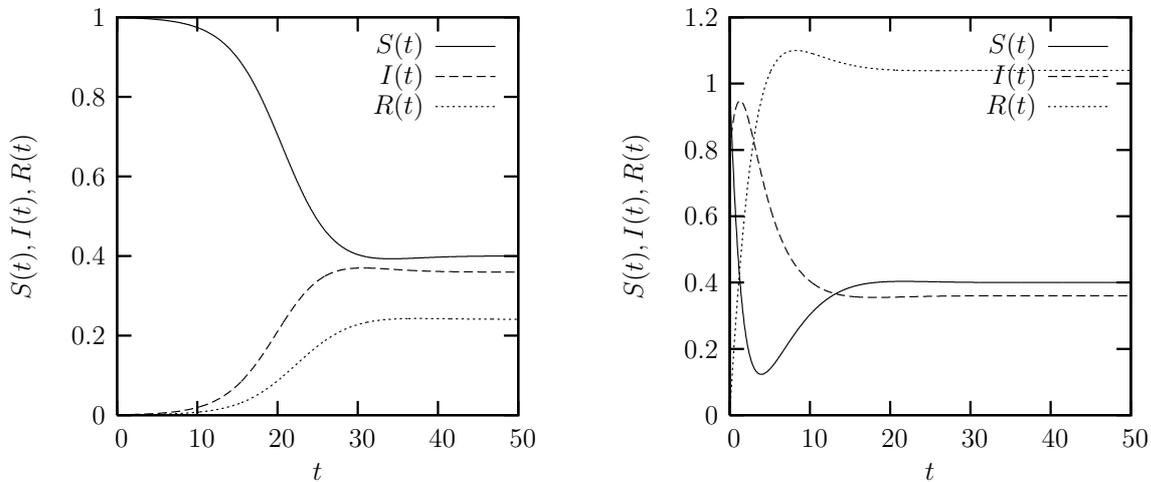


Figura 5.4: Andamento delle soluzioni $S(t), I(t)$ e $R(t)$ per diverse condizioni iniziali relative al sistema planare nonlineare del problema 5.29 per $\beta = 0.5$, $\gamma = 0.2$, $\delta = 0.3$ e $N = 0.8$ (in entrambi i casi $R(0) = 0$ e $S(t) + I(t) + R(t) = S(0) + I(0)$). Si noti la diversa velocità con la quale l'equilibrio finale viene raggiunto dipendentemente dalla condizione iniziale $((1, 10^{-3})$, sinistra; $(1, 0.8)$ destra)

proporzionale ad R . Tenuto conto dell'equazione (5.27) il sistema si riconduce allora a

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI + \delta(N - S - I), \\ \dot{I} = \beta SI - \gamma I, \end{cases} \quad (5.30)$$

che ammette, rispetto al precedente modello semplificato, soltanto l'equilibrio $(N, 0)$ (che è una

sella, nell'ipotesi che $\gamma/\beta \leq N$) e l'equilibrio non banale

$$\left(\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\delta(N - \gamma/\beta)}{\gamma + \delta} \right),$$

che ha senso quando la popolazione totale supera la soglia critica γ/β . Per tali valori dei parametri questo equilibrio risulta asintoticamente stabile e incluso nella regione (che si dimostra essere invariante)

$$\Sigma = \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : S, I \geq 0, S + I \leq N\}.$$

In conclusione, la malattia infettiva si insedia nella popolazione e raggiunge un valore limite di equilibrio quando il numero di individui della comunità diventa sufficientemente elevato. In figura 5.3 sono riportati rispettivamente il campo di flusso ed il ritratto di fase per il sistema 5.29, mentre in figura 5.4 sono visibili le storie temporali di due traiettorie, che mettono in risalto la diversa velocità con cui viene raggiunto il punto di equilibrio.

5.3 Studio qualitativo del ritratto di fase: isocline e flussi

Consideriamo il sistema nonlineare

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (5.31)$$

e cerchiamo di capire quale strategia sia possibile seguire per tracciare il ritratto di fase globale,

Osservazione 5.32 *Una possibile strategia per disegnare il ritratto di fase del sistema nonlineare (5.31) consiste nel seguire i passi della seguente procedura:*

1. *determinazione dei punti di equilibrio e delle isocline (a tangente verticale e orizzontale);*
2. *linearizzazione nei punti di equilibrio e determinazione della natura locale;*
3. *disegno del ritratto locale per ciascun punto di equilibrio;*
4. *determinazione di eventuali cicli-limite ed orbite periodiche;*
5. *disegno del ritratto globale congiungendo i ritratti locali.*

Nonostante questi passi seguano uno schema logico naturale e i primi tre richiedano una sequenza di operazioni piuttosto meccaniche (come quando si traccia il grafico di una funzione reale di variabile reale), ci si accorgerà fin da subito che saper tracciare ritratti di fase globali per sistemi nonlineari è spesso un'operazione che richiede un certo intuito.

Definizione 5.33 *Chiamiamo isoclina a tangente verticale il luogo geometrico dei punti del piano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $f(x, y) = 0$, ovvero la linea che congiunge i punti nei quali la traiettoria del sistema ha tangente verticale. Chiamiamo isoclina a tangente orizzontale il luogo geometrico dei punti del piano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $g(x, y) = 0$, ovvero la linea che congiunge i punti nei quali la traiettoria del sistema ha tangente orizzontale.*

Osservazione 5.34 *Le traiettorie del sistema (5.31) possono essere espresse sia nella forma parametrica $\{t \mapsto (x(t), y(t))\}$ (si veda la definizione 5.5) sia, localmente, in forma cartesiana come $y = \varphi(x)$. Pertanto, essendo $\dot{x} = f(x, y)$ e $\dot{y} = g(x, y)$, si ha*

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}. \quad (5.35)$$

$f(x, y)$	$g(x, y)$	Direzione	Descrizione
$f(x, y) = 0$	$g(x, y) = 0$	$\bullet \circ$	equilibrio stabile (\bullet) o instabile (\circ)
$f(x, y) > 0$	$g(x, y) = 0$	\rightarrow	isoclina a tangente orizzontale
$f(x, y) < 0$	$g(x, y) = 0$	\leftarrow	isoclina a tangente orizzontale
$f(x, y) = 0$	$g(x, y) > 0$	\uparrow	isoclina a tangente verticale
$f(x, y) = 0$	$g(x, y) < 0$	\downarrow	isoclina a tangente verticale
$f(x, y) > 0$	$g(x, y) > 0$	\nearrow	tangente Nord-Est (NE)
$f(x, y) > 0$	$g(x, y) < 0$	\searrow	tangente Sud-Est (SE)
$f(x, y) < 0$	$g(x, y) > 0$	\nwarrow	tangente Nord-Ovest (NO)
$f(x, y) < 0$	$g(x, y) < 0$	\swarrow	tangente Sud-Ovest (SO)

Tabella 5.1: Schema riassuntivo per la determinazione della direzione e del verso locali delle traiettorie di un sistema planare non lineare nel piano delle fasi

La direzione e il verso locali della traiettoria φ , che sono quelli del vettore $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y})$, sono determinati dai segni di $f(x, y)$ e $g(x, y)$ e sono quindi ottenibili senza integrare le equazioni. In particolare, quando $f(x, y) > 0$ il vettore è orientato da sinistra verso destra secondo il seguente schema: orizzontalmente se $g(x, y) = 0$, inclinato dal basso verso l'alto (nord-est) se $g(x, y) > 0$, inclinato dall'alto verso il basso (sud-est) se $g(x, y) < 0$. Se $f(x, y) < 0$ il vettore è orientato da destra verso sinistra e $g(x, y)$ segue lo schema precedente. Se $g(x, y) > 0$ allora il vettore è rivolto verso l'alto (verticalmente se $f(x, y) = 0$, inclinato da sinistra a destra (nord-est) se $f(x, y) > 0$, da destra verso sinistra (nord-ovest) se $f(x, y) < 0$), mentre se $g(x, y) < 0$ il vettore è rivolto verso il basso secondo lo stesso schema. La tabella 5.1 riassume i vari casi possibili, compreso il caso $f(x, y) = g(x, y) = 0$, ovvero un punto di equilibrio. Si noti che se l'equazione (5.35) è integrabile esplicitamente, il ritratto di fase globale è immediato.

Definizione 5.36 Chiamiamo campo di flusso associato al sistema (5.21) l'insieme dei vettori spiccati dal generico punto (x, y) e tangenti alla traiettoria del sistema passante per quel punto. Si noti che, fissato il punto (x, y) , la tangente alla traiettoria è unica a meno che il punto non sia di equilibrio.

Dal campo di flusso di un sistema è possibile ricavare l'andamento qualitativo delle traiettorie (senza integrare il sistema) e determinare in prima approssimazione (senza fare il calcolo degli autovalori del sistema linearizzato) se un punto di equilibrio (nodo, sella o stella, purché non si tratti di un fuoco) è stabile o meno. Pertanto, con un ambiente di calcolo automatico come GNU Octave, si possono ricavare molte informazioni sulle traiettorie del sistema semplicemente calcolando le funzioni $f(x, y)$ e $g(x, y)$. Le informazioni grafiche sul campo di flusso ricavate tramite l'analisi delle curve isocline è utile anche per controllare e confermare la coerenza delle conclusioni basate sui calcoli eseguiti.

Esercizio 5.37 Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = x - y, \end{cases} \quad (5.38)$$

determinare, senza eseguire calcoli: (a) le isocline a tangente orizzontale e verticale; (b) il campo di flusso; (c) la possibile natura dei punti di equilibrio; (d) l'andamento qualitativo del ritratto di fase globale.

Risoluzione. (a) L'isoclina a tangente orizzontale è il luogo dei punti del piano delle fasi che soddisfa l'equazione $g(x, y) = 0$, e quindi è la retta $y = x$. L'isoclina a tangente verticale è il

luogo dei punti del piano delle fasi che soddisfa l'equazione $f(x, y) = 0$, e quindi è la parabola $y = x^2$. Le isocline si incontrano in due punti, $(0, 0)$ e $(1, 1)$ che sono, pertanto, punti di equilibrio del sistema. In figura 5.5 (sinistra) sono riportate l'isocline a tangente orizzontale (linea tratteggiata) e quella a tangente verticale (linea punteggiata).

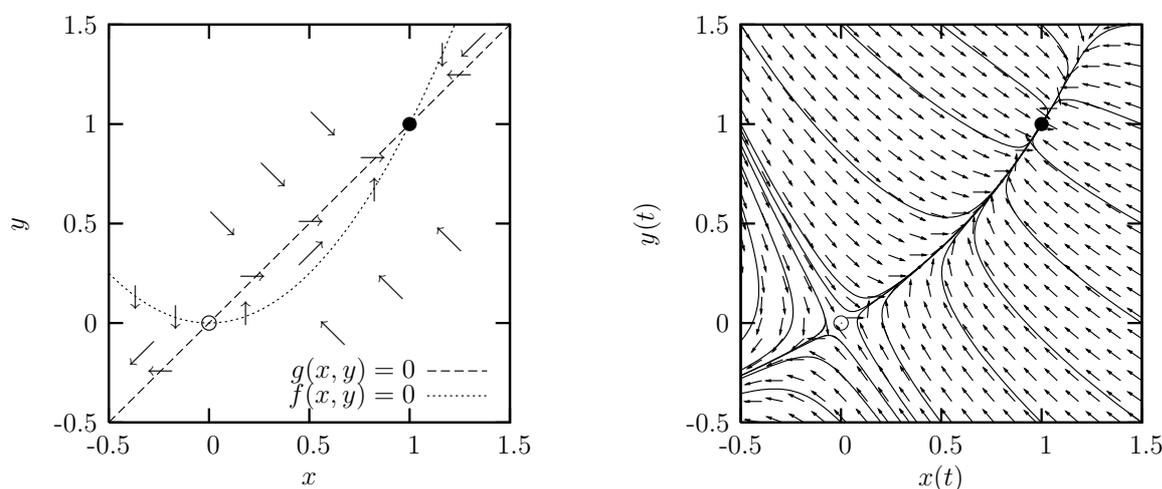


Figura 5.5: Problema 5.37 (sistema (5.38)): isocline a tangente orizzontale (linea tratteggiata) e a tangente verticale (linea punteggiata) e andamento del campo di flusso (sinistra); campo di flusso e ritratto di fase (destra)

(b) Per determinare la direzione e il verso locali delle traiettorie occorre studiare il segno di $f(x, y)$ e $g(x, y)$. Quindi, $f(x, y) = x - y > 0$ implica $y < x$ e $g(x, y) = y - x^2 > 0$ implica $y > x^2$. Avendo a disposizione i segni di f e g , seguendo lo schema in tabella 5.1 è immediato concludere che le direzioni locali delle traiettorie sono quelle riportate in figura 5.5 (sinistra).

(c) La natura dei punti di equilibrio può essere dedotta dal campo vettoriale nell'intorno di essi. Si noti che, localmente, i vettori puntano verso $(1, 1)$ che risulta, pertanto, stabile. Inoltre, siccome si possono notare almeno due direzioni di avvicinamento ad esso, si tratta di un nodo (stabile) a due tangenti. Al contrario, nell'intorno dell'origine alcuni vettori puntano verso di essa mentre altri si dipartono da essa. Pertanto, l'origine è un punto di sella e quindi instabile. Si noti che la risoluzione analitica del problema conduce agli stessi risultati.

(d) L'andamento qualitativo del ritratto di fase si traccia facilmente seguendo l'andamento del campo di flusso, ovvero disegnando delle linee che abbiano localmente la direzione ed il verso dei vettori determinati precedentemente. In figura 5.5 (destra) è riportato il campo di flusso ottenuto in modo automatico con le seguenti istruzioni:

```
clear all
xmin=-.5; xmax=1.5; xn=20;
ymin=-.5; ymax=1.5; yn=20;
[x,y]=meshgrid(linspace(xmin,xmax,xn),linspace(ymin,ymax,yn));
dx=y-x.^2; dy=x-y;
L = 12*sqrt(dx.^2 + dy.^2);
axis([xmin xmax ymin ymax]);
quiver(x,y,dx./L,dy./L);
```

Si noti che il comando $L = 12*sqrt(dx.^2 + dy.^2)$; serve per riscaldare i vettori in modo che abbiano tutti la stessa lunghezza e risultino visibili. ■

Esercizio 5.39 Tracciare il ritratto di fase globale per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(5 - 4x - y) \\ \dot{y} = y(4 - 2x - 3y). \end{cases}$$

Risoluzione. Procediamo in modo sistematico secondo lo schema 5.32.

1. *Punti di equilibrio e isocline.* Partiamo dalle isocline: quelle a tangente orizzontale sono il luogo dei punti del piano delle fasi che soddisfano l'equazione $g(x, y) = 0$, ovvero le rette $y = 0$ e $y = -2/3x + 4/3$. Quelle a tangente verticale sono il luogo dei punti del piano delle fasi che soddisfano l'equazione $f(x, y) = 0$, ovvero le rette $x = 0$ e $y = -4x + 5$. Le isocline si incontrano in 4 punti, $(0, 0)$, $(5/4, 0)$, $(0, 4/3)$ e $(11/10, 3/5)$ che sono, pertanto, i punti di equilibrio del sistema. In figura 5.6 (sinistra) sono riportate le isocline a tangente orizzontale (linea tratteggiata) e quelle a tangente verticale (linea punteggiata).

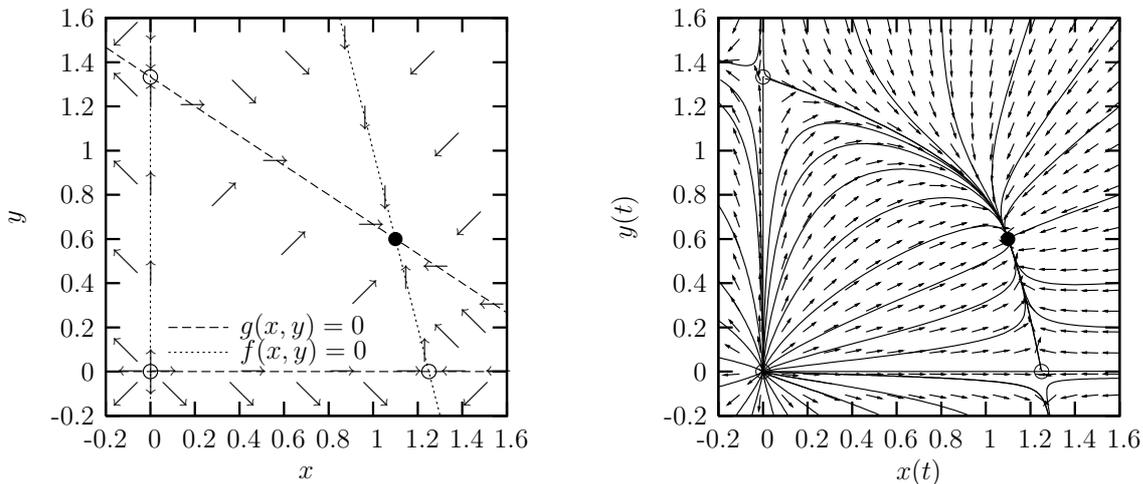


Figura 5.6: Problema 5.39: isocline a tangente orizzontale (linea tratteggiata) e a tangente verticale (linea punteggiata) e andamento del campo di flusso (sinistra); campo di flusso e ritratto di fase (destra)

Per determinare la direzione e il verso delle traiettorie occorre studiare il segno di $f(x, y)$ e $g(x, y)$. Quindi, per $x > 0$ si ha che $f(x, y) = x(5 - 4x - y) > 0$ quando $y < -4x + 5$, ovvero sotto la retta, mentre per $x < 0$ vale il contrario. Analogamente, per $y > 0$ si ha $g(x, y) = y(4 - 2x - 3y) > 0$ quando $y < -2/3x + 4/3$, ovvero sotto la retta, mentre per $y < 0$ vale il contrario. Avendo a disposizione i segni di f e g , seguendo lo schema in tabella 5.1 è immediato concludere che le direzioni locali delle traiettorie sono come riportato in figura 5.6 (sinistra). Da quest'ultima figura si può dedurre anche la natura dei punti di equilibrio. Si noti che, localmente, i vettori puntano verso $(11/10, 3/5)$ che risulta, pertanto, stabile. Inoltre, siccome si possono notare almeno due direzioni di avvicinamento ad esso, si tratta di un nodo (stabile) a due tangenti. Al contrario, nell'intorno dell'origine tutti i vettori si allontanano da essa che, quindi, è instabile. Dal diagramma non è chiaro se si tratta di una stella o di un nodo proprio a due tangenti, per cui sarà necessario calcolare la matrice Jacobiana. Gli altri due punti di equilibrio $(5/4, 0)$ e $(0, 4/3)$, invece,

sono localmente dei punti di sella in quanto almeno lungo una direzione le traiettorie si avvicinano mentre lungo altre direzioni si allontanano. Con questi elementi qualitativi a disposizione, si può tentare di tracciare il ritratto di fase seguendo l'andamento del campo di flusso e disegnando delle linee che abbiano, localmente, la direzione ed il verso dei vettori determinati precedentemente. In figura 5.6 (destra) è riportato il campo di flusso ottenuto in modo automatico con le seguenti istruzioni:

```
clear all
xmin=-.2; xmax=1.6; xn=20;
ymin=-.2; ymax=1.6; yn=20;
[x,y]=meshgrid(linspace(xmin,xmax,xn),linspace(ymin,ymax,yn));
dx=x.*(5-4*x-y); dy=y.*(4-2*x-3*y);
L = 14*sqrt(dx.^2 + dy.^2);
axis([xmin xmax ymin ymax]);
quiver(x,y,dx./L,dy./L);
```

2. *Linearizzazione.* Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x(5 - 4x - y) = 0 \\ y(4 - 2x - 3y) = 0, \end{cases}$$

si ottengono i punti di equilibrio $(0,0)$, $(5/4,0)$, $(0,4/3)$ e $(11/10,3/5)$. La matrice Jacobiana è

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 5 - 8x - y & -x \\ -2y & 4 - 2x - 6y \end{bmatrix}$$

pertanto

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad J(5/4,0) = \begin{bmatrix} -5 & -5/4 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix},$$

$$J(0,4/3) = \begin{bmatrix} 11/3 & 0 \\ -8/3 & -4 \end{bmatrix}, \quad J(11/10,3/5) = - \begin{bmatrix} 22/5 & 11/10 \\ 6/5 & 9/5 \end{bmatrix}.$$

La matrice Jacobiana nell'origine fornisce gli autovalori $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 5$ (immediati) con rispettivi autovettori $\mathbf{u}_1 = [0, k]^T$ e $\mathbf{u}_2 = [h, 0]^T$ con $k, h \in \mathbb{R}$; pertanto l'origine è un nodo proprio (a due tangenti) instabile. La matrice Jacobiana in $(5/4,0)$ fornisce $\lambda_1 = -5$ e $\lambda_2 = 3/2$ con rispettivi autovettori $\mathbf{u}_1 = [k, 0]^T$ e $\mathbf{u}_2 = [-5h, 26h]^T$ con $k, h \in \mathbb{R}$; pertanto $(5/4,0)$ è un punto di sella e quindi instabile. La matrice Jacobiana in $(0,4/3)$ fornisce $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = 11/3$ con rispettivi autovettori $\mathbf{u}_1 = [0, k]^T$ e $\mathbf{u}_2 = [23h, -8h]^T$ con $k, h \in \mathbb{R}$; pertanto $(0,4/3)$ è un punto di sella e quindi instabile. Infine, la matrice Jacobiana in $(11/10,3/5)$ fornisce

$$\lambda_1 = -\frac{\sqrt{301} + 31}{10} < 0, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{301} - 31}{10} < 0$$

con rispettivi autovettori

$$\mathbf{u}_1 = \left[k, k \frac{\sqrt{301} - 13}{11} \right]^T, \quad \mathbf{u}_2 = \left[h, -h \frac{\sqrt{301} + 13}{11} \right]^T, \quad k, h \in \mathbb{R};$$

pertanto $(11/10,3/5)$ è un nodo proprio (a due tangenti) stabile.

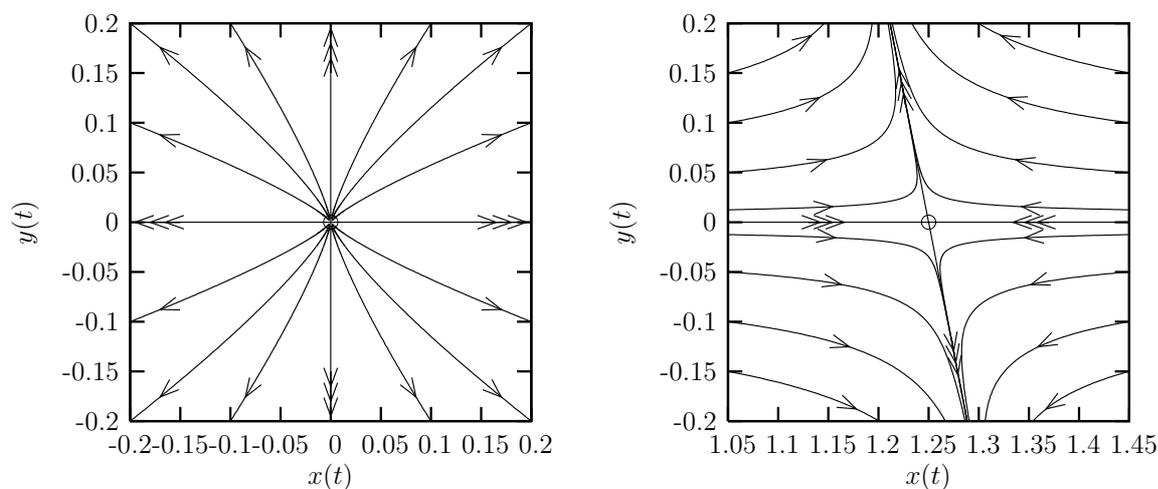


Figura 5.7: Ritratto di fase locale e direzioni dei due autovettori per il sistema linearizzato corrispondente al sistema nonlineare del problema 5.39. La linearizzazione nell'intorno di $(0, 0)$ (sinistra) porta a concludere che l'origine è, localmente, un nodo instabile a due tangenti (si noti il pallino vuoto). Dalla linearizzando intorno a $(5/4, 0)$ (destra) si conclude che quest'ultimo è, localmente, una sella e quindi instabile (si noti il pallino vuoto)

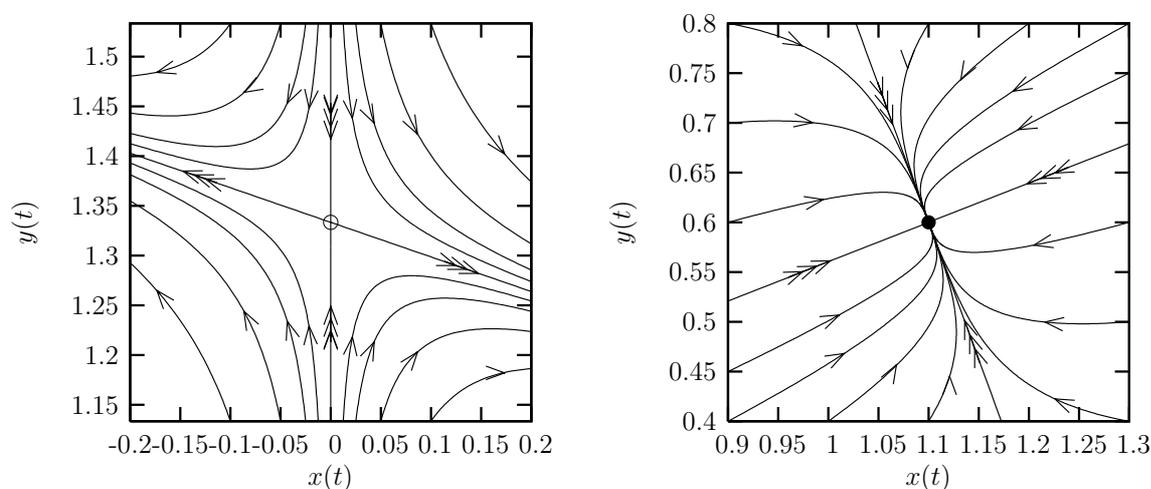


Figura 5.8: Ritratto di fase locale e direzioni dei due autovettori per il sistema linearizzato corrispondente al sistema nonlineare del problema 5.39. La linearizzazione nell'intorno di $(0, 4/3)$ (sinistra) porta a concludere che quest'ultimo è, localmente, una sella e quindi instabile (si noti il pallino vuoto). Linearizzando intorno a $(11/10, 3/5)$ (destra) si conclude che quest'ultimo è, localmente, un nodo proprio (a due tangenti) stabile (si noti il pallino pieno)

3. *Ritratti locali.* I ritratti locali di ciascun punto di equilibrio sono riportati nelle figure 5.7 e 5.8.

4. *Cicli limite.* Non esistono cicli limite.

5. *Ritratto globale.* Per tracciare il ritratto globale occorre tener conto dell'andamento delle isocline e del diagramma semplificato del campo di flusso ottenuto studiando i segni di $f(x, y)$ e $g(x, y)$ (figura 5.6, sinistra). Così facendo si ottengono delle traiettorie che uniscono due a due i punti di equilibrio e che prendono il nome di *traiettorie eteroclina*. In particolare, la retta $x = 0$ congiunge $(0, 0)$ con $(0, 4/3)$, la retta $y = 0$ congiunge $(0, 0)$ con $(5/4, 0)$, mentre le traiettorie che congiungono $(11/10, 3/5)$ con gli altri tre punti di equilibrio non sono rettilinee.

Questo conclude lo svolgimento. ■

5.4 Modelli preda-predatore (Lotka-Volterra)

Verso gli anni venti del 1900, il biologo Umberto D'Ancona, professore all'Università di Padova, studiava le variazioni nel tempo delle popolazioni di varie specie di pesce che, nel Mar Adriatico, interagiscono tra di loro. Durante queste ricerche, venne a conoscenza di dati sulle percentuali di pesca di varie specie in diversi porti nel corso della prima guerra mondiale. In particolare, erano disponibili i dati sui selaci (squali, razze, etc), che non sono molto interessanti come cibo, riportati in figura 5.9. Incuriosito dalla grande crescita della percentuale di selaci durante la

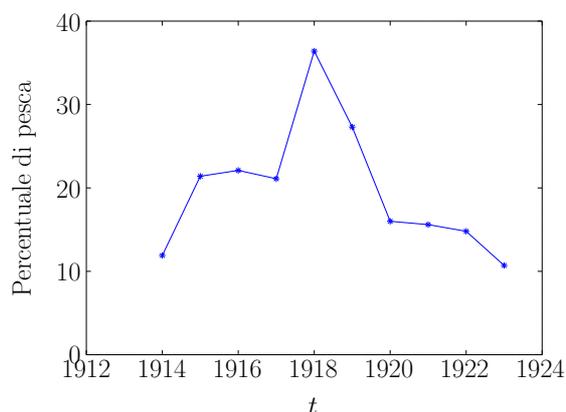


Figura 5.9: Andamento della percentuale di pesca di selaci nel periodo della prima guerra mondiale

prima guerra mondiale, trovò come spiegazione immediata quella della diminuzione dell'attività di pesca in quel periodo (a causa della guerra). D'Ancona era interessato a capire in che misura la diminuzione dell'intensità di pesca interferisse con la crescita delle popolazioni di pesce, cosa che tornava utile anche all'industria della pesca, dato che avrebbe avuto ovvie implicazioni nelle scelte dei metodi di pesca.

Una prima spiegazione che D'Ancona si diede fu che a causa della guerra era diminuita la pesca delle specie commestibili di pesce, che quindi erano cresciute. Essendo queste specie anche la preda preferite delle selaci, egli dedusse che anche le selaci, trovando abbondanza di cibo, fossero aumentate. Tuttavia questo avrebbe dovuto comportare una conseguente diminuzione del pesce commestibile, cosa che in realtà non si verificava in quanto anche questo aumentava. La teoria di D'Ancona mostrava che il numero dei selaci aumentava quando l'attività di pesca

diminuiva, ma non spiegava perché il calo di questa attività portava più benefici ai predatori che alle loro prede.

Dopo avere esaurito tutte le possibili spiegazioni biologiche di questo fenomeno, D'Ancona si rivolse al famoso matematico italiano Vito Volterra, suo collega e suocero, il quale cominciò l'analisi del problema suddividendo tutti i pesci in due popolazioni: quella delle prede $x(t)$ e quella dei predatori $y(t)$. Egli ipotizzò che le prede non fossero in forte competizione tra di loro nella ricerca di cibo a causa dell'abbondanza di esso, in particolare se la popolazione di prede non era molto numerosa. Quindi, in assenza di selaci, secondo Volterra il pesce commestibile cresce in accordo alla legge di Malthus $\dot{x} = ax$, per qualche costante positiva a . Il numero di contatti per unità di tempo fra prede e predatori è bxy , per qualche costante positiva b . Analogamente, i predatori hanno un naturale tasso di decrescita $-cy$, proporzionale al loro numero attuale, ed il loro numero aumenta ad un tasso dxy proporzionale al loro numero y e al numero delle loro prede x (c e d sono entrambe costanti positive). In definitiva

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy, \\ \dot{y} = -cy + dxy. \end{cases}$$

Questo sistema di equazioni governa l'interazione dei selaci e del pescato in assenza di pesca.

Esercizio 5.40 Studiare, al variare dei parametri positivi a, b, c, d e delle condizioni iniziali il comportamento del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy, \\ \dot{y} = -cy + dxy, \end{cases}$$

noto storicamente come modello preda-predatore di Lotka-Volterra.

Risoluzione. Il sistema ammette due punti di equilibrio, l'origine e $(c/d, a/b)$, che sono i punti

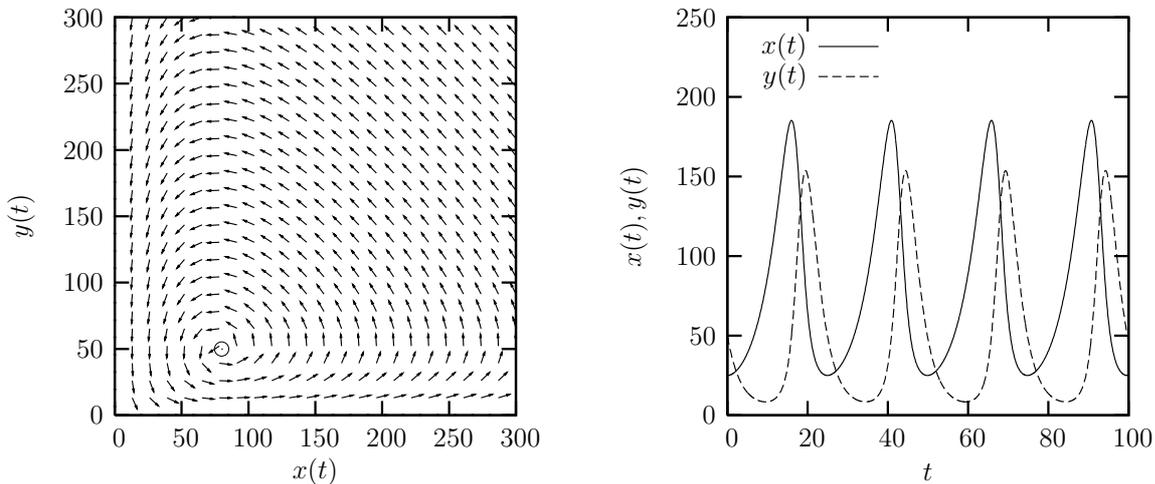


Figura 5.10: Campo di flusso (sinistra) e storia temporale (destra) relativi al sistema planare nonlineare del problema 5.40 (Lotka-Volterra classico) per $a = 0.2, b = 0.004, c = 0.4, d = 0.005, (x_0, y_0) = (25, 50)$. Si osservi l'andamento periodico delle soluzioni

di intersezione tra le isocline a tangente orizzontale $y = 0$ e $x = c/d$ e quelle a tangente verticale $x = 0$ e $y = a/b$. Dall'analisi del segno di $\dot{x} = ax - bxy$ e $\dot{y} = -cy + dxy$ si deduce facilmente che le traiettorie, perlomeno per $x, y > 0$, girano in senso antiorario nel piano delle fasi, come

visibile in figura 5.10 (sinistra). Il sistema linearizzato attorno all'origine rivela che gli autovalori sono reali con $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = -c$. Pertanto, essendo a, c positivi, l'origine è un punto di sella. La linearizzazione attorno al punto $(c/d, a/b)$ fornisce gli autovalori $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ac}$ e quindi questo punto è un centro. Pertanto, partendo da una qualsiasi condizione iniziale, il sistema evolve

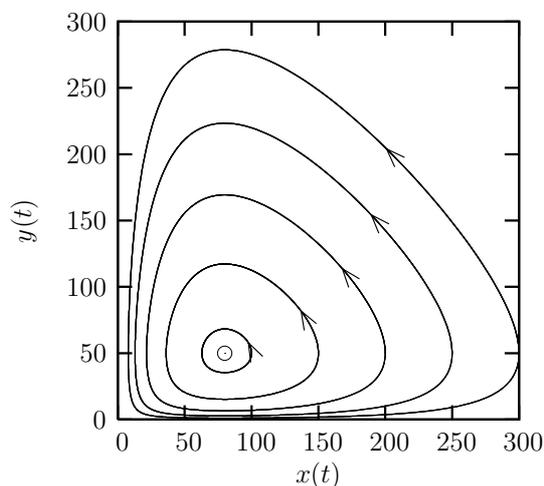


Figura 5.11: Alcune traiettorie relative al sistema planare nonlineare del problema 5.40 (Lotka-Volterra classico) per $a = 0.2$, $b = 0.004$, $c = 0.4$, $d = 0.005$. Si osservi la natura instabile dell'origine (punto di sella) e la presenza di un centro. Le traiettorie si addensano nelle regioni del piano delle fasi comprese tra gli assi ed il centro, con la conseguenza che per certi istanti di tempo, una traiettoria perturbata può trovarsi lontana da quella imperturbata

lungo traiettorie periodiche chiuse che riportano la soluzione a passare dalla condizione iniziale, come mostrato in figura 5.11. Si noti che, dividendo le due equazioni del sistema membro a membro, si ha

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - by)},$$

da cui, integrando si ottiene l'equazione delle orbite chiuse in forma implicita

$$x, y > 0, \quad a \log y + c \log x - by - dx = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, si osservi che una perturbazione nella soluzione porta il sistema su un'altra traiettoria chiusa e periodica che, per certi istanti, può trovarsi lontana da quella imperturbata. Si veda, in particolare, la figura 5.11. ■

Esercizio 5.41 Siano a, b, c, d quattro costanti positive e sia $(x, y) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una soluzione periodica di periodo $T > 0$ del modello di Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy, \\ \dot{y} = -cy + dxy. \end{cases}$$

Mostrare che i valori medi delle soluzioni del sistema sul periodo $[0, T]$ coincidono con i valori di equilibrio a/b e c/d (principio di Volterra).

Risoluzione. I valori medi delle soluzioni nel periodo T sono dati da

$$\xi = \frac{1}{T} \int_0^T x(\sigma) d\sigma, \quad \zeta = \frac{1}{T} \int_0^T y(\sigma) d\sigma.$$

Da $\dot{x} = (a - by)x$, separando le variabili ed integrando tra 0 e T si ha

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\dot{x}}{x} d\sigma = \frac{1}{T} \int_0^T (a - by) d\sigma,$$

da cui

$$\frac{1}{T} [\ln x(T) - \ln x(0)] = \frac{1}{T} \left[aT - b \int_0^T y(\sigma) d\sigma \right].$$

Essendo $x(T) = x(0)$, in quanto le soluzioni sono periodiche, si ottiene

$$0 = a - b \frac{1}{T} \int_0^T y(\sigma) d\sigma = a - b\zeta,$$

da cui $\zeta = a/b$. Similmente, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \ln y(T) - \ln y(0) \\ &= \int_0^T \frac{\dot{y}}{y} d\sigma = \int_0^T (-c + dx) d\sigma \\ &= -cT + d \int_0^T x(\sigma) d\sigma = (-c + d\xi)T, \end{aligned}$$

da cui $\xi = c/d$, che conclude la dimostrazione. ■

Esercizio 5.42 Studiare, al variare dei tre parametri positivi a, b, c e delle condizioni iniziali, il comportamento del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x) - \frac{axy}{x+c}, \\ \dot{y} = by(1-\frac{y}{x}), \end{cases}$$

che rappresenta una versione più realistica del modello di Lotka-Volterra (5.40).

Risoluzione.

1. Punti di equilibrio. Il sistema in questione ammette più punti di equilibrio: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(-c, 0)$ e

$$\left(\frac{(1-a-c) + \sqrt{(1-a-c)^2 + 4c}}{2}, \frac{(1-a-c) + \sqrt{(1-a-c)^2 + 4c}}{2} \right).$$

Trattandosi di popolazioni, richiediamo $x, y > 0$, pertanto studiamo il comportamento solo dell'ultimo punto di equilibrio che indicheremo nel seguito con $(x_{\text{eq}}, y_{\text{eq}})$. Per quanto riguarda le isocline a tangente verticale si ha $\dot{x} = 0 \implies x(1-x) - \frac{axy}{x+c}$, che risolta for-

nisce la parabola di equazione $y = \frac{-x^2 + (1-c)x + c}{a}$. Per quelle a tangente orizzontale, da $\dot{y} = 0$ si ottengono le rette $y = 0$ e $y = x$.

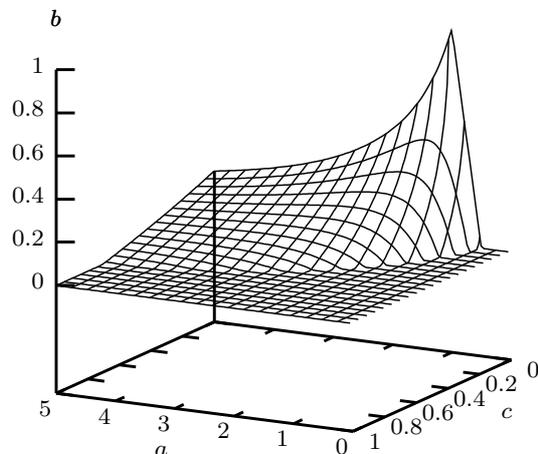


Figura 5.12: Superficie $\varphi(a, c)$ riferita al problema 5.42. Il punto di equilibrio risulta stabile per le terne (a, c, b) tali che $b > \varphi(a, c)$, instabile altrimenti. Si noti che per $a < 1/2$ la stabilità del punto di equilibrio $(x_{\text{eq}}, y_{\text{eq}})$ è assicurata per tutti i valori di $b > 0, c > 0$

2. Linearizzazione nei punti di equilibrio e determinazione della natura locale. La matrice Jacobiana è

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{axy}{(x+c)^2} - \frac{ay}{x+c} - 2x + 1 & -\frac{ax}{x+c} \\ \frac{by^2}{x^2} & \frac{b(x-2y)}{x} \end{bmatrix}.$$

Analizzando il sistema linearizzato attorno a $(x_{\text{eq}}, y_{\text{eq}})$, si scopre che la parte reale degli autovalori λ è negativa solo se

$$b > \frac{(a - \sqrt{(1-a-c)^2 + 4c})(1+a+c - \sqrt{(1-a-c)^2 + 4c})}{2a}.$$

Pertanto, indicando con $\varphi(a, c)$ la funzione da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}

$$\varphi(a, c) = \frac{(a - \sqrt{(1-a-c)^2 + 4c})(1+a+c - \sqrt{(1-a-c)^2 + 4c})}{2a}$$

e diagrammando la superficie $b = \varphi(a, c)$ con $a, c > 0$, si ottiene visivamente la regione dello spazio (a, c, b) stabile ($b > \varphi(a, c)$) e quella instabile ($b < \varphi(a, c)$), come riportato in figura 5.12. Come si può notare, per $a < 1/2$ e tutti i valori di $b > 0, c > 0$, la stabilità del punto di equilibrio $(x_{\text{eq}}, y_{\text{eq}})$ è assicurata. Al contrario quando $a > 1/2$, affinché ci sia stabilità il generico punto (a, c, b) deve trovarsi al di sopra della superficie riportata in figura 5.12.

3. Disegno del ritratto locale per ciascun punto di equilibrio. In presenza di autovalori reali negativi $(x_{\text{eq}}, y_{\text{eq}})$ è un nodo stabile, mentre diventa un fuoco stabile se gli autovalori sono complessi a parte reale negativa. Nel caso instabile si passa da nodo instabile (entrambi gli autovalori reali positivi) a fuoco instabile (autovalori complessi a parte reale positiva). In figura 5.13 sono riportati i risultati ottenuti con $a = 0.1, b = 0.1$ e $c = 0.1$, partendo da

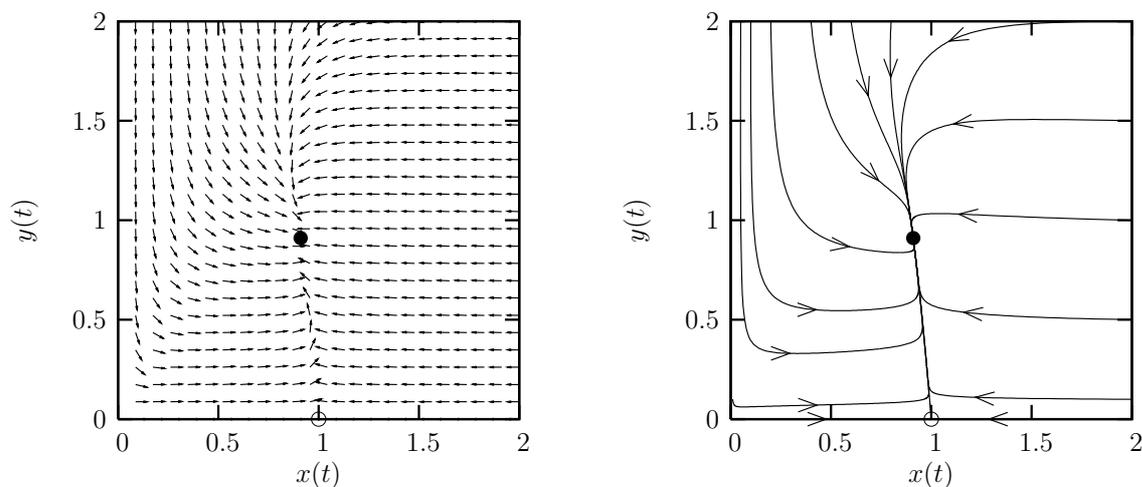


Figura 5.13: Campo di flusso (sinistra) ed alcune traiettorie (destra) relativi al sistema planare nonlineare del problema 5.42 per $a = 0.1, b = 0.1, c = 0.1$. Si osservi la presenza di un solo punto di equilibrio stabile (equilibrio non banale) e di un equilibrio instabile in $(1, 0)$

diverse condizioni iniziali. Come si può notare, il punto di equilibrio non banale è stabile ed attrae tutte le traiettorie, mentre il punto $(1, 0)$ è instabile. Cambiando i parametri in modo da avvicinarsi al limite di stabilità, si osserva che le traiettorie compiono sempre più giri attorno al punto di equilibrio stabile, indice del fatto che la parte reale degli autovali, pur essendo negativa, è piccola rispetto alla parte immaginaria e quindi si tratta di un fuoco stabile, come mostrato in figura 5.14 per $a = 1, b = 0.5$ e $c = 0.2$. Nel caso in

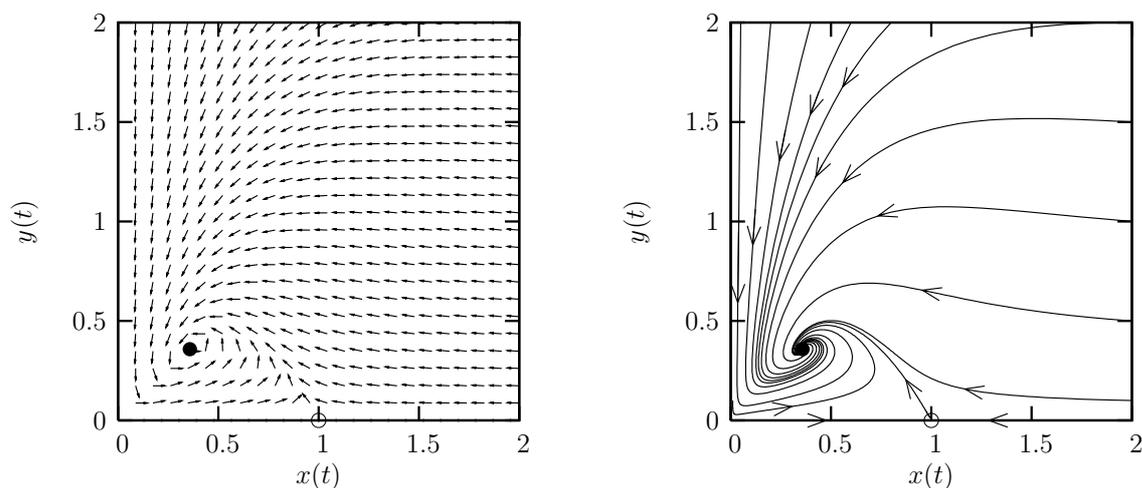


Figura 5.14: Campo di flusso (sinistra) ed alcune traiettorie (destra) relativi al sistema planare nonlineare del problema 5.42 per $a = 1, b = 0.5, c = 0.2$. Si osservi il passaggio del punto di equilibrio stabile (equilibrio non banale) da nodo a fuoco e il persistere di un equilibrio instabile in $(1, 0)$

cui la condizione di stabilità non sia rispettata, il punto di equilibrio non banale diventa

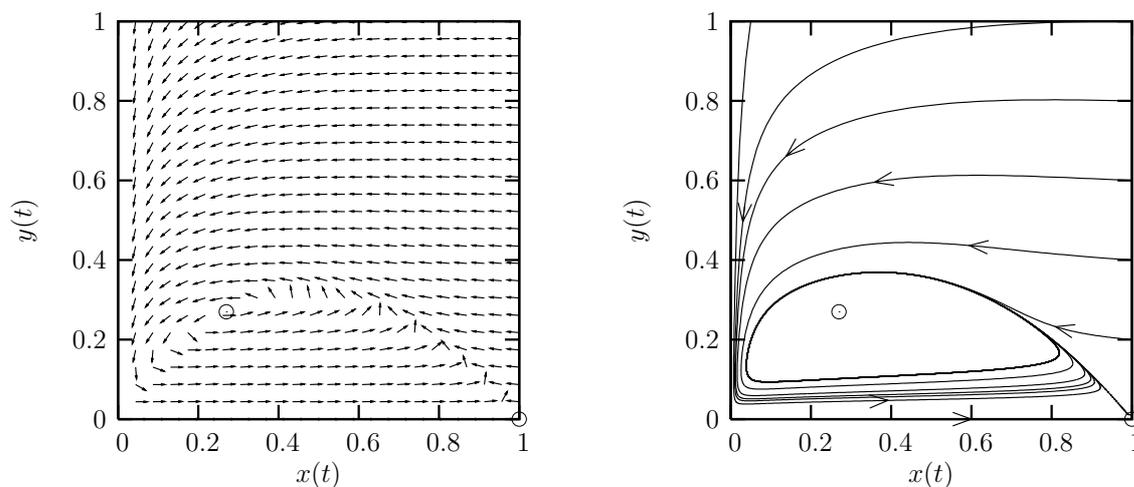


Figura 5.15: Campo di flusso (sinistra) ed alcune traiettorie (destra) relativi al sistema planare nonlineare del problema 5.42 per $a = 1, b = 0.1, c = 0.1$. Si osservi il passaggio del punto di equilibrio non banale da stabile a instabile e la presenza di un ciclo limite, nonché l'equilibrio instabile in $(1, 0)$

instabile per cui, anche partendo da condizioni iniziali molto vicine ad esso, la traiettoria se ne allontana.

4. Determinazione di eventuali cicli-limite ed orbite periodiche. Per l'analisi di questa situazione è possibile applicare il teorema di Poincaré-Bendixson che assicura l'esistenza di un ciclo limite cui tende la traiettoria quando si parta da condizioni iniziali interne o esterne ad esso. In figura 5.15 è riportato il caso $a = 1, b = 0.1$ e $c = 0.1$, che assicura l'instabilità del punto $(x_{\text{eq}}, y_{\text{eq}}) \approx (0.27016, 0.27016)$. Si noti una differenza sostanziale tra il Lotka-Volterra classico visto nell'esercizio 5.40 e questo modello più realistico. Ora il ciclo limite è stabile, nel senso che attrae le traiettorie. Al contrario, le orbite periodiche del sistema classico sono tali per cui una leggera variazione delle condizioni iniziali, ovvero una perturbazione nell'evoluzione ciclica, può portare a traiettorie che per alcuni tempi possono essere lontane tra di loro (nel piano delle fasi). Questo si verifica, in particolare, quando la perturbazione avviene per valori delle variabili tali per cui il prodotto xy è piuttosto piccolo. Mantenendo $a = 1, b = 0.1, c = 0.1$ e partendo da una condizione iniziale $(x_0, y_0) = (0.27, 0.27)$ molto vicina a $(x_{\text{eq}}, y_{\text{eq}})$, si nota (vedi figura 5.16) un iniziale allontanamento dalla condizione iniziale e il susseguente carattere periodico della traiettoria quando raggiunge il ciclo limite stabile.
5. Disegno del ritratto globale congiungendo i ritratti locali. Vedi figure precedenti.

■

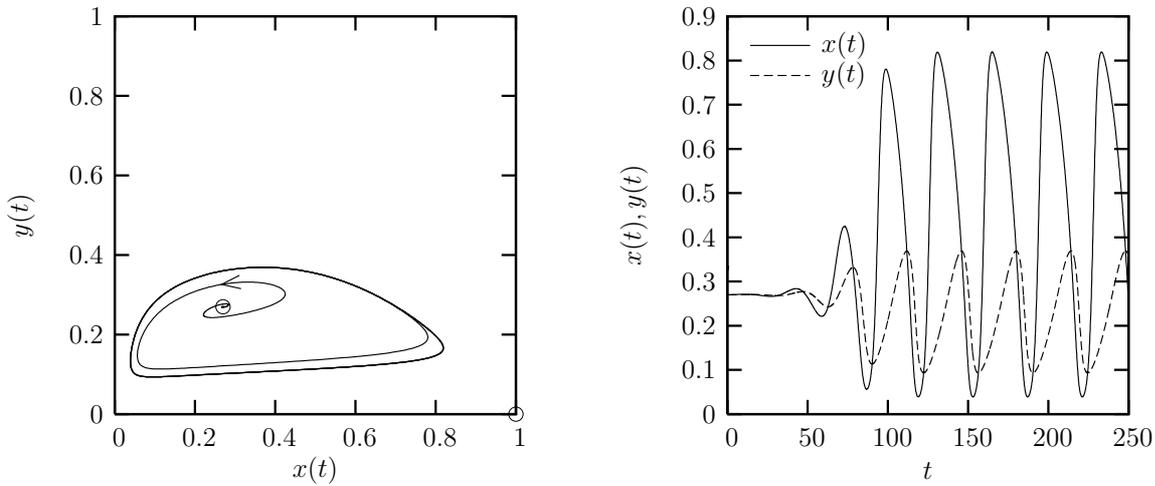


Figura 5.16: Traiettoria ottenuta con condizione iniziale $(x_0, y_0) = (0.27, 0.27)$ (sinistra) e andamento temporale delle soluzioni (destra) relative al sistema planare nonlineare del problema 5.42 per $a = 1$, $b = 0.1$ e $c = 0.1$. Si osservi la natura instabile del punto di equilibrio non banale e la presenza di un ciclo limite particolarmente evidente nelle serie temporali

5.5 Modelli di competizione intra- e inter-specifica

Esercizio 5.43 Studiare, al variare dei parametri reali $a, b \in \mathbb{R}$ e delle condizioni iniziali, il comportamento del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x) - axy, \\ \dot{y} = y(1-y) - byx. \end{cases} \quad (5.44)$$

Risoluzione. Il sistema dato,

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^2 - axy, \\ \dot{y} = y - y^2 - byx, \end{cases}$$

è un caso particolare del sistema quadratico generale

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha_1 x + a_{11} x^2 + a_{12} xy, \\ \dot{y} = \alpha_2 y + a_{21} xy + a_{22} y^2, \end{cases} \quad (5.45)$$

con $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $a_{11} = a_{22} = -1$, $a_{12} = -a$ e $a_{21} = -b$. Le due popolazioni hanno una legge di crescita molto simile, con un tasso di crescita positivo e pari a 1 (ossia entrambe possono esistere anche da sole) e un tasso di competizione *intraspecifica* pari a 1 (competizione per le risorse all'interno della stessa specie). Se a e b sono diversi da zero c'è anche un'interazione tra le due specie, detta *interspecifica*, che può essere di *competizione* (nel caso in cui a, b sono entrambi positivi) o *cooperazione* (nel caso in cui a, b sono entrambi negativi). Come visto negli esempi precedenti, lo studio delle isocline e delle regioni in cui \dot{x} e/o \dot{y} sono positive o negative è fondamentale per capire l'andamento del campo di flusso. Questa analisi risulta particolarmente semplice sia nel caso in esame sia per il sistema generale (5.45) in quanto le isocline sono tutte delle rette. I punti di equilibrio sono

$$(0, 0), \quad (1, 0), \quad (0, 1), \quad \left(\frac{a-1}{ab-1}, \frac{b-1}{ab-1} \right),$$

e la matrice Jacobiana è

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} -ay - 2x + 1 & -ax \\ -by & -2y - bx + 1 \end{bmatrix}.$$

La prima considerazione è che l'origine, indipendentemente dai valori assunti da a e b , rimane una stella instabile in quanto $J(0, 0)$ è proprio la matrice identità.

Caso $a = b = 0$. In questo caso non c'è né competizione né cooperazione essendo il sistema disaccoppiato; i punti di equilibrio sono i 4 vertici del quadrato di lato 1 e procedendo con l'analisi del segno di \dot{x} e \dot{y} si arriva facilmente al campo di flusso riportato in figura 5.17 (sinistra). Gli autovalori della matrice Jacobiana permettono di concludere che solo il punto $(1, 1)$ è attrattivo essendo una stella stabile ($J(1, 1) = -I$ e quindi $\lambda_{1,2} = -1$), mentre gli altri tre punti sono repulsivi essendo o una stella (l'origine) o di sella ($(1, 0)$ e $(0, 1)$ con $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$). Partendo da condizioni iniziali positive per entrambe le specie, pertanto, il sistema evolverà verso il punto di equilibrio $(1, 1)$, ovvero dal punto di vista biologico entrambe le specie raggiungono un valore asintotico non nullo. Questi risultati sono riassunti visivamente nella figura 5.17.

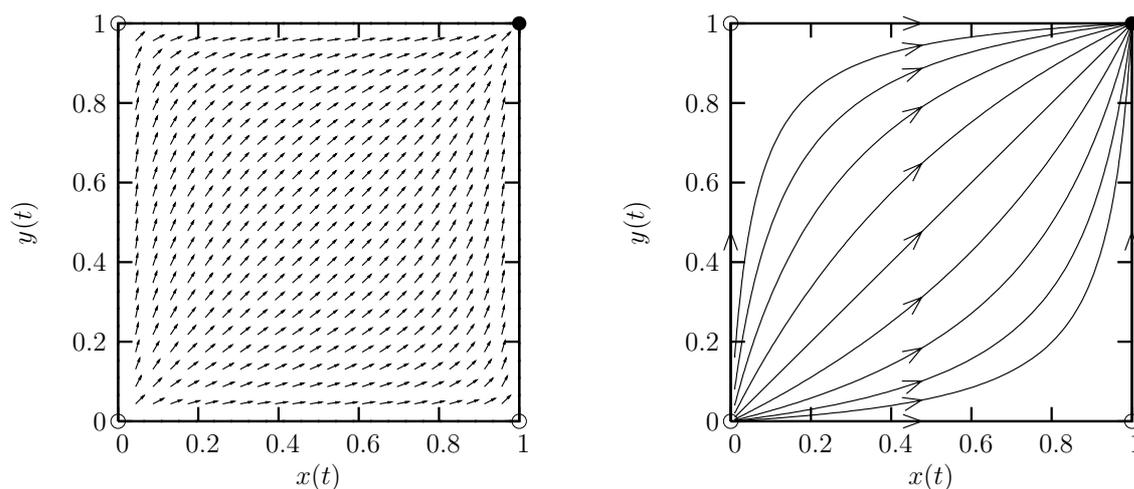


Figura 5.17: Campo di flusso (sinistra) ed alcune traiettorie (destra) relativi al sistema planare nonlineare del problema 5.43 con $a = b = 0$. Si osservi che l'unico punto di equilibrio stabile è $(1, 1)$, ovvero dal punto di vista biologico entrambe le specie raggiungono un valore asintotico non nullo

Caso $0 < a = b < 1$. Il sistema è competitivo con uguale competizione per entrambe le specie. Dall'analisi del segno di \dot{x} e \dot{y} si arriva al campo di flusso riportato in figura 5.18 (sinistra), mentre calcolando gli autovalori della matrice Jacobiana nei punti di equilibrio si conclude che solo $(\frac{a-1}{a b-1}, \frac{b-1}{a b-1})$ è stabile (nodo proprio) ed attrae le soluzioni con condizione iniziale positiva per entrambe le specie. Al contrario, $(0, 1)$ e $(1, 0)$ sono due punti di sella. Questo è chiaramente visibile in figura 5.18. Si osservi che, essendo $a = b$, il punto $(\frac{a-1}{a b-1}, \frac{b-1}{a b-1})$ si trova sulla retta $y = x$ ed il ritratto di fase è simmetrico rispetto ad essa.

Caso $a = b = 1$. Il campo di flusso è riportato in figura 5.19 (sinistra). Il punto $(\frac{a-1}{a b-1}, \frac{b-1}{a b-1})$ non esiste mentre la retta $y = -x + 1$ è luogo dei punti di equilibrio stabili, per cui anche $(0, 1)$ e $(1, 0)$ sono stabili. In particolare, una qualsiasi traiettoria originata da una particolare

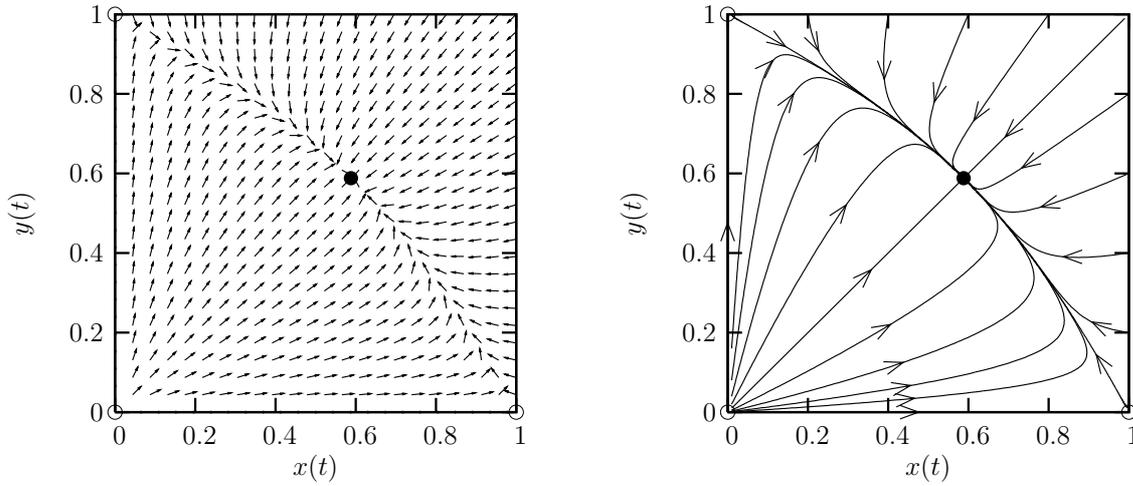


Figura 5.18: Campo di flusso (sinistra) ed alcune traiettorie (destra) relativi al sistema planare nonlineare del problema 5.43 con $a = b = 0.7$. Si osservi che l'unico punto di equilibrio stabile è $(\frac{a-1}{ab-1}, \frac{b-1}{ab-1})$ ovvero dal punto di vista biologico entrambe le specie raggiungono un valore asintotico non nullo

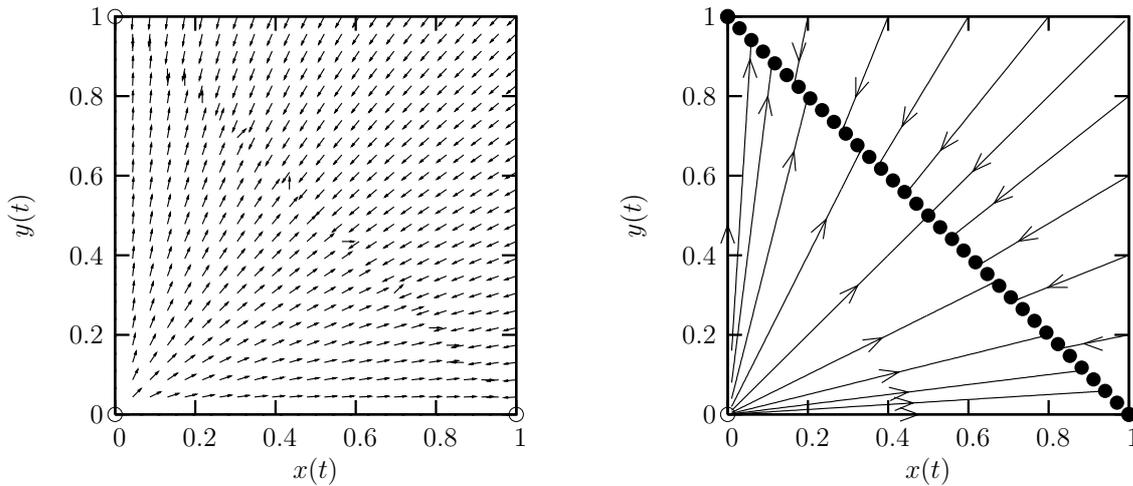


Figura 5.19: Campo di flusso (sinistra) ed alcune traiettorie (destra) relativi al sistema planare nonlineare del problema 5.43 con $a = b = 1$. Si osservi che i punti di equilibrio stabili sono quelli appartenenti alla retta $y = -x + 1$

condizione iniziale (x_0, y_0) è attratta dal punto di intersezione tra $y = \frac{y_0}{x_0}x$ e $y = -x + 1$. Questa situazione è visibile in figura 5.19 (destra), ottenuta per $a = b = 1$.

Caso $a = b > 1$. Il campo di flusso per $a = b = 1.5$ è riportato in figura 5.20 (sinistra). Il punto $(\frac{a-1}{ab-1}, \frac{b-1}{ab-1})$ diventa di sella ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1/5$ per $a = b = 1.5$), e quindi instabile. Al contrario, i punti $(1, 0)$ e $(0, 1)$ diventano dei nodi propri stabili ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1/2$ per $a = b = 1.5$), come visibile in figura 5.20 (destra). Pertanto la competizione è tale da far sopravvivere solo la specie che parte avvantaggiata (si vedano le zone del bacino di attrazione dei nodi propri stabili). L'origine rimane una stella instabile. È chiaro che partendo da condizioni

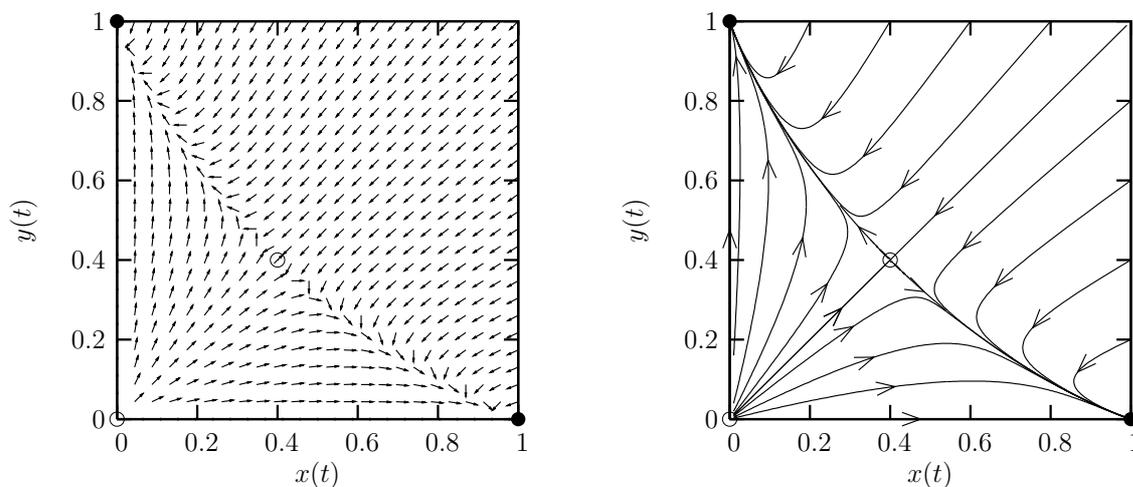


Figura 5.20: Campo di flusso (sinistra) ed alcune traiettorie (destra) relativi al sistema planare nonlineare del problema 5.43 con $a = b = 1.5$. Si osservi come la competizione sia tale da far sopravvivere solo la specie che parte avvantaggiata rispetto all'altra, ovvero se la condizione iniziale è tale per cui $y_0 > x_0$ allora la specie x soccomberà e la specie y sopravviverà e viceversa con $y_0 < x_0$

iniziali $0 < x_0 = y_0 < 1$ la soluzione finisce nel punto $(\frac{a-1}{ab-1}, \frac{b-1}{ab-1})$, che è instabile essendo di sella. Si noti che il ritratto di fase è simmetrico rispetto alla retta $y = x$ perché $a = b$.

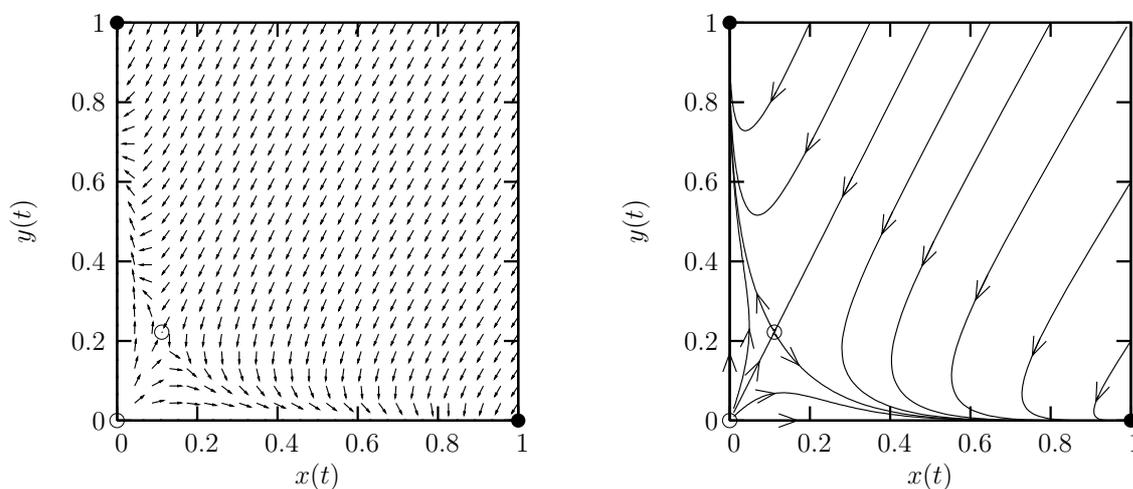


Figura 5.21: Campo di flusso (sinistra) ed alcune traiettorie (destra) relativi al sistema planare nonlineare del problema 5.43 con $a = 4$ e $b = 7$. Si osservi come al crescere della competizione interspecifica il punto di equilibrio stabile si sposti verso l'origine. Inoltre $a \neq b$ rompe la simmetria rispetto alla retta $y = x$. Dal punto di vista biologico una specie si estingue e l'altra sopravvive dipendentemente da dove si trova la condizione iniziale rispetto alla retta $y = \frac{b-1}{a-1}x$

Caso $a, b \gg 1$. Il punto $(\frac{a-1}{ab-1}, \frac{b-1}{ab-1})$, che è una sella (e quindi instabile), è tale per cui le sue coordinate tendono entrambe a zero al crescere di a e b (e quindi il punto tende verso

l'origine), con velocità diverse. In altre parole per $a = b \gg 1$ il punto di equilibrio si sposta verso l'origine e il ritratto di fase è simmetrico rispetto alla retta $y = x$, come visto nei casi precedenti di $a = b$. Viceversa, per $a, b \gg 1$ e $a \neq b$ il punto di equilibrio stabile si sposta verso la zona $x = 0$ e $y = 0$ ma il ritratto di fase perde di simmetria rispetto alla retta $y = x$, come evidente dalla figura 5.21. Questo avviene tanto più velocemente quanto più sono elevati a e b e l'esito della competizione è determinato da dove si trova la condizione iniziale rispetto alla retta $y = \frac{b-1}{a-1}x$ (vedi figura 5.21). Dal punto di vista biologico, siccome $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono dei nodi propri stabili, la soluzione tende ad uno di essi a meno di non partire da un altro punto di equilibrio. Diagrammando il prodotto $\varphi(t) = x(t)y(t)$ si può avere un'idea di quanto velocemente accada il fenomeno.

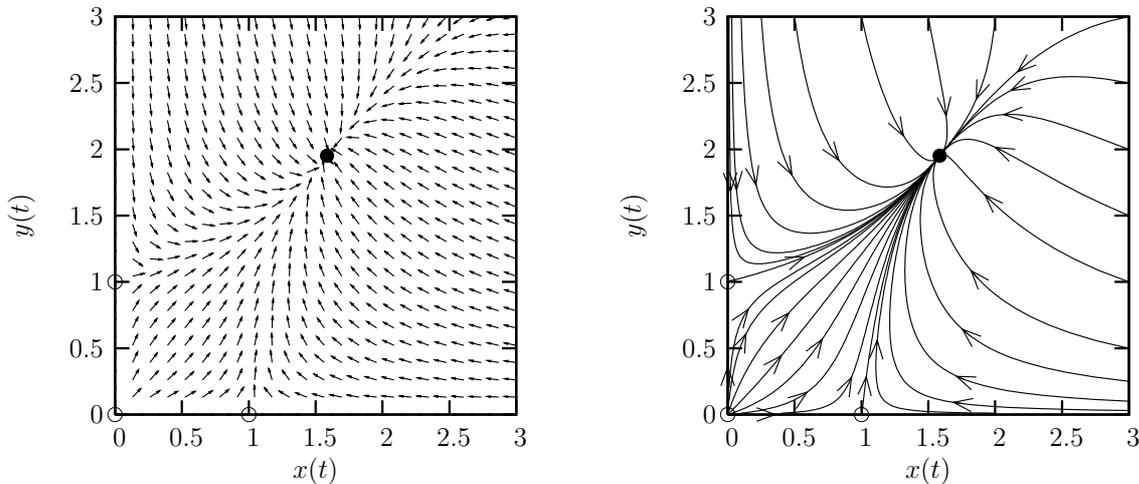


Figura 5.22: Campo di flusso (sinistra) ed alcune traiettorie (destra) relativi al sistema planare nonlineare del problema 5.43 con $a = -0.3$ e $b = -0.6$. Si osservi come che le specie non siano più competitive ma cooperative nel senso che cooperano alla sopravvivenza l'una dell'altra. Essendo $a \neq b$ non c'è simmetria rispetto alla retta $y = x$. Dal punto di vista biologico entrambe le specie raggiungono un valore asintotico non nullo purché non partano da punti di equilibrio

Caso $-1 < a < 0$ e $-1 < b < 0$. Il sistema è cooperativo, nel senso che le due specie anziché contrastarsi vicendevolmente, cooperano alla sopravvivenza l'una dell'altra. In particolare, l'origine è sempre una stella instabile, $(0, 1)$ e $(1, 0)$ sono due punti di sella (quindi instabili), mentre il punto $(\frac{a-1}{ab-1}, \frac{b-1}{ab-1})$ è l'unico stabile ed attrae tutte le traiettorie (purché non partano dagli altri punti di equilibrio), come si vede in figura 5.22. Essendo $a \neq b$ si osserva la perdita di simmetria rispetto alla retta $y = x$.

Caso $a = b = -1$. Il punto $(\frac{a-1}{ab-1}, \frac{b-1}{ab-1})$ non esiste e gli altri punti di equilibrio sono tutti instabili (come nel caso precedente). Pertanto, entrambe le soluzioni crescono indefinitamente indipendentemente dalla condizione iniziale (il sistema è cooperativo), come chiaramente provato dalla figura 5.23.

Caso $a < -1$ e $b < -1$. Il punto $(\frac{a-1}{ab-1}, \frac{b-1}{ab-1})$ si trova nel terzo quadrante e quindi non viene considerato. L'origine, $(0, 1)$ e $(1, 0)$ sono instabili e quindi entrambe le soluzioni crescono indefinitamente in tempi molto brevi, come nel caso precedente. ■

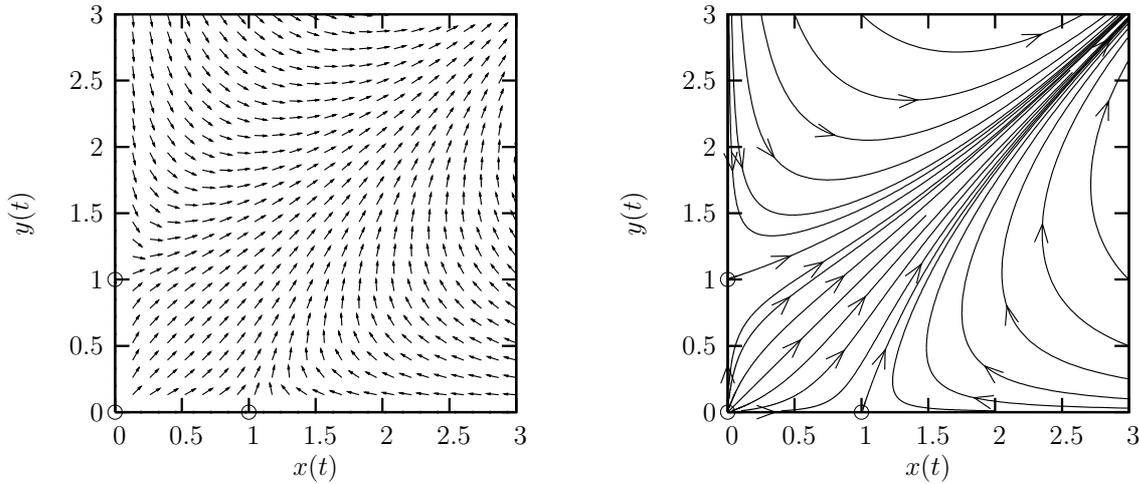


Figura 5.23: Campo di flusso (sinistra) ed alcune traiettorie (destra) relativi al sistema planare nonlineare del problema 5.43 con $a = b = -1$. Le soluzioni crescono indefinitamente indipendentemente dalla condizione iniziale essendo il sistema cooperativo e tutti gli equilibri instabili. Si osservi che il punto $(\frac{a-1}{ab-1}, \frac{b-1}{ab-1})$ non esiste

5.6 Modelli di esclusione competitiva tra specie

Nel seguente problema discutiamo il principio dell'esclusione competitiva che riguarda i sistemi con crescita logistica. Se a parità di competizione interspecifica una delle due specie ha un livello massimo sostenibile dall'ambiente anche solo leggermente superiore al livello sostenibile dell'altra specie, la prima necessariamente sopravvive a scapito della seconda, che si estingue.

Esercizio 5.46 [Esclusione competitiva] Studiare il comportamento del seguente sistema al variare delle condizioni iniziali, dei coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ e tali che $0 < \delta \ll \beta$

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta x^2 - \gamma xy, \\ \dot{y} = \alpha y - (\beta - \delta)y^2 - \gamma xy. \end{cases}$$

Risoluzione. Il sistema dato è un caso particolare di un sistema (5.45) con $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $a_{12} = a_{21} = -\gamma$, $a_{11} = -\beta$ e $a_{22} = -(\beta - \delta)$. Questo, in pratica, significa che le due popolazioni hanno leggi di crescita molto simili tranne che per il coefficiente intraspecifico, che varia leggermente. I punti di equilibrio sono

$$(0, 0), \quad (\alpha/\beta, 0), \quad (0, \alpha/(\beta - \delta)), \quad \left(\frac{\alpha(\beta - \delta - \gamma)}{\beta^2 - \beta\delta - \gamma^2}, \frac{\alpha(\beta - \gamma)}{\beta^2 - \beta\delta - \gamma^2} \right).$$

La matrice Jacobiana fornisce, per ciascuno di essi, le condizioni di stabilità. Lasciamo al lettore lo studio dei punti $(0, 0)$, $(\alpha/\beta, 0)$ e $(0, \alpha/(\beta - \delta))$, mentre qui ci concentriamo sull'equilibrio non banale, che denotiamo con $(x_{\text{eq}}, y_{\text{eq}})$. Il calcolo agli autovalori per $J(x_{\text{eq}}, y_{\text{eq}})$ dà

$$\lambda_1 = -\alpha, \quad \lambda_2 = -\alpha \frac{(\beta - \gamma)(\beta - \delta - \gamma)}{\beta^2 - \beta\delta - \gamma^2}.$$

L'autovalore è sempre $\lambda_1 < 0$ ($\alpha > 0$), mentre il segno del secondo autovalore dipende dai parametri scelti. Va inoltre sottolineato che ha senso parlare della stabilità di $(x_{\text{eq}}, y_{\text{eq}})$ solo nel

caso in cui sia x_{eq} che y_{eq} siano positive, i.e. per

$$\beta - \delta - \gamma > 0, \quad \beta^2 - \beta\delta - \gamma^2 > 0, \quad \beta - \gamma > 0,$$

oppure

$$\beta - \delta - \gamma < 0, \quad \beta^2 - \beta\delta - \gamma^2 < 0, \quad \beta - \gamma < 0.$$

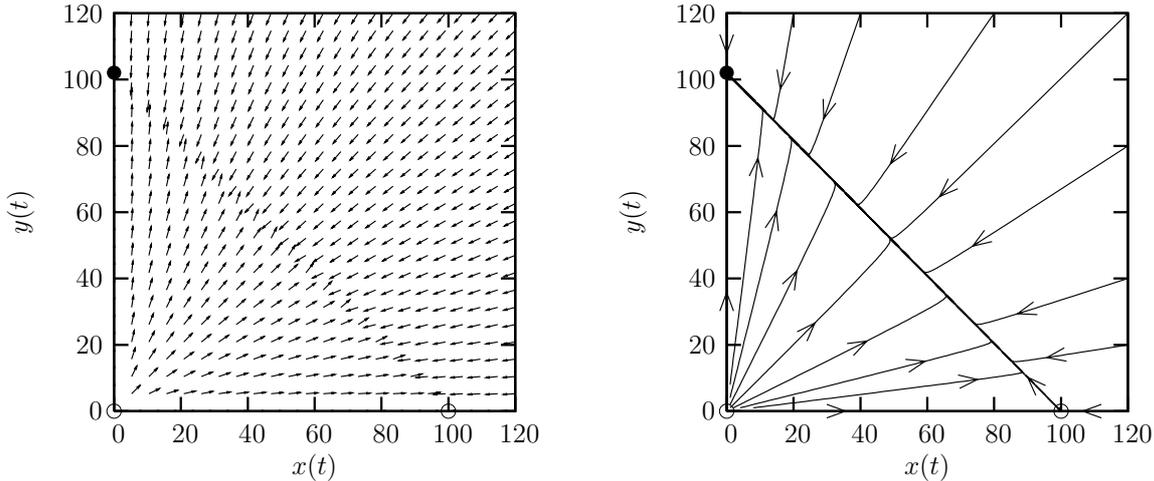


Figura 5.24: Campo di flusso (sinistra) ed alcune traiettorie (destra) relativi al sistema planare nonlineare del problema 5.46 per $\alpha = 10, \beta = 0.1, \gamma = 0.099, \delta = 0.002$. Si osservi la presenza di un solo punto di equilibrio stabile sull'asse y , ovvero la specie meglio adattata sopravvive mentre l'altra è destinata all'estinzione indipendentemente dalla condizione iniziale

In figura 5.24 sono riportati il campo di flusso e il ritratto di fase per il caso $\alpha = 10, \beta = 0.1, \gamma = 0.099, \delta = 0.002$. Come si può notare i punti di equilibrio sono tre in quanto l'equilibrio non banale $(x_{\text{eq}}, y_{\text{eq}})$ si trova nel terzo quadrante. L'unico stabile è il punto sull'asse y per cui, indipendentemente dalla condizione iniziale, la soluzione si porta su questo stato di equilibrio che prevede l'estinzione della popolazione x e la sopravvivenza della specie y . Questo succede perché, pur essendo le due leggi di crescita molto simili, la popolazione x ha un coefficiente di competizione intraspecifico leggermente maggiore dell'altra, i.e. risulta meglio adattata all'ambiente. In figura 5.25 viene riportato il caso $\alpha = 10, \beta = 0.1, \gamma = 0.097, \delta = 0.002$ per il quale i punti di equilibrio sono quattro, dei quali l'unico stabile è il nuovo comparso (quello non banale $(x_{\text{eq}}, y_{\text{eq}})$). Pertanto, indipendentemente dalla condizione iniziale, questa volta entrambe le specie raggiungono un valore asintotico non nullo.

La figura 5.26 mostra, per $\alpha = 10, \beta = 0.1, \gamma = 0.099, \delta = 0.002$, le due soluzioni in funzione del tempo per diverse condizioni iniziali. Si noti che, pur partendo dalla condizione iniziale $(x_0, y_0) = (120, 1)$ vicina al punto di equilibrio dove la specie x sopravvive e la specie y si estingue, la specie x si estingue e sopravvive solo la y . Si noti che, per questa scelta dei parametri, $\beta - \delta = 0.098 < \gamma$. In figura 5.27 viene riportato il caso $\alpha = 10, \beta = 0.1, \gamma = 0.097, \delta = 0.002$ per le stesse condizioni iniziali $(x_0, y_0) = (10, 10)$ (sinistra) e $(x_0, y_0) = (120, 1)$ (destra). A differenza del caso precedente, entrambe le specie raggiungono un valore asintotico non nullo. ■

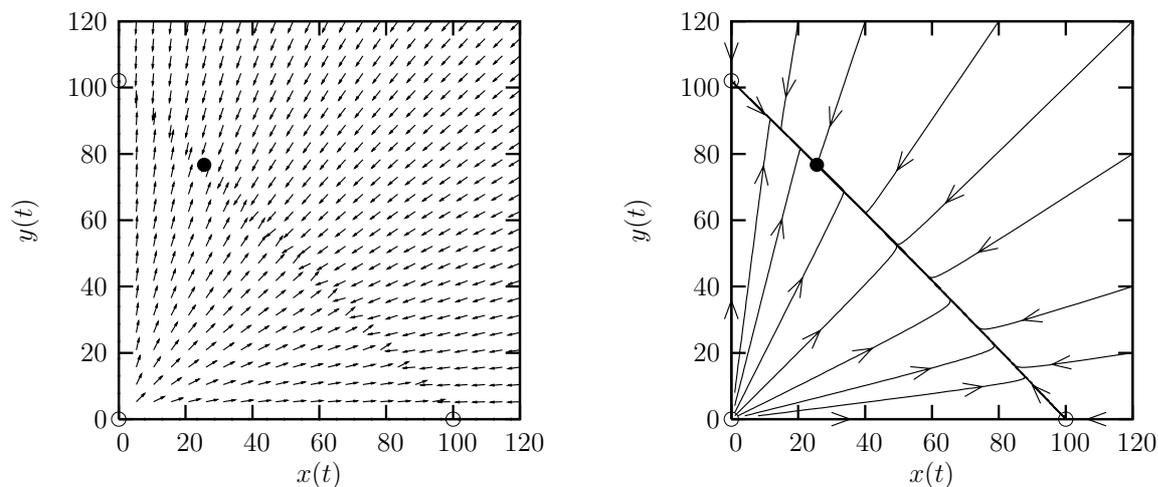


Figura 5.25: Campo di flusso (sinistra) ed alcune traiettorie (destra) relativi al sistema planare nonlineare del problema 5.46 per $\alpha = 10, \beta = 0.1, \gamma = 0.097, \delta = 0.002$. Si osservi la presenza di un solo punto di equilibrio stabile (equilibrio non banale) caratterizzato da $x \neq 0$ e $y \neq 0$. In questo caso entrambe le specie raggiungono un valore asintotico non nullo indipendentemente dalla condizione iniziale

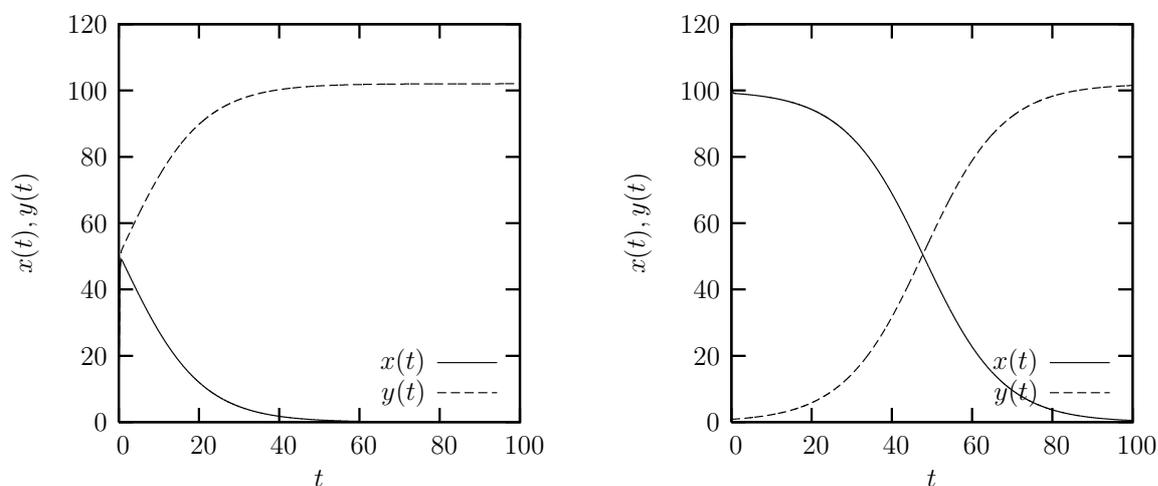


Figura 5.26: Andamento delle soluzioni relative al sistema planare nonlineare del problema 5.46 per due diverse condizioni iniziali con $\alpha = 10, \beta = 0.1, \gamma = 0.099, \delta = 0.002$. $(x_0, y_0) = (10, 10)$ (sinistra) e $(x_0, y_0) = (120, 1)$ (destra). Nonostante le due specie siano inizialmente uguali (sinistra) o la specie x avvantaggiata (destra), la specie x è destinata all'estinzione. I valori asintotici vengono raggiunti in tempi diversi dipendentemente dalla condizione iniziale

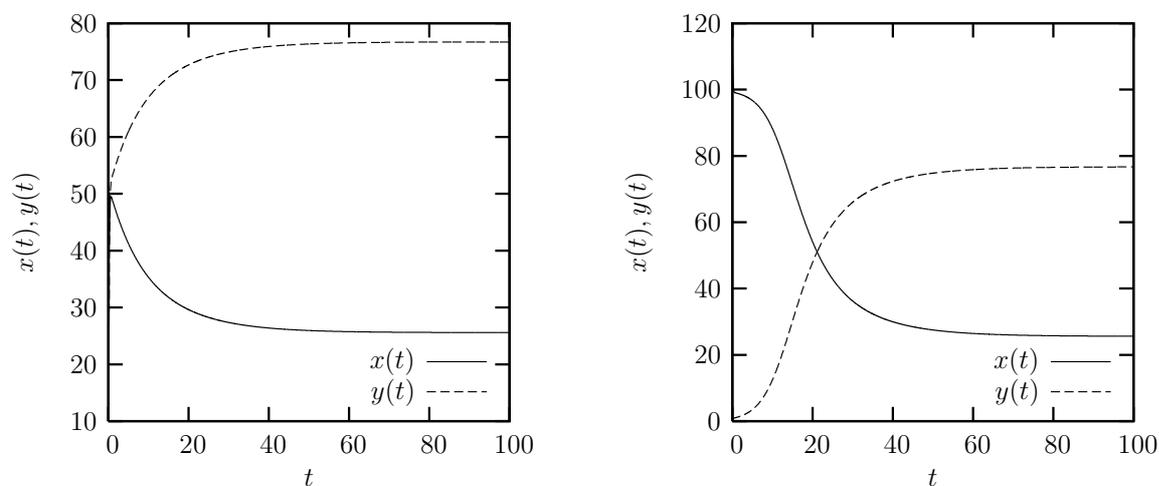


Figura 5.27: Andamento delle soluzioni relative al sistema planare nonlineare del problema 5.46 per due diverse condizioni iniziali con $\alpha = 10, \beta = 0.1, \gamma = 0.097, \delta = 0.002$. $(x_0, y_0) = (10, 10)$ (sinistra) e $(x_0, y_0) = (120, 1)$ (destra). A differenza del caso precedente, sia che le due specie siano inizialmente uguali (sinistra) sia che la specie x sia avvantaggiata (destra), entrambe le specie raggiungono un valore asintotico non nullo. Questi valori vengono raggiunti in tempi diversi dipendentemente dalla condizione iniziale

5.7 Problemi di fine capitolo 5

Esercizio 5.47 *Tracciare il ritratto di fase globale per il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - 3x - 2y) \\ \dot{y} = y(-3 + 9x). \end{cases}$$

(Soluzione a pagina 95)

Capitolo 6

Preparazione all'esame

6.1 Problemi da portare risolti all'orale

I seguenti problemi costituiranno argomento del colloquio d'esame e lo studente dovrà dimostrare dimestichezza con l'utilizzo del codice scritto per la loro risoluzione numerica.

Problema 6.1 *Scrivere una funzione Matlab/Octave del tipo `logistica.m` che calcoli la successione*

$$x_{k+1} = Ax_k(1 - x_k)$$

dati la costante A , il dato iniziale x_1 , ed il numero di iterazioni N . La funzione deve produrre due figure come quelle della figura 1.1: una che mostra la serie temporale x_k in funzione di k , l'altra che mostra graficamente il cobwebbing.

Problema 6.2 *Utilizzando la funzione Matlab/Octave ottenuta dalla soluzione del problema 6.1, riprodurre le figure 1.5 e 1.6.*

Problema 6.3 *Approntare uno script Matlab/Octave per risolvere il modello discreto ospite-parassita di Nicholson-Bailey descritto dal sistema (2.8) e riprodurre le figure 2.2-2.4.*

Problema 6.4 *Approntare uno script Matlab/Octave per risolvere il modello discreto predatore-predatore di Lotka-Volterra descritto dal sistema (2.12) e riprodurre le figure 2.5-2.8.*

Problema 6.5 *Approntare uno script Matlab/Octave per risolvere il modello logistico continuo descritto dall'equazione (3.10) e riprodurre la figura 3.1. (Suggerimento: utilizzare, per esempio, `lsode` in Octave o `ode45` in Matlab)*

Problema 6.6 *Approntare uno script Matlab/Octave per risolvere il generico problema linere continuo di due equazioni in due incognite*

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy. \end{cases}$$

Utilizzando questo script riprodurre le figure 4.8.

Problema 6.7 *Approntare uno script Matlab/Octave per risolvere il problema 5.40 e riprodurre le figure 5.10-5.11.*

Problema 6.8 *Approntare uno script Matlab/Octave per risolvere il problema*

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha_1 x + a_{11}x^2 + a_{12}xy, \\ \dot{y} = \alpha_2 y + a_{21}xy + a_{22}y^2, \end{cases}$$

al variare dei coefficienti, tutti reali. L'output deve comprendere: il calcolo numerico dei punti di equilibrio, il campo di flusso numerico, la/le traiettoria/e ottenuta/e partendo dalle condizioni iniziali fornite dall'utente.

Capitolo 7

Soluzioni esercizi di fine capitolo

7.1 Soluzione degli esercizi di fine capitolo 1

Esercizio 1.35. Risoluzione. Si osservi che

$$x_{k+1} = 4 \int_0^{x_k} \frac{e^{2\tau}}{(e^{2\tau} + 1)^2} = 1 - \frac{2}{e^{2x_k} + 1},$$

pertanto $f(x) = 1 - 2/(e^{2x} + 1)$. Essa è una funzione sempre crescente che ha come unico punto

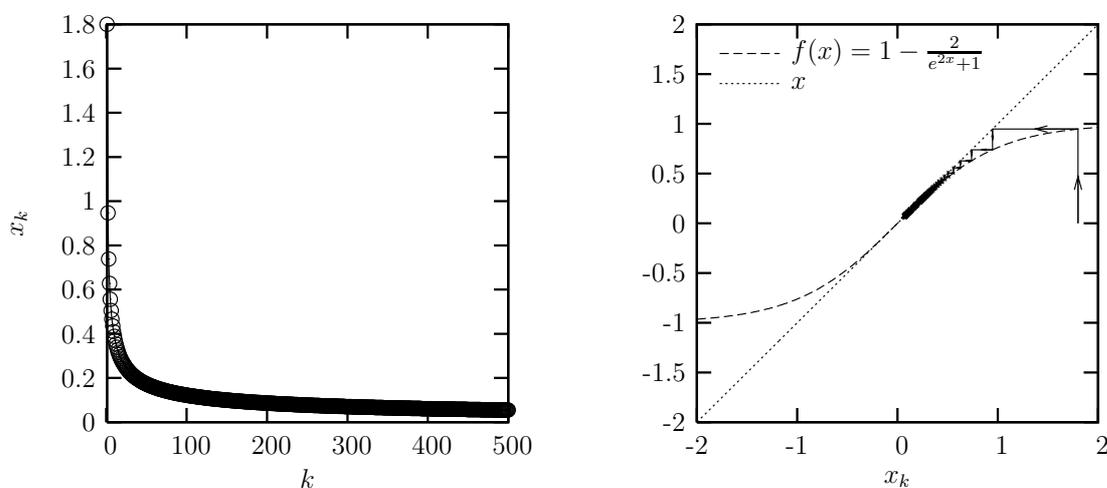


Figura 7.1: Storia temporale x_k e studio dei punti di equilibrio per il problema 1.35, $N = 500$ e $x_0 = 1.8$

di equilibrio $x = 0$, dove la sua derivata prima $f'(x) = 4e^{2x}/(e^{2x} + 1)^2$ vale $f'(0) = 1$. Pertanto è necessario l'uso delle derivate successive. Essendo

$$f''(x) = -\frac{8(e^x - 1)(e^x + 1)e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^3}$$

e quindi $f''(0) = 0$ e

$$f'''(x) = \frac{16e^{2x}(e^{4x} - 4e^{2x} + 1)}{(e^{2x} + 1)^4}$$

e quindi $f'''(0) = -2 < 0$, l'origine è un punto localmente asintoticamente stabile. Alternativamente, si osservi che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi la funzione è sempre crescente. Pertanto, per il teorema 1.22, anche la successione è monotona. In particolare, partendo da $x_0 > 0$ si ha $x_1 < x_0$ e quindi la successione è decrescente e converge a 0; partendo da $x_0 < 0$ si ha $x_1 > x_0$ e quindi la successione è crescente e converge a 0; partendo da $x_0 = 0$, x_n rimane tale. In figura 7.1 è riportato un esempio per $N = 500$ e $x_0 = 1.8$. ■

Esercizio 1.36. Risoluzione.

(a) Gli equilibri soddisfano $x^2 + x - \alpha = 0$, per cui $x_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\alpha}}{2}$ (sempre reali, essendo $\alpha > 0$). Si ha $f'(x) = -2x$, per cui

$$f'(x_+) = 1 - \sqrt{1+4\alpha} < 0, \quad f'(x_-) = 1 + \sqrt{1+4\alpha} > 1.$$

Ne segue che x_- risulta sempre instabile, mentre x_+ risulta localmente asintoticamente stabile se $f'(x_+) > -1$, ossia $\sqrt{1+4\alpha} < 2$. Pertanto x_+ è localmente asintoticamente stabile se $\alpha < \frac{3}{4}$ e instabile se $\alpha > \frac{3}{4}$. Se $\alpha = \frac{3}{4}$, si ha $f'(x_+) = -1$. Essendo $f''(x_+) = -2$ e $f'''(x_+) = 0$, si ha $2f'''(x_+) + 3(f''(x_+))^2 > 0$, per cui x_+ è localmente asintoticamente stabile.

(b) Il diagramma di biforcazione degli equilibri è riportato in figura 7.2.

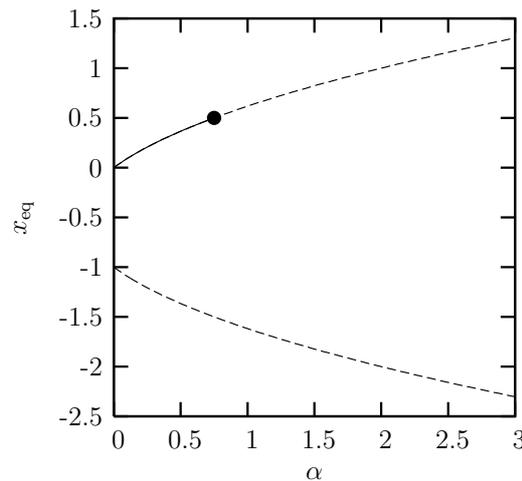


Figura 7.2: Diagramma delle biforcazioni degli equilibri per l'equazione ad un passo $x_{k+1} = \alpha - x_k^2$ (problema 1.36), equilibri stabili in linea continua o pallino pieno, equilibri instabili in linea tratteggiata

(c) Per quanto riguarda l'esistenza di 2-cicli per opportuni valori di α , si ha

$$f^2(x) = \alpha - (\alpha - x^2)^2 = \alpha - \alpha^2 + 2\alpha x^2 - x^4$$

per cui $f^2(x) = x$ se e solo se $x^4 - 2\alpha x^2 + x + \alpha^2 - \alpha = 0$. Utilizzando Ruffini tenendo conto delle soluzioni di $f(x) = x$ si decompone il polinomio come $(x^2 + x - \alpha)(x^2 - x + 1 - \alpha) = 0$, per cui i punti fissi della mappa iterata che non sono punti fissi della mappa f sono

$$y_+ = \frac{1 + \sqrt{4\alpha - 3}}{2}, \quad y_- = \frac{1 - \sqrt{4\alpha - 3}}{2},$$

definite per $\alpha > \frac{3}{4}$. Si osservi inoltre che

$$|f'(y_+)f'(y_-)| = 4|1 - \alpha| < 1$$

se e solo se $\frac{3}{4} < \alpha < \frac{5}{4}$, per cui per tali valori il due ciclo $\mathcal{O}_2 = \{y_+, y_-\}$ è stabile.

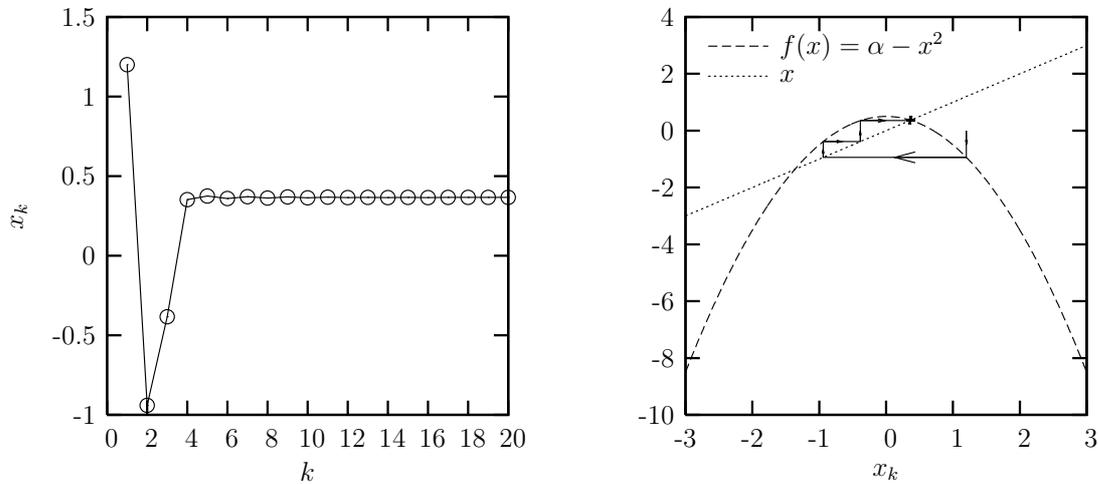


Figura 7.3: Storia temporale x_k e studio dei punti di equilibrio (problema 1.36), $N = 20$, $\alpha = 0.5$, $x_0 = 1.2$. Si noti la stabilità della soluzione x_-

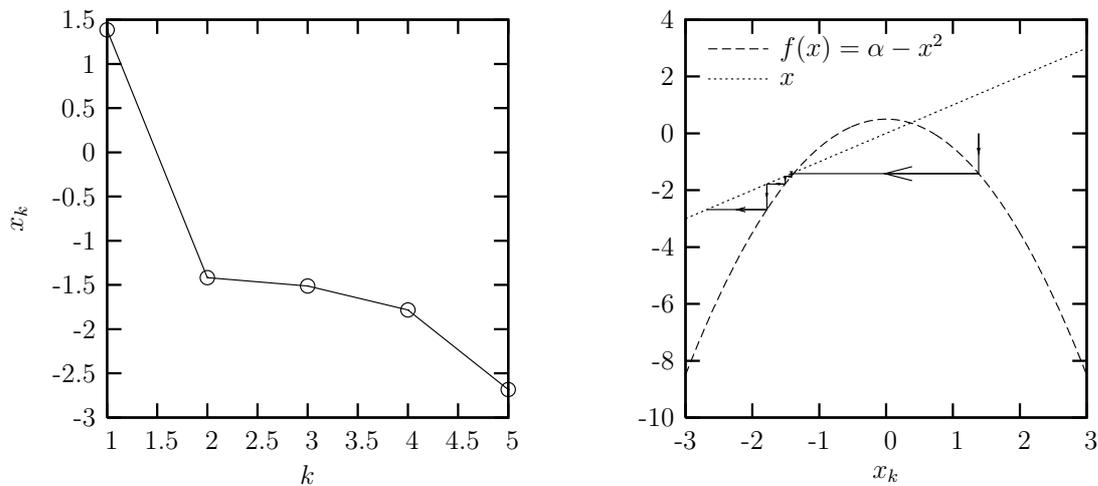


Figura 7.4: Storia temporale x_k e studio dei punti di equilibrio (problema 1.36), $N = 5$, $\alpha = 0.5$, $x_0 = 1.385$. Si noti l'instabilità della soluzione x_+

Nelle figure 7.3 e 7.4 si notano, per $\alpha = 1/2$, rispettivamente la stabilità della soluzione x_- e l'instabilità della soluzione x_+ . In figura 7.5 si osserva, per $\alpha = 2$, l'instabilità di entrambe le soluzioni x_{\pm} , mentre in figura 7.6, per $\alpha = 1.0$, si riscontra la presenza del 2-ciclo stabile $\mathcal{O}_2\{0, 1\}$. ■

Esercizio 1.37. Risoluzione. Rispondiamo punto per punto.

1. Si fissi $A = 4 + \varepsilon$ (per esempio $A = 4.001$) e si facciano diverse prove al variare di N e x_0 .
2. Fare diverse prove al variare di $A \in]0, 1[$ e $x_0 \in]0, 1[$.

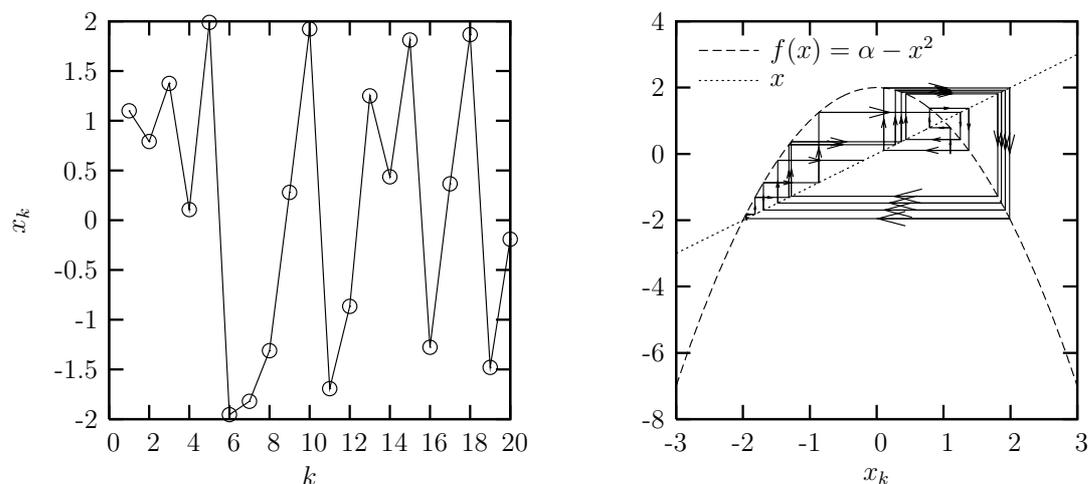


Figura 7.5: Storia temporale x_k e studio dei punti di equilibrio (problema 1.36), $N = 20$, $\alpha = 2.0$, $x_0 = 1.1$. Si noti l'instabilità di entrambe le soluzioni x_{\pm}

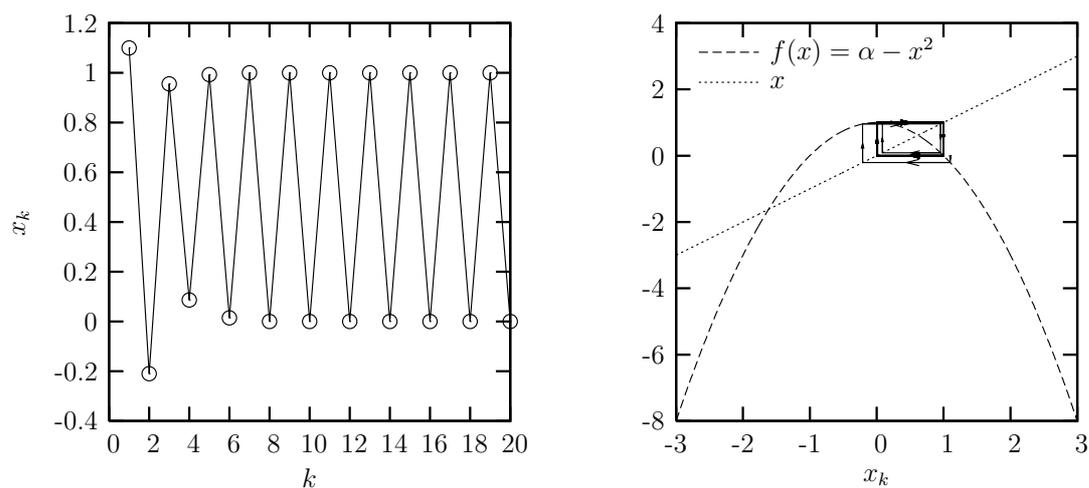


Figura 7.6: Storia temporale x_k e studio dei punti di equilibrio (problema 1.36), $N = 20$, $\alpha = 1.0$, $x_0 = 1.1$. Si noti la presenza di un 2-ciclo stabile $\mathcal{O}_2\{0, 1\}$

3. Scegliere diversi valori di $A \in]1, 3[$ e $x_0 \in]0, 1[$, verificando che si converge sempre al numero $1 - 1/A$.
4. Facile.
5. Si dovrebbe vedere la successione oscillare prima tra 2 valori e poi tra 4.
6. Per $A = 3.4121$ si notano 4 valori diversi, per $A = 3.4120$ solo 2. Quindi $A = 3.4121$.
7. Per $A = 3.6$ si nota una regione limitata visitata dalla soluzione (figura 7.7), per $A = 4.0$ praticamente x_k assume tutti i valori possibili (figura 7.8).
8. Si dovrebbero ottenere rispettivamente una soluzione periodica di periodo 3 e una di periodo 6. Si vedano le figure 7.9 e 7.10.

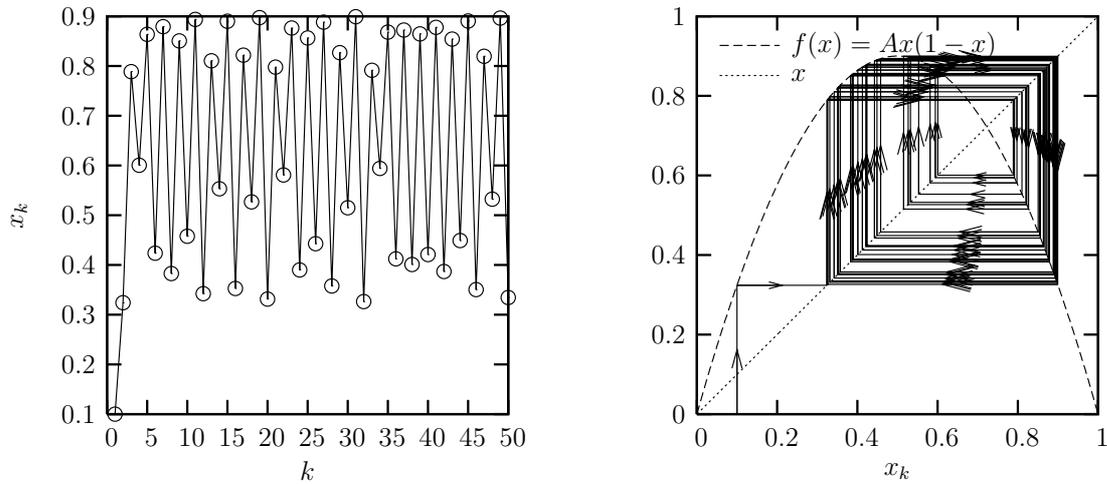


Figura 7.7: Storia temporale x_k e studio dei punti di equilibrio per l'equazione logistica $x_{k+1} = Ax_k(1 - x_k)$, $N = 50$, $A = 3.6$, $x_0 = 0.1$. Si noti la presenza di una regione limitata visitata dalla soluzione

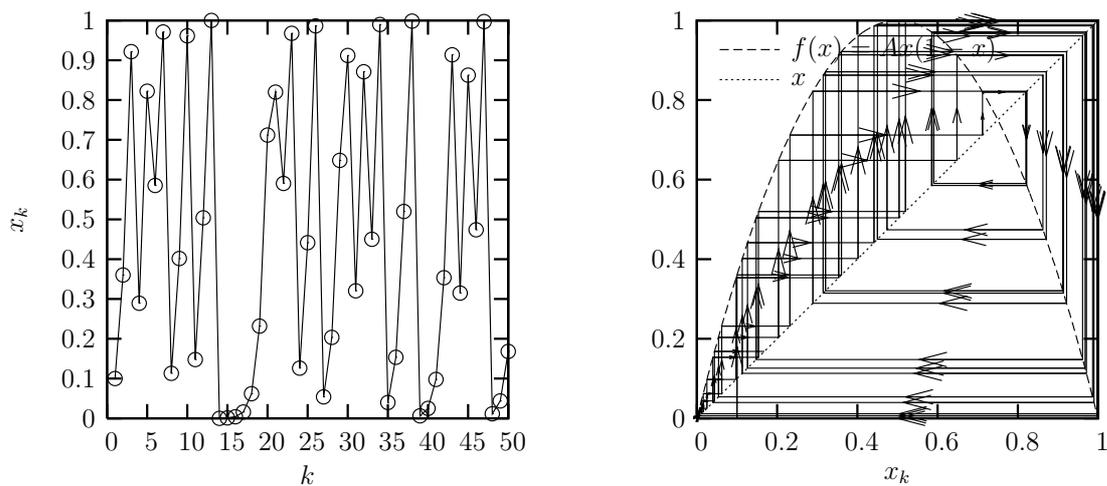


Figura 7.8: Storia temporale x_k e studio dei punti di equilibrio per l'equazione logistica $x_{k+1} = Ax_k(1 - x_k)$, $N = 50$, $A = 4.0$, $x_0 = 0.1$. Si noti che, praticamente, x_k assume tutti i valori possibili

Lo svolgimento è completo. ■

7.2 Soluzione degli esercizi di fine capitolo 2

Esercizio 2.13. Risoluzione. Partendo da dati iniziali positivi (essendo popolazioni), si verifica facilmente che $x_k > 0$ e $y_k > 0$ per ogni $k \geq 1$. Inoltre si ha $x_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ se $\alpha_1 < 1$ e $y_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ se $\alpha_2 < 1$ (si noti che, formalmente, $(0, 0)$ non è un punto di equilibrio del sistema, non essendo definite nell'origine le funzioni che definiscono il sistema).

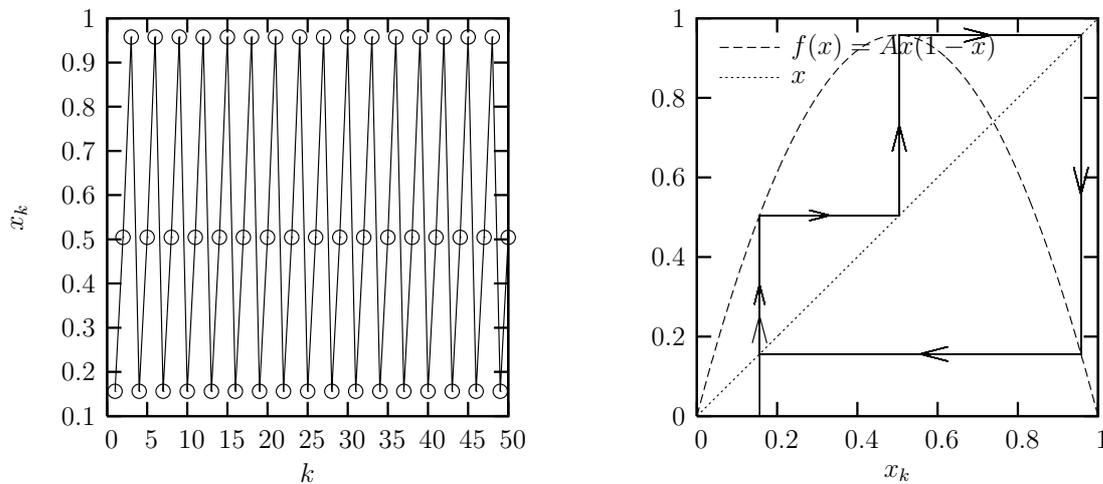


Figura 7.9: Storia temporale x_k e studio dei punti di equilibrio per l'equazione logistica $x_{k+1} = Ax_k(1 - x_k)$, $N = 50$, $A = 3.83$, $x_0 = 0.15615$. Si noti la presenza di un'orbita di periodo 3

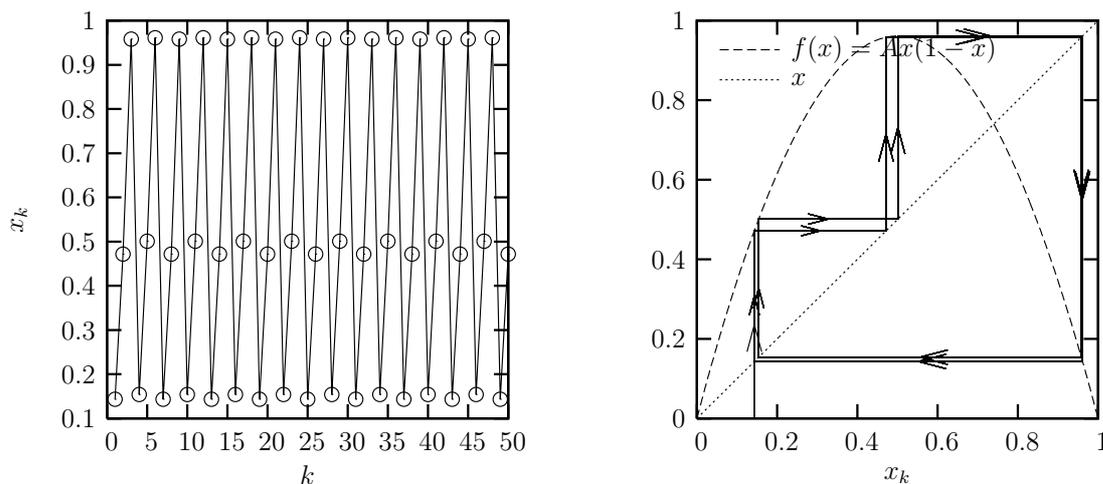


Figura 7.10: Storia temporale x_k e studio dei punti di equilibrio per l'equazione logistica $x_{k+1} = Ax_k(1 - x_k)$, $N = 50$, $A = 3.845$, $x_0 = 0.14323$. Si noti la presenza di un'orbita di periodo 6

Supponiamo allora che $\alpha_i > 1$ per $i = 1, 2$. L'unico punto di equilibrio del sistema è

$$\left(\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2 - 1}, \alpha_1 - 1 \right), \quad \alpha_2 \neq 1,$$

con entrambe le componenti positive (quindi con possibile significato biologico). La matrice Jacobiana del sistema è data da

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{1+y} & -\frac{\alpha_1 x}{(1+y)^2} \\ \frac{\alpha_2 y^2}{(x+y)^2} & \frac{\alpha_2 x^2}{(x+y)^2} \end{bmatrix},$$

da cui si ricava che

$$J\left(\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2 - 1}, \alpha_1 - 1\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1(\alpha_2 - 1)} \\ \frac{(\alpha_2 - 1)^2}{\alpha_2} & \frac{1}{\alpha_2} \end{bmatrix}.$$

Pertanto, la condizione di Jury per il sistema diviene

$$\left|1 + \frac{1}{\alpha_2}\right| < 1 + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)}{\alpha_1 \alpha_2} < 2.$$

La prima disuguaglianza è automaticamente verificata essendo sia α_1 che α_2 maggiori di

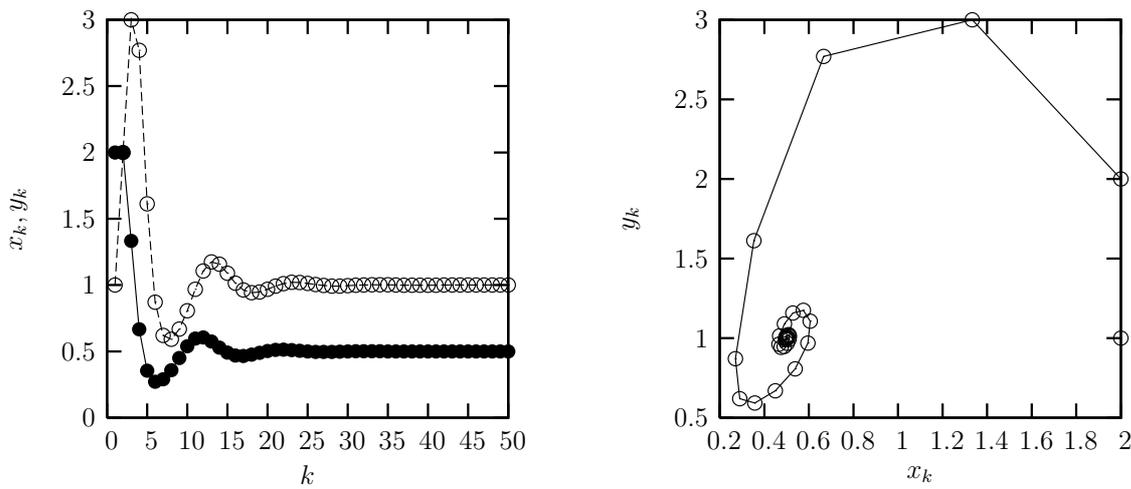


Figura 7.11: Storia temporale di x_k (linea continua, pallini pieni) e y_k (linea tratteggiata, pallini vuoti), ed evoluzione dell'orbita nel piano delle fasi (x_k, y_k) per il sistema (2.14), $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $(x_0, y_0) = (2, 1)$, $N = 50$. Si noti la natura stabile del punto di equilibrio non banale $((\alpha_1 - 1)/(\alpha_2 - 1), \alpha_1 - 1)$

zero, mentre con qualche calcolo si vede che la seconda equivale proprio a $\alpha_2 > 1$. L'equilibrio non banale è, quindi, localmente asintoticamente stabile. In figura 7.11 è riportata l'orbita convergente al punto di equilibrio (destra) e la storia delle singole componenti (sinistra) nel caso $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = 3$. In figura 7.12 si osserva, per $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 3$ (si noti che in queste condizioni l'equilibrio non banale $((\alpha_1 - 1)/(\alpha_2 - 1), \alpha_1 - 1)$ non ha significato fisico) che la soluzione tende all'origine (estinzione di entrambe le specie). Infine, in figura 7.13 si nota nuovamente l'estinzione di entrambe le specie quando entrambi i parametri sono minori di 1, $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.3$. ■

7.3 Soluzione degli esercizi di fine capitolo 3

Esercizio 3.14. Risoluzione. Le soluzioni stazionarie sono $x(t) = 0$, $x(t) = 1$ e $x(t) = 1/2$, siccome $f(x) = (-2x^3 + 3x^2 - x)/2$ è di classe C^1 , allora è applicabile il Teorema di esistenza e unicità locale 3.2 che assicura che le soluzioni non possono intersecarsi. Si scopre che le soluzioni collasano su $x = 0$ se $\alpha < 1/2$, mentre collasano su $x = 1$ per $\alpha > 1/2$. Integrando si ottiene

$$\int_{\alpha}^{x(t)} \frac{2}{-2x^3 + 3x^2 - x} dx = \int_0^t dt \implies \left[\ln \frac{|x(x-1)|}{(2x-1)^2} \right]_{\alpha}^{x(t)} = -\frac{t}{2} \implies \frac{x(x-1)}{(2x-1)^2} = Ae^{-t/2},$$

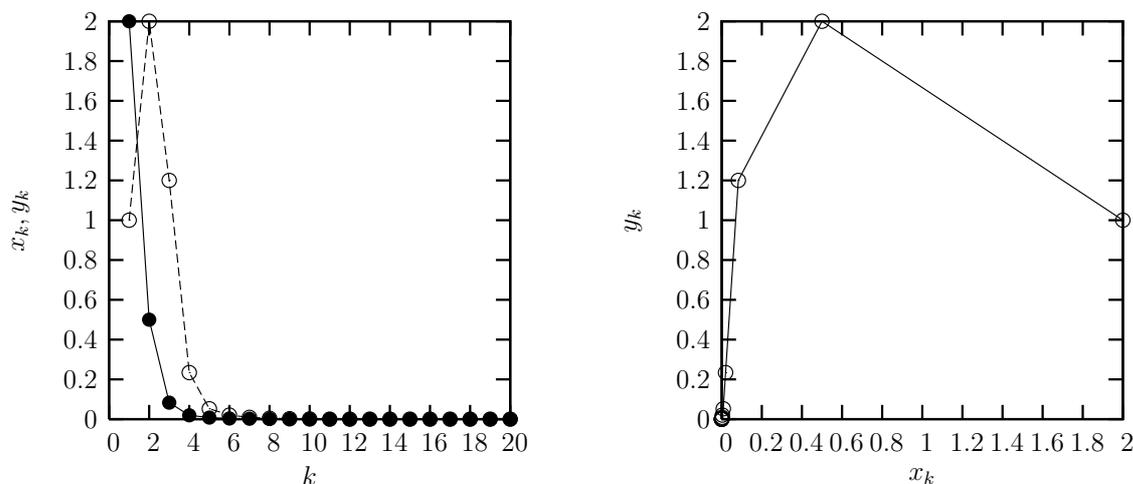


Figura 7.12: Storia temporale di x_k (linea continua, pallini pieni) e y_k (linea tratteggiata, pallini vuoti), ed evoluzione dell'orbita nel piano delle fasi (x_k, y_k) per il sistema (2.14), $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 3$, $(x_0, y_0) = (2, 1)$, $N = 20$. Si noti la natura attrattiva dell'origine, che non è un punto di equilibrio, e l'assenza dell'equilibrio non banale $((\alpha_1 - 1)/(\alpha_2 - 1), \alpha_1 - 1)$, che non ha significato fisico

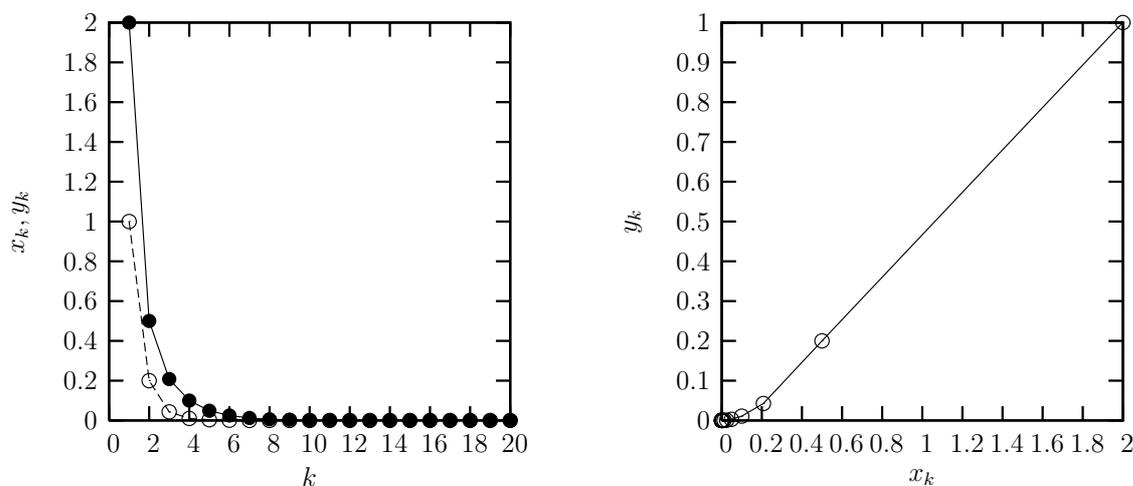


Figura 7.13: Storia temporale di x_k (linea continua, pallini pieni) e y_k (linea tratteggiata, pallini vuoti), ed evoluzione dell'orbita nel piano delle fasi (x_k, y_k) per il sistema (2.14), $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.3$, $(x_0, y_0) = (2, 1)$, $N = 20$. Si noti la natura attrattiva dell'origine, che non è un punto di equilibrio, e l'assenza dell'equilibrio non banale $((\alpha_1 - 1)/(\alpha_2 - 1), \alpha_1 - 1)$, che non ha significato fisico

con $A = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{(2\alpha - 1)^2}$ ($A < 1/4 \forall \alpha \neq 1/2$), da cui $x(t) = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 - 4Ae^{-t/2}}} \right]$, ossia

$$x(t) = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\alpha(\alpha-1)}{(2\alpha-1)^2} e^{-t/2}}} \right], \quad \begin{cases} '+' & \text{se } \alpha > \frac{1}{2} \\ '-' & \text{se } \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

■

Esercizio 3.15. Risoluzione. Le soluzioni stazionarie sono $x(t) = \pm 1$, siccome $f(x) = (x^2 - 1)/2$ è di classe C^1 , allora è applicabile il Teorema di esistenza e unicità locale 3.2 che assicura che le soluzioni non possono intersecarsi. Si scopre che le soluzioni collassano, per $t \rightarrow \infty$ su $x = -1$ se $\alpha < 1$, mentre esplodono a $+\infty$ se $\alpha > 1$. Integrando si ottiene

$$\int_{\alpha}^{x(t)} \frac{1}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^t dt \implies \frac{1}{2} \left[\ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right]_{\alpha}^{x(t)} = -\frac{t}{2} \implies \frac{x+1}{x-1} = Ae^{-t}, A = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}.$$

Risolvendo per x si ottiene

$$x(t) = \frac{Ae^{-t} + 1}{Ae^{-t} - 1} = \frac{(1+\alpha)e^{-t} + (\alpha-1)}{(1+\alpha)e^{-t} - (\alpha-1)}$$

■

Esercizio 3.16. Risoluzione. La funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$, è di classe C^1 , per cui, per il teorema 3.2, il problema ammette un'unica soluzione locale, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Le soluzioni stazionarie dell'equazione devono soddisfare

$$x^3 - x = 0,$$

per cui $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$ sono le uniche soluzioni stazionarie. Nel caso in cui α sia uguale a $-1, 0, 1$ queste sono rispettivamente le soluzioni del problema di Cauchy dato. Conviene quindi distinguere quattro casi:

$$\alpha > 1, \quad 0 < \alpha < 1, \quad -1 < \alpha < 0, \quad \alpha < -1.$$

Caso $\alpha > 1$. Essendo $x = 1$ una soluzione stazionaria, in questo caso la soluzione $x(t)$ del problema rimane sopra la retta $y = 1$ nel suo intervallo massimale di definizione, che indicheremo con J_{α} , ossia

$$\forall t \in J_{\alpha} : x(t) > 1.$$

Di conseguenza, essendo

$$\forall t \in J_{\alpha} : \dot{x}(t) = x^3(t) - x(t) = x(t)(x(t) - 1)(x(t) + 1) > 0,$$

la soluzione x risulta strettamente crescente su J_{α} . In particolare, si ha

$$\forall t \in J_{\alpha} \cap]-\infty, 0]: 1 < x(t) \leq x(0) = \alpha.$$

Dal teorema 3.5 (esistenza globale) si deduce che la soluzione x risulta estendibile sul semi-asse dei numeri reali negativi, ossia

$$]-\infty, 0] \subset J_{\alpha}.$$

La domanda, ora, è la seguente: l'intervallo massimale J_{α} è limitato superiormente? La risposta è positiva. Infatti, integrando l'equazione differenziale data rispetto a t sull'intervallo $[0, t]$, risulta

$$\forall t \in J_{\alpha} \cap [0, +\infty[: t = \int_{\alpha}^{x(t)} \frac{d\tau}{\tau^3 - \tau}.$$

Si noti che, essendo $x(t) > \alpha > 1$, non sussistono problemi di integrabilità (in senso improprio) in $\tau = 1$ per l'integrale che compare a destra. Ora, se nell'intervallo $J_\alpha \cap [0, +\infty[$ la soluzione rimanesse limitata, per il teorema 3.5 (esistenza globale) la soluzione si potrebbe estendere a tutto il semiasse dei reali positivi, e quindi, in ultima analisi sarebbe definita su tutto \mathbb{R} . D'altra parte, in tale caso, la soluzione (monotona e limitata) avrebbe un asintoto orizzontale di valore $\ell > 1$, che risulta impossibile, essendo, per il teorema 3.6 (asintoto orizzontale),

$$0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x^3(t) - x(t) = \ell(\ell - 1)(\ell + 1) > 0.$$

Pertanto, deve risultare

$$\sup\{x(t) : t \in J_\alpha \cap [0, +\infty[\} = +\infty.$$

Allora esiste una successione $t_j \subset J_\alpha \cap [0, +\infty[$ tale che $x(t_j) \rightarrow +\infty$ e

$$\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_\alpha^{x(t_j)} \frac{d\tau}{\tau^3 - \tau} = \int_\alpha^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^3 - \tau}.$$

Come noto dalla teoria degli integrali impropri, la funzione $\{\tau \mapsto \frac{1}{\tau^3 - \tau}\}$ è integrabile (in senso improprio) sull'intervallo $[\alpha, +\infty[$, per cui

$$t_{\max} = \lim_{j \rightarrow \infty} t_j < +\infty.$$

La soluzione, pertanto, è definita sull'intervallo massimale $J_\alpha =]-\infty, t_{\max}[$ e

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}^-} x(t) = +\infty.$$

Nuovamente per il teorema 3.6, si verifica facilmente che la soluzione x ammette l'asintoto orizzontale $y = 1$ per $t \rightarrow -\infty$. In figura 7.14 (sinistra) sono riportate una serie di soluzioni ottenute per $\alpha > 1$, per le quali si può notare l'esplosione in tempo finito all'aumentare di α e la presenza dell'asintoto orizzontale $y = 1$ per $t \rightarrow -\infty$.

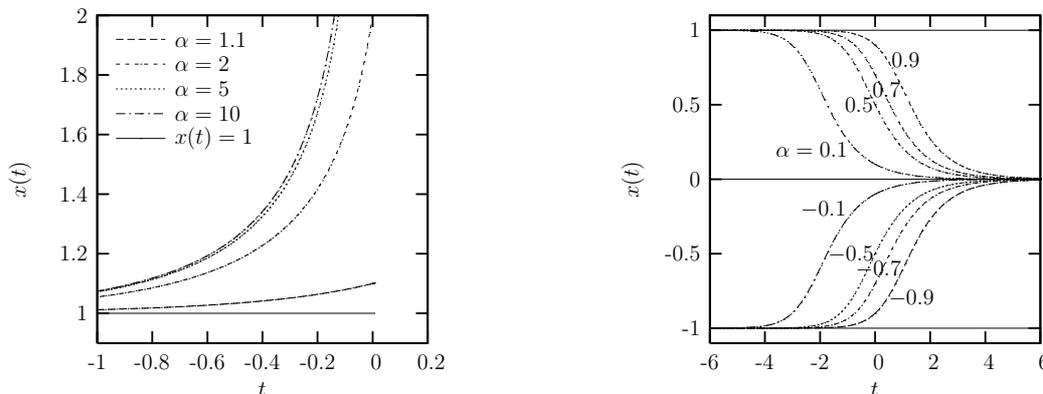


Figura 7.14: Evoluzione della soluzione del problema di Cauchy 3.17 per $\alpha > 1$ (sinistra) e $-1 < \alpha < 1$ (destra). Per $\alpha > 1$ si noti l'esplosione delle soluzioni in tempo finito al crescere di α e il collasso sull'asintoto $y = 1$ per $t \rightarrow -\infty$. Per $-1 < \alpha < 1$ si noti che le soluzioni sono definite su tutto \mathbb{R} e sono limitate tra le soluzioni stazionarie -1 e 1

Caso $0 < \alpha < 1$. Essendo $x = 0$ e $x = 1$ due soluzioni stazionarie, in questo caso la soluzione $x(t)$ del problema rimane compresa tra le rette $y = 0$ e $y = 1$ nel suo intervallo massimale J_α di definizione, i.e.

$$\forall t \in J_\alpha : 0 < x(t) < 1.$$

Di conseguenza, per il teorema di esistenza globale, deve essere $J_\alpha = \mathbb{R}$. Inoltre, essendo

$$\forall t \in J_\alpha : \dot{x}(t) = x(t)(x(t) - 1)(x(t) + 1) < 0,$$

la soluzione risulta strettamente decrescente su \mathbb{R} , quindi ammette limite sia per $t \rightarrow -\infty$ che per $t \rightarrow +\infty$. Ragionando come sopra, si vede subito che

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

In figura 7.14 (destra) sono riportate, per $-1 < \alpha < 1$, le soluzioni definite su tutto \mathbb{R} e limitate dalle soluzioni stazionarie $y = \pm 1$, che sono anche gli asintoti.

Caso $-1 < \alpha < 0$. Questo caso si tratta come il precedente, con la sola differenza che la soluzione risulta strettamente crescente e

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -1.$$

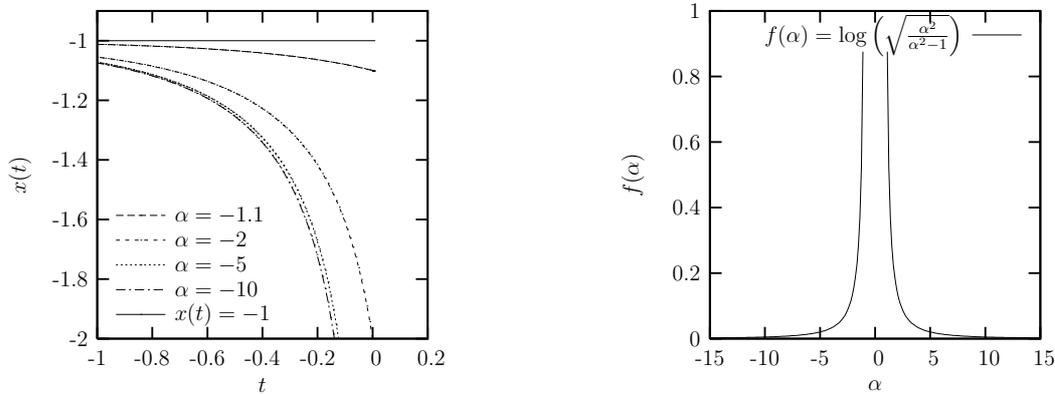


Figura 7.15: Evoluzione della soluzione del problema di Cauchy 3.17 per $\alpha < -1$ (sinistra) e andamento della funzione $f(\alpha) = \log\left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}}\right)$ (destra) che descrive l'istante di estinzione delle soluzioni al variare della condizione iniziale α . Per $\alpha < -1$ si noti l'esplosione delle soluzioni in tempo finito al diminuire di α e il collasso sull'asintoto $y = -1$ per $t \rightarrow -\infty$

Caso $\alpha < -1$. Questo caso è l'analogo del caso $\alpha > 1$; la soluzione risulta strettamente decrescente e l'intervallo massimale risulta ancora della forma $] -\infty, \tau_{\max}[$ con

$$\lim_{t \rightarrow \tau_{\max}^-} x(t) = -\infty.$$

Come per il caso $\alpha > 1$, anche nel caso $\alpha < -1$, si verifica facilmente che $y = -1$ è un asintoto orizzontale di x per $t \rightarrow -\infty$. In figura 7.15 (sinistra) è riportato l'andamento di alcune soluzioni

ottenute per $\alpha < -1$ in cui, come nel caso $\alpha > 1$, si notano l'esplosione in tempo finito l'asintoto orizzontale $y = -1$ per $t \rightarrow -\infty$.

Tempi di estinzione. Si osservi che l'equazione assegnata è a variabili separabili, quindi può essere risolta esplicitamente, calcolando esattamente i tempi di estinzione della soluzione nel caso $|\alpha| > 1$. Vediamo, a titolo di esempio, il caso $\alpha > 1$. Essendo

$$\frac{1}{x^3 - x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)},$$

integrando l'equazione su $[0, t]$, $t \geq 0$, risulta

$$\left[-\log \xi + \frac{1}{2} \log(\xi + 1) + \frac{1}{2} \log(\xi - 1) \right]_{\alpha}^{x(t)} = t,$$

da cui

$$\frac{\sqrt{x^2(t) - 1}}{x(t)} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} e^t,$$

pertanto

$$\forall t \in] -\infty, t_{\max}[: \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} e^{2t}}},$$

dove

$$t_{\max}(\alpha) = \log \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}} \right), \quad \alpha > 1.$$

Da questa espressione si vede anche come l'intervallo massimale tende ad invadere tutta la retta reale \mathbb{R} quando α tende ad 1^+ , mentre tende a $] -\infty, 0]$ quando α tende a $+\infty$. In altre parole (formalmente) potremmo scrivere

$$J_{\infty} =] -\infty, 0], \quad J_1 = \mathbb{R}.$$

Simili considerazioni si possono fare per $\alpha \rightarrow -1^-$ e per $\alpha \rightarrow -\infty$. In figura 7.15 (destra) è riportato l'andamento della curva che descrive il tempo di estinzione al variare di α . Si noti che essa è simmetrica rispetto ad $\alpha = 0$. ■

7.4 Soluzione degli esercizi di fine capitolo 4

Esercizio 4.14. Risoluzione. Dopo aver riscritto il sistema in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

determiniamo autovalori e autovettori della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix},$$

ottenendo $\lambda_1 = 2i$ e $\lambda_2 = -2i$ (autovalori complessi coniugati a parte reale nulla). Gli autovettori corrispondenti, ciascuno definito a meno di una costante arbitraria, sono $\mathbf{u}_1 =$

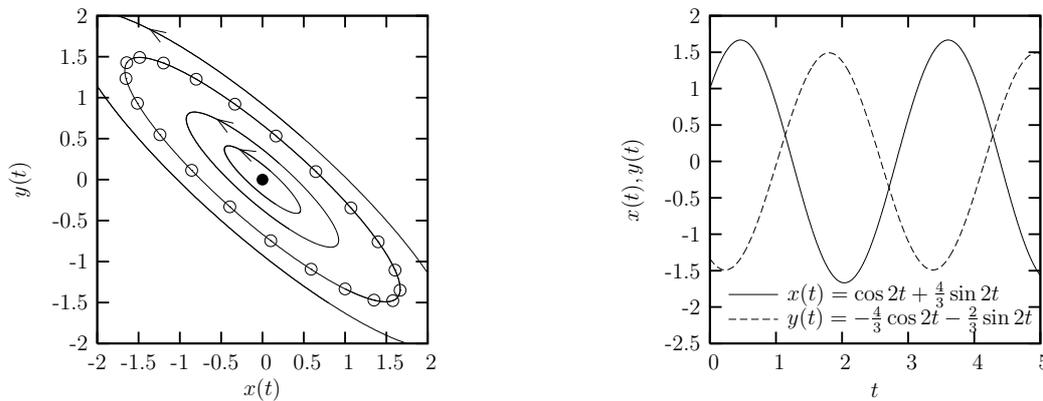


Figura 7.16: Ritratto di fase (sinistra) e soluzione analitica (destra) per $(x_0, y_0) = (1, -4/3)$ ($x(t)$ in linea continua e $y(t)$ in linea tratteggiata). Nel ritratto di fase la soluzione per $(x_0, y_0) = (1, -4/3)$ è contrassegnata da pallini vuoti

$[5k, -4k]^T + i[0, -2k]^T$ e $\mathbf{u}_2 = [5k, -4k]^T - i[0, -2k]^T$ con $k \in \mathbb{R}$; pertanto $\mathbf{u}^r = [5k, -4k]^T$ e $\mathbf{u}^i = [0, -2k]^T$. Essendo gli autovalori immaginari puri (i.e. con parte reale nulla), l'origine risulta essere un centro stabile (non asintoticamente), come mostrato in figura 7.16 (sinistra) dove è riportato il ritratto di fase. Per determinare la soluzione in forma esplicita prendiamo, per comodità, $k = 1$ ottenendo $\mathbf{u}^r = [5, -4]^T$ e $\mathbf{u}^i = [0, -2]^T$. Inoltre, essendo $\mu = 0$ e $\omega = 2$, le due soluzioni in forma esplicita sono

$$\begin{cases} x(t) = (5A \cos 2t + 5B \sin 2t) \\ y(t) = (-4A \cos 2t - 4B \sin 2t) + (-2B \cos 2t + 2A \sin 2t), \end{cases}$$

con A e B da determinarsi utilizzando le condizioni iniziali, a $t = 0$, $(x_0, y_0) = (1, -4/3)$. Così facendo si ottiene

$$\begin{cases} 1 = 5A \\ -\frac{4}{3} = -4A - 2B, \end{cases}$$

da cui $A = 1/5$ e $B = 4/15$. Le soluzioni esplicite del sistema iniziale sono pertanto

$$\begin{cases} x(t) = \cos 2t + \frac{4}{3} \sin 2t \\ y(t) = -\frac{4}{3} \cos 2t - \frac{2}{3} \sin 2t. \end{cases}$$

La soluzione analitica è riportata in figura 7.16 (destra), mentre la soluzione $(x(t), y(t))$ è riportata sul ritratto di fase (sinistra) con una linea continua contrassegnata da pallini vuoti. ■

7.5 Soluzione degli esercizi di fine capitolo 5

Esercizio 5.47. Risoluzione. Come per l'esercizio precedente, prima di svolgere i calcoli cerchiamo di farci un'idea di come potrebbe essere il ritratto globale semplicemente tracciando le isocline ed il campo di flusso nelle regioni di piano da esse individuate. Le isocline a tangente orizzontale sono le rette $y = 0$ e $x = 1/3$, mentre quelle a tangente verticale sono $x = 0$ e

$y = -3/2x + 1$. Le isocline si incontrano in 3 punti, $(0, 0)$, $(2/3, 0)$ e $(1/3, 1/2)$ che sono, pertanto, i punti di equilibrio del sistema (si noti che il punto $(0, 1)$ non è di equilibrio essendo intersezione unicamente delle isocline a tangente verticale). In figura 7.17 (sinistra) sono riportate l'isoclina a tangente orizzontale (linea tratteggiata) e quella a tangente verticale (linea punteggiata). Per

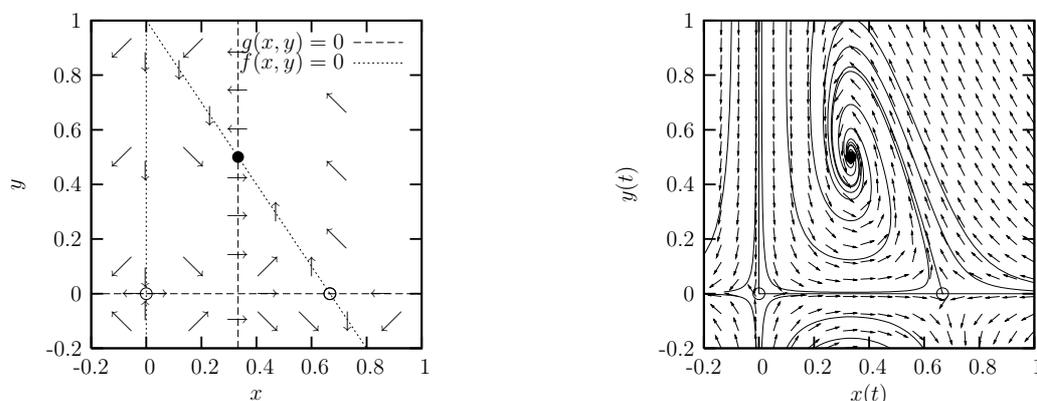


Figura 7.17: Problema 5.47: isocline a tangente orizzontale (linea tratteggiata) e a tangente verticale (linea punteggiata) e andamento del campo di flusso (sinistra); campo di flusso e ritratto di fase (destra)

determinare la direzione e il verso locali delle traiettorie occorre studiare il segno di $f(x, y)$ e $g(x, y)$. Quindi, per $x > 0$ si ha che $f(x, y) = x(2 - 3x - 2y) > 0$ quando $y < -3/2x + 1$, ovvero sotto la retta, mentre per $x < 0$ vale il contrario. Analogamente, per $y > 0$ si ha $g(x, y) = y(-3 + 9x) > 0$ quando $x > 1/3$, ovvero a destra della retta verticale, mentre per $y < 0$ vale il contrario. Avendo a disposizione i segni di f e g , seguendo lo schema in tabella 5.1 è immediato concludere che le direzioni locali delle traiettorie sono come riportato in figura 5.6 (sinistra). Da quest'ultima figura si può dedurre anche qualche informazione sulla natura dei punti di equilibrio. Si noti che l'origine è, localmente, un punto di sella, e quindi instabile, in quanto i vettori puntano verso di essa lungo la retta $x = 0$, mentre si allontanano da essa lungo la retta $y = 0$. Anche il punto di equilibrio $(2/3, 0)$ è, localmente, un punto di sella in quanto almeno lungo una direzione le traiettorie si avvicinano mentre lungo altre direzioni si allontanano. Al contrario, per il punto $(1/3, 1/2)$ si può solo concludere che è un fuoco (spirale) attorno al quale le traiettorie girano in verso antiorario. Tuttavia, dalla sola analisi del campo di flusso *non è possibile* dire se esso è stabile o instabile. Questi elementi, a differenza dei problemi precedenti, non sono sufficienti per tracciare un ritratto qualitativo seguendo l'andamento del campo di flusso, in quanto del fuoco non si conosce la stabilità. Procediamo, quindi, in modo analitico secondo lo schema 5.32.

1. *Punti di equilibrio.* Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x(2 - 3x - 2y) = 0 \\ y(-3 + 9x) = 0 \end{cases}$$

si ottengono le soluzioni $(0, 0)$, $(2/3, 0)$ e $(1/3, 1/2)$.

2. *Linearizzazione.* La matrice Jacobiana è

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} -2y - 6x + 2 & -2x \\ 9y & 9x - 3 \end{bmatrix},$$

pertanto

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad J(2/3,0) = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$J(1/3,1/2) = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{9}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice Jacobiana nell'origine fornisce gli autovalori $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 2$ (immediati) con rispettivi autovettori $\mathbf{u}_1 = [0, k]^T$ e $\mathbf{u}_2 = [h, 0]^T$ con $k, h \in \mathbb{R}$; pertanto l'origine è un punto di sella e quindi instabile. La matrice Jacobiana in $(2/3, 0)$ fornisce $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 3$ con rispettivi autovettori $\mathbf{u}_1 = [k, 0]^T$ e $\mathbf{u}_2 = [-4h, 15h]^T$ con $k, h \in \mathbb{R}$; pertanto $(2/3, 0)$ è un punto di sella e quindi instabile. Infine, la matrice Jacobiana in $(1/3, 1/2)$ fornisce

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} - \frac{11}{2}i, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{11}{2}i.$$

Pertanto, $(1/3, 1/2)$ è un fuoco stabile.

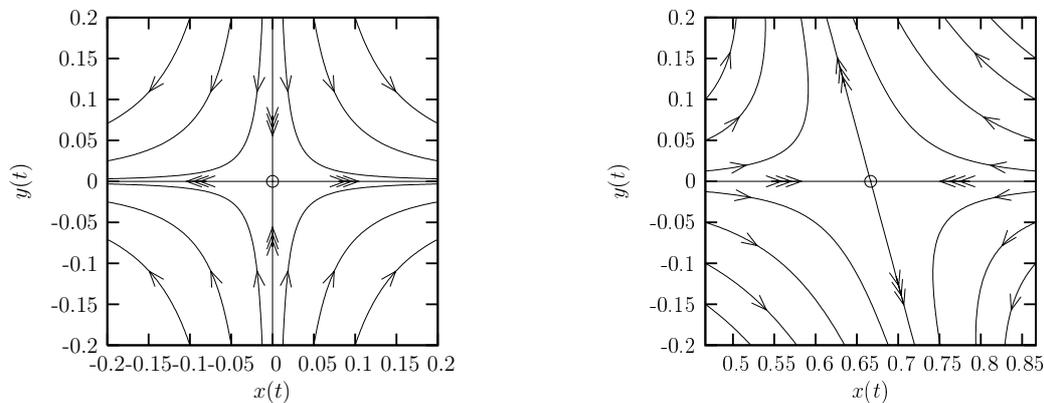


Figura 7.18: Ritratto di fase locale e direzioni dei due autovettori per il sistema linearizzato corrispondente al sistema nonlineare del problema 5.47. La linearizzazione nell'intorno di $(0,0)$ (sinistra) porta a concludere che l'origine è, localmente, un punto di sella e quindi instabile (si noti il pallino vuoto). Dalla linearizzando intorno a $(5/4, 0)$ (destra) si conclude che anche quest'ultimo è, localmente, una sella e quindi instabile (pallino vuoto)

3. Ritratti locali. I ritratti locali di ciascun punto di equilibrio sono riportati nelle figure 7.18 e 7.19.
4. Non esistono cicli limite.
5. Per tracciare il ritratto globale occorre tener conto dell'andamento delle isocline e del diagramma semplificato del campo di flusso ottenuto studiando i segni di $f(x, y)$ e $g(x, y)$ (figura 7.17, sinistra). Così facendo si ottengono, tra le varie traiettorie, anche le eterocline ovvero quelle che uniscono a due due i punti di equilibrio. In particolare, la retta $x = 0$ congiunge $(0, 0)$ con $(0, 2/3)$ mentre le traiettorie che congiungono $(1/3, 1/2)$ con gli altri due punti di equilibrio non sono rettilinee ma si avvolgono in verso antiorario attorno ad esso. In figura 7.17 (destra) è riportato il campo di flusso ottenuto al solito modo.

Questo conclude lo svolgimento. ■

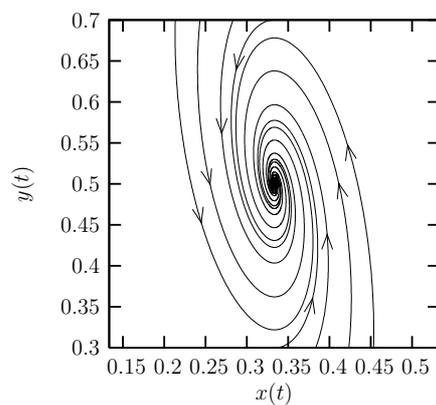


Figura 7.19: Ritratto di fase locale per il sistema linearizzato corrispondente al sistema nonlineare del problema 5.47 nell'intorno di $(1/3, 1/2)$. Si conclude che quest'ultimo è, localmente, un fuoco stabile (si noti il pallino pieno)

Indice analitico

- 2-cicli, [11](#)
- p -cicli, [11](#)

- Autovalori, [39](#)
- Autovettori, [39](#)

- Campo di flusso, [59](#)
- Capacità portante dell'ambiente, [33](#)
- Carring capacity, [33](#)
- Centro, [44](#)
- Ciclo limite, [51](#)
- Competizione
 - interspecifica, [71](#), [76](#)
 - intraspecifica, [71](#)
 - tra popolazioni, [71](#)
- Comportamento
 - caotico, [52](#)
- Condizioni
 - di Jury, [21](#)
 - di stabilità per i 2-cicli, [11](#)
 - di stabilità per i p -cicli, [11](#)
- Cooperazione
 - interspecifica, [71](#)
 - intraspecifica, [71](#)
 - tra popolazioni, [71](#)
- Criteri di Schur-Cohn, [21](#)
- Criterio
 - di Dulac, [53](#)
 - generalizzato, [54](#)
- Curva
 - chiusa, [53](#)
 - contraibile, [53](#)
- Curve
 - isocline, [58](#)

- Diagramma di biforcazione, [17](#)
- Dipendenza
 - continua dai dati iniziali, [49](#)
 - sensibile dai dati iniziali, [11](#), [17](#)
- Dominio
 - semplicemente connesso, [53](#)
 - senza buchi, [53](#)

- Equazione
 - differenziale del prim'ordine in forma normale, [31](#)
 - logistica, [33](#)
- Esclusione competitiva, [76](#)
- Esistenza di insiemi invarianti, [53](#)

- Fattore di accrescimento, [2](#)
- Fuoco
 - instabile, [44](#)
 - stabile, [44](#)

- Individui
 - infettivi, [54](#)
 - rimossi, [54](#)
 - suscettibili, [54](#)
- Insieme
 - 1-connesso, [53](#)
 - invariante, [53](#)
 - semplicemente connesso, [53](#)
- Isocline a tangente
 - orizzontale, [58](#)
 - verticale, [58](#)

- Lotka-Volterra, [65](#), [66](#)

- Mappa
 - iterata, [9](#)
 - logistica, [17](#)
- Modello
 - di Lotka-Volterra
 - discreto, [26](#)
 - di Lotka-Volterra classico, [65](#), [66](#)
 - di Lotka-Volterra realistico, [67](#)
 - di Nicholson-Bailey, [21](#)
 - di trasmissione delle infezioni, [54](#)
 - ospite-parassita realistico, [30](#)
 - SIR, [54](#)

- Nodo

- a due tangenti instabile, 40
- a due tangenti stabile, 40
- ad una tangente instabile, 42
- ad una tangente stabile, 42
- improprio instabile, 42
- improprio stabile, 42
- proprio instabile, 40
- proprio stabile, 40
- Orbita
 - eteroclina, 51
 - omoclina, 51
 - periodica, 52
- Polinomio caratteristico, 39
- Potenziale biotico, 2, 33
- Principio
 - dell'esclusione competitiva, 76
 - di sovrapposizione, 39
- Problema
 - di Cauchy, 31
 - localmente ben posto, 49
- Punto di equilibrio, 9
 - globalmente asintoticamente stabile, 9
 - globalmente attrattivo, 9
 - instabile, 9
 - localmente asintoticamente stabile, 9
 - localmente attrattivo, 9
 - localmente stabile, 9
- Punto di sella (colle), 40
 - instabile, 40
 - stabile, 40
- Punto unito, 9
- Raddoppio del periodo, 17
- Raggio spettrale, 19
- Regione
 - con soluzioni periodiche, 17
 - invariante, 53
- Ritratto di fase, 38
- Schema generale per la stabilità, 11
- Sistema
 - lineare accoppiato, 38
 - lineare disaccoppiato, 38
 - lineare omogeneo, 38
 - non singolare, 38
- Sistemi
 - autonomi non-lineari, 49
 - dissipativi, 52
- Soluzione
 - di una ODE, 31
 - locale, 31
 - massimale del sistema, 49
 - periodica, 11, 52
 - stazionaria, 31
- Stabilità globale, 9
- Successioni
 - monotone, 10
 - regolari, 9
 - ricorsive, 9
- Tasso intrinseco di crescita, 33
- Tempo di estinzione, 36
- Teorema
 - dell'asintoto, 32
 - della divergenza, 53
 - di esistenza globale, 31
 - di esistenza locale, 31
 - di Poincaré-Bendixson, 52
- Test di Jury, 21
- Traiettorie periodiche, 52
- Valori medi su un periodo del sistema Lotka-Volterra, 66
- Varietà
 - instabile, 51
 - stabile, 51