Modelli Matematici per la Biologia – Esercitazione 1
a.a. 2006-2007

Dott. Simone Zuccher

13 Aprile 2007

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Simulazione al calcolatore di vari modelli discreti del tipo $x_{n+1} = f(x_n)$ e $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$

1.1 Esercizio

Sia $x_0 \in (0, \pi)$ e si consideri la successione definita da

$$x_{k+1} = x_k + \sin x_k.$$

1. provare che $x_k \in (0, \pi)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$;
2. provare che (x_k) cresce;
3. calcolare il limite di (x_k) per $k \to \infty$.

1.1.1 Risoluzione

1. Si noti che $x_{k+1} = f(x_k)$ con $f(x) = x + \sin x$. $f(x)$ è strettamente crescente su $(0, \pi)$ in quanto $f'(x) = 1 + \cos x$ e $0 < 1 + \cos x < 2$ $\forall x \in (0, \pi)$, ovvero $f'(x) > 0$ $\forall x \in (0, \pi)$. Essendo $f(0) = 0$, $f(\pi) = \pi$, e la funzione strettamente crescente, allora $x_{k+1} = f(x_k) \in (0, \pi)$.
2. Essendo $x_{k+1} - x_k = \sin x_k > 0$ $\forall x_k \in (0, \pi)$, la successione è crescente.
3. Per $k \to \infty$ si ha l'equazione $x = x + \sin x$, che è soddisfatta per $x = 0$, $x = \pi$ e $x = +\infty$. Di questi, l'unico limite possibile è $x = \pi$ in quanto la successione è crescente e si parte da $x_0 \in (0, \pi)$. Un altro modo è di osservare che $f'(0) = 2 > 0$ e pertanto l'origine è un punto unito instabile, mentre $f'(\pi) = 0$ e quindi è stabile.

Tutte le caratteristiche di (x_k) sopra menzionare sono verificabili graficamente utilizzando il file `esempio1.m` per GNU Octave di seguito riportato. Esso richiede come input N (numero di iterazioni – quindi nel caso $k \to +\infty$ si deve scegliere N opportunamente elevato) e il valore iniziale x_0 (chiamato `s(1)` in `esempio1.m`).

In figura 1 è riportata la storia temporale e il *cobwebbing* (procedura a "zigo-zago" ottenuta partendo da x_0, calcolando $x_1 = f(x_0)$ tramite la f, riportando il valore x_1 sulla bisettrice del primo e terzo quadrante, quindi calcolando $x_2 = f(x_1)$ tramite la f, e così via) ottenuti per $N = 15$ e $x_0 = 0.1$. Si noti il raggiungimento veloce del valore asintotico $x_n = \pi$.

```
% Name:     esempio1.m
% Author:   Simone Zuccher
% Created:  03 Apr 2007
% Purpose:  Compute x(k+1) = x(k) + sin(x(k))
% Input:    Number of total iterations and x(1)
% Output:   Plot of x(k) versus k and x(k+1) versus x(k)
% Modified:

% Clear all variables
clear

% Change format to long exponential
format long e

% Input the number of total iterations
m=input('Input N (number of iterations): ');

% Input the initial value. If negative, it will be a random number
s(1)=input('Input 0<s(1)<pi (if <0 or >pi then random): ');

% Set s(1) random if out of range
if((s(1)>pi) || (s(1)<0))
  s(1)=pi*rand(1);
endif

% Display value of s(1)
disp(s(1));

% Assign x and y needed for 2nd plot
x(1)=s(1);
y(1)=0.0;

% Loop on all points
for n=1:1:m-1
  s(n+1)     = s(n)+sin(s(n));
  disp(s(n+1));
  x(2*n)     = s(n);
  y(2*n)     = s(n+1);
```

```
  x(2*n+1)   = s(n+1);
  y(2*n+1)   = s(n+1);
end

% Plots s(n) versus n
gset auto
plot(s,'+-g;s(n);');

% Wait for keypressed
disp('Please press a key to continue...');
pause();

% Plot f(x), x and path
t=linspace(0,pi,500);
plot(t,t+sin(t),'-g;x+sin(x);',t,t,'-b;x;',x,y,'+-');
```

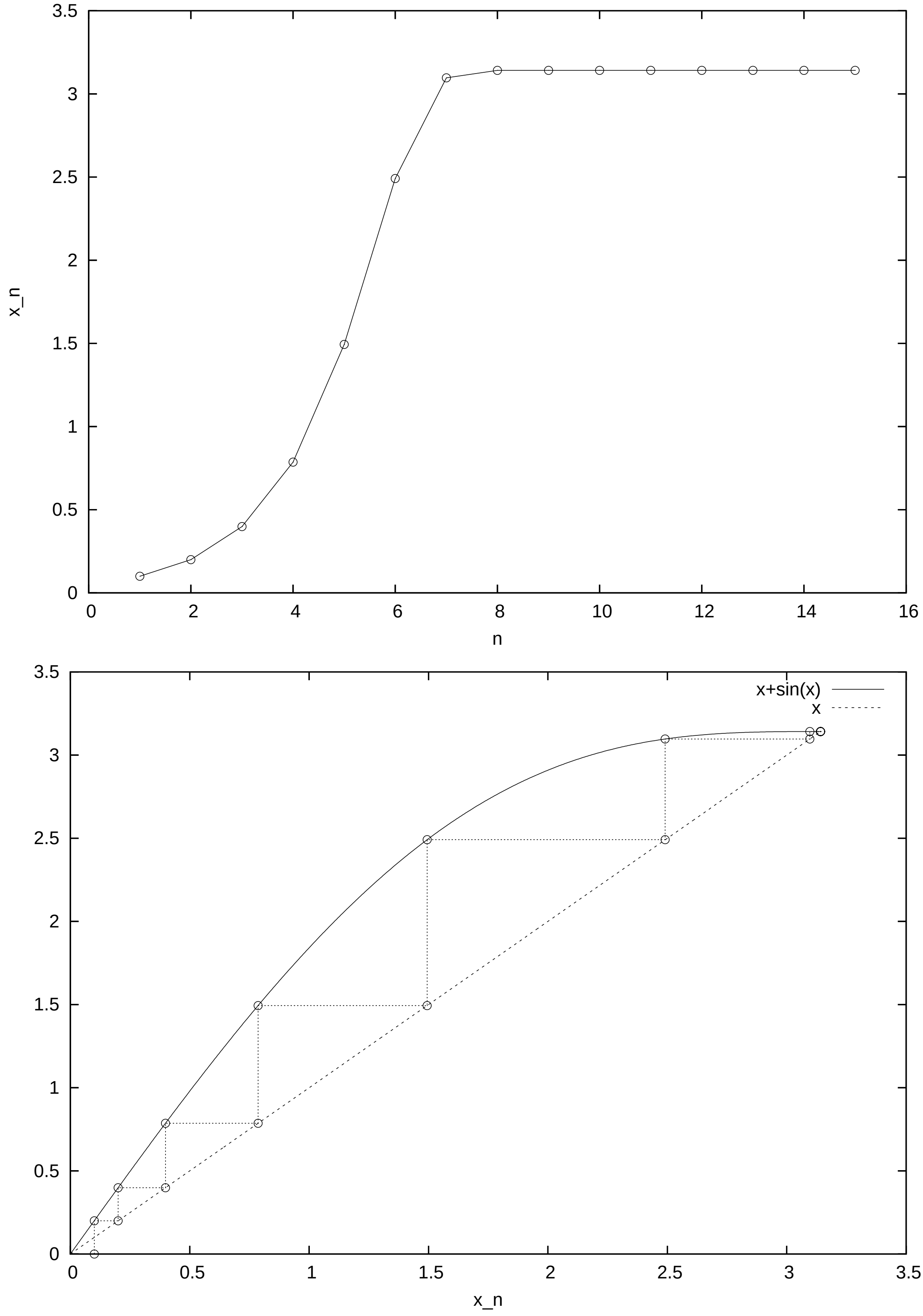

Figura 1: Storia temporale x_n e studio dei punti uniti, $N = 15$, $x_0 = 0.1$.

1.2 Esercizio

Data la successione (x_k) definita da

$$x_0 = a, \qquad x_{k+1} = \max\left\{\frac{1}{4}, x_k^2\right\}$$

dire se esiste, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il limite di (x_k) per $k \to \infty$.

1.2.1 Risoluzione

In questo caso $x_{k+1} = f(x_k)$ con $f(x) = \max\left\{\frac{1}{4}, x_k^2\right\}$. Questa funzione è decrescente per $x < -1/2$, costante e pari a $1/4$ per $-1/2 \leq x \leq 1/2$ e crescente per $x > 1/2$. I punti uniti si trovano risolvendo l'equazione $x = \max\left\{\frac{1}{4}, x^2\right\}$ che ha come soluzioni $x = 1/4$ e $x = 1$. Anche $x = +\infty$ è un possibile limite della successione (x_k) per $k \to +\infty$ in quanto soddisfa l'equazione dei punti uniti. La funzione data ha derivata nulla in $x = 1/4$, che pertanto è stabile, e derivata pari a $2 > 0$ in $x = 1$, che è pertanto instabile. Si verifica facilmente che il limite della successione è $x = 1$ se $x_0 = \pm 1$; il limite è $x = 1/4$ per $|x_0| < 1$, mentre il limite è $+\infty$ per $|x_0| > 1$.

`esempio2.m` può essere utilizzato per la soluzione grafica di questo esercizio. Esso richiede come input N (numero di iterazioni – quindi nel caso $k \to +\infty$ si deve scegliere N opportunamente elevato) e il valore iniziale x_0 (chiamato `s(1)` in `esempio2.m`).

In figura 2 sono riportati la storia temporale e il *cobwebbing*, ottenuti per $N = 7$ e $x_0 = -1$, dove si nota che la soluzione è attratta da $x = 1$. In figura 3 sono riportati la storia temporale e il *cobwebbing*, ottenuti per $N = 7$ e $x_0 = -0.7$, dove si nota che la soluzione è attratta da $x = 1/2$; infine, in figura 4 sono riportati la storia temporale e il *cobwebbing* ottenuti per $N = 7$ e $x_0 = -1.01$, dove si nota l'esplosione della soluzione.

```
% Name:     esempio2.m
% Author:   Simone Zuccher
% Created:  03 Apr 2007
% Purpose:  Compute x(k+1) = max(1/4,x(k)^2)
% Input:    Number of total iterations and x(1)
% Output:   Plot of x(k) versus k and x(k+1) versus x(k)
% Modified:

% Clear all variables
clear

% Change format to long exponential
format long e

% Input the number of total iterations
m=input('Input N (number of iterations): ');

% Input the initial value.
s(1)=input('Input s(1): ');
```

```
% Display value of s(1)
disp(s(1));

% Assign x and y needed for 2nd plot
x(1)=s(1);
y(1)=0.0;

% Loop on all points
for n=1:1:m-1
  s(n+1)     = max(1/4,s(n)^2);
  disp(s(n+1));
  x(2*n)     = s(n);
  y(2*n)     = s(n+1);
  x(2*n+1)   = s(n+1);
  y(2*n+1)   = s(n+1);
end

% Plots s(n) versus n
gset auto
plot(s,'+-g;s(n);');

% Wait for keypressed
disp('Please press a key to continue...');
pause();

% Display value of s(m)
disp(s(m));

% Plot f(x), x and path
t=linspace(-1.5,1.5,500);
plot(t,max(1/4,t.^2),'-g;max(1/4,t^2);',t,t,'-b;x;',x,y,'+-');
```

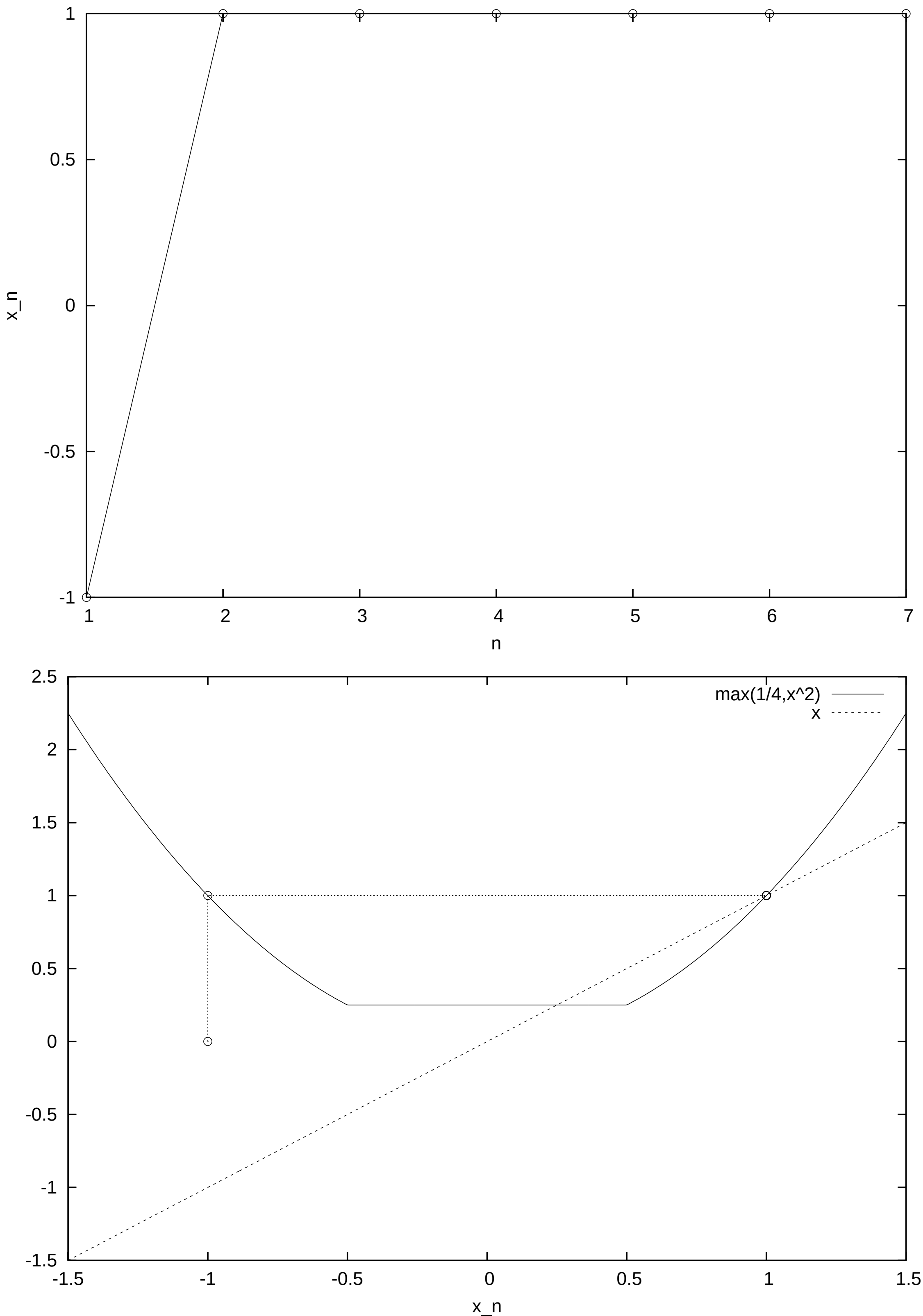

Figura 2: Storia temporale x_n e studio dei punti uniti, $N = 7$, $x_0 = -1$.

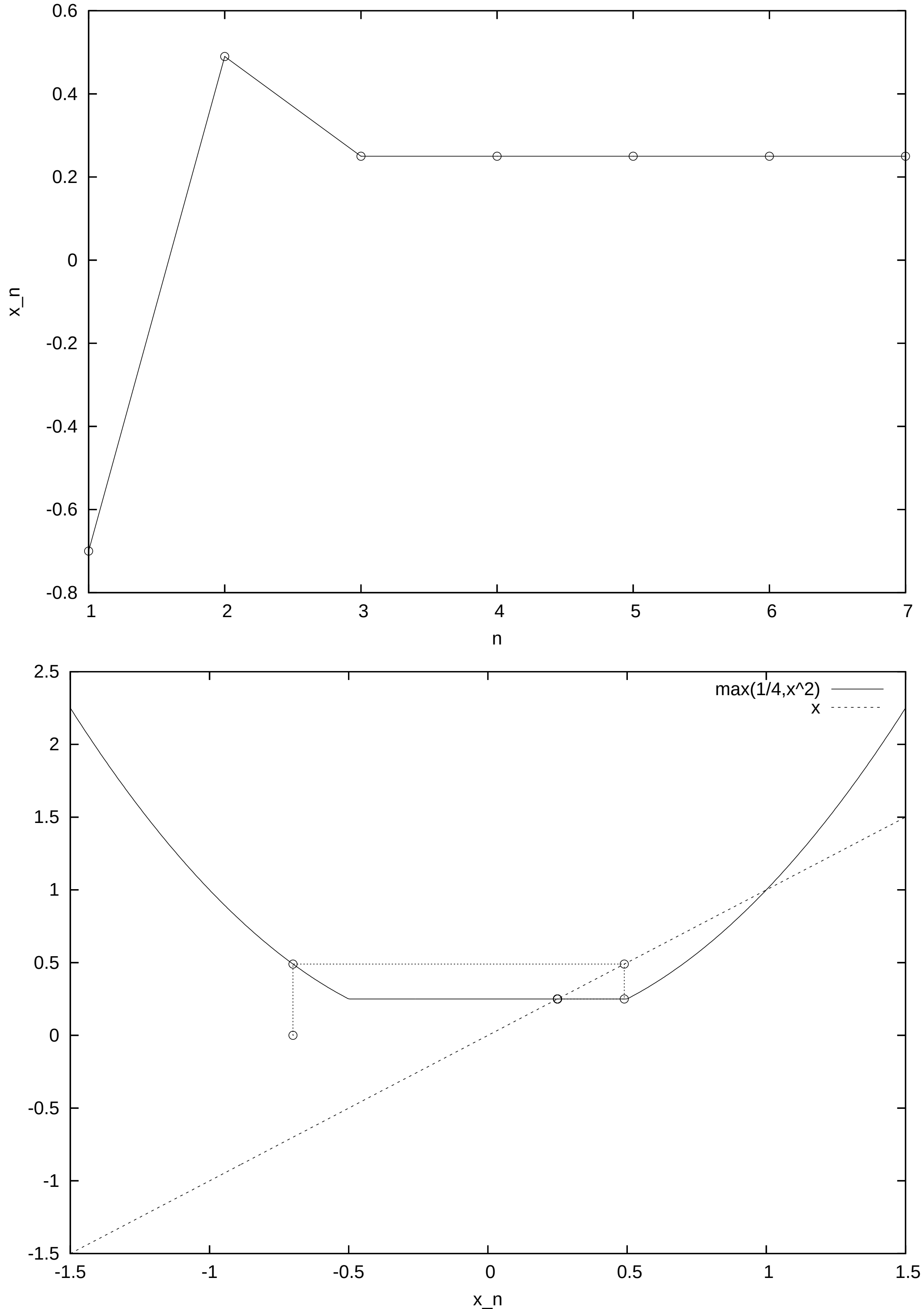

Figura 3: Storia temporale x_n e studio dei punti uniti, $N = 7$, $x_0 = -0.7$.

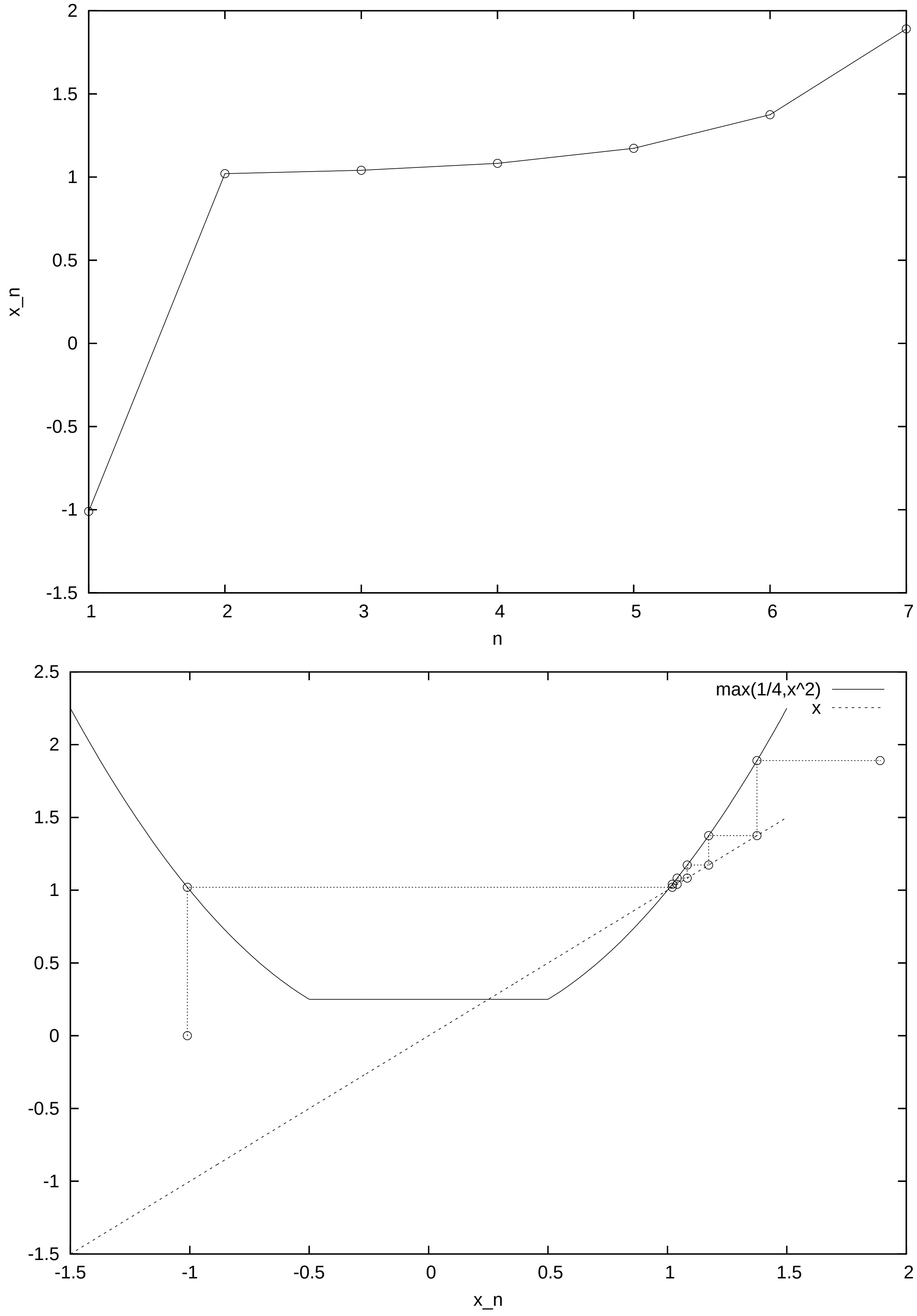

Figura 4: Storia temporale x_n e studio dei punti uniti, $N = 7$, $x_0 = -1.01$.

1.3 Esercizio

Calcolare il limite della successione definita da

$$x_0 = 1, \qquad x_{k+1} = \int_0^{x_k} e^{-t^2} dt.$$

1.3.1 Risoluzione

Si noti che $x_{k+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{erf}(x_k)$, ovvero $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{erf}(x)$. Essendo $f'(x) = e^{-x^2} > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$, la funzione è sempre crescente ed essendo $x_2 < x_1$ la successione è decrescente. L'unico punto unito che soddisfa l'equazione $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{erf}(x)$ è $x = 0$, che risulta il limite della successione in quanto essa è decrescente e $x_0 = 1$.

Si osservi che l'analisi di stabilità del punto $x = 0$ porta a $f'(0) = 1$ ($f'(x) = e^{-x^2}$), per cui la determinazione della sua natura richiede l'uso delle derivate successive secondo quanto riportato in figura 5. Essendo $f''(x) = -2xe^{-x^2}$, si ha $f''(0) = 0$ e quindi bisogna analizzare la derivata terza che è $f'''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$. Essendo $f'''(0) = -2 < 0$, $x = 0$ è un punto di equilibrio localmente asintoticamente stabile.

`esempio3.m` può essere utilizzato per la soluzione grafica di questo esercizio. Esso richiede come input solo N (numero di iterazioni) essendo il valore iniziale $x_0 = 1$ fissato.

In figura 6 sono riportati la storia temporale e il *cobwebbing*, ottenuti per $N = 500$. Si può notare la natura dell'origine, attrattiva se pur con una velocità di convergenza molto bassa.

```
% Name:     esempio3.m
% Author:   Simone Zuccher
% Created:  03 Apr 2007
% Purpose:  Compute x(k+1) = integrate(exp(-t^2),t,0,x(k))
% Input:    Number of total iterations and x(1)
% Output:   Plot of x(k) versus k and x(k+1) versus x(k)
% Modified:

% Clear all variables
clear

% Change format to long exponential
format long e

% Input the number of total iterations
m=input('Input N (number of iterations): ');

% Input the initial value.
s(1)=1.0;

% Display value of s(1)
disp(s(1));
```

$$\boxed{f(\alpha)=\alpha}\begin{cases}\boxed{|f'(\alpha)|<1 \Rightarrow \alpha \text{ l.a.s.}}\\[2em] \boxed{|f'(\alpha)|=1}\begin{cases}\boxed{f'(\alpha)=1}\begin{cases}\boxed{f''(\alpha)<0\Rightarrow \text{s.l.a.s. \& i.r.}}\\ \boxed{f''(\alpha)>0\Rightarrow \text{s.r. \& i.l.a.s.}}\\ \boxed{f''(\alpha)=0}\begin{cases}\boxed{f'''(\alpha)<0\Rightarrow \alpha \text{ l.a.s.}}\\ \boxed{f'''(\alpha)>0\Rightarrow \alpha \text{ r.}}\end{cases}\end{cases}\\[2em] \boxed{f'(\alpha)=-1}\begin{cases}\boxed{2f'''(\alpha)+3\left(f''(\alpha)\right)^2>0\Rightarrow \alpha \text{ l.a.s.}}\\ \boxed{2f'''(\alpha)+3\left(f''(\alpha)\right)^2<0\Rightarrow \alpha \text{ r.}}\end{cases}\end{cases}\\[2em] \boxed{|f'(\alpha)|>1\Rightarrow\alpha\text{ r.}}\end{cases}$$

Tabella 3.1 Schema riassuntivo per lo studio della stabilità di un equilibrio α quando f è dotata di derivate. Legenda:

l.a.s. = localmente asintoticamente stabile
s.l.a.s. = superiormente localmente asintoticamente stabile
i.l.a.s. = inferiormente localmente asintoticamente stabile
r. = repulsivo
s.r. = superiormente repulsivo
i.r. = inferiormente repulsivo

Figura 5: Schema per la determinazione della natura dei punti di equilibrio per mappe del tipo $x_{n+1} = f(x_n)$.

```
% Assign x and y needed for 2nd plot
x(1)=s(1);
y(1)=0.0;
```

```
% Loop on all points
for n=1:1:m-1
  s(n+1)     = sqrt(pi)*erf(s(n))/2.0;
  disp(s(n+1));
  x(2*n)     = s(n);
  y(2*n)     = s(n+1);
  x(2*n+1)   = s(n+1);
  y(2*n+1)   = s(n+1);
end

% Plots s(n) versus n
gset auto
plot(s,'+-g;s(n);');

% Wait for keypressed
disp('Please press a key to continue...');
pause();

disp(s(m))

% Plot f(x), x and path
t=linspace(0,1.5,500);
plot(t,sqrt(pi)*erf(t)/2.0,'-g;sqrt(pi)*erf(x)/2;',t,t,'-b;x;',x,y,'+-');
```

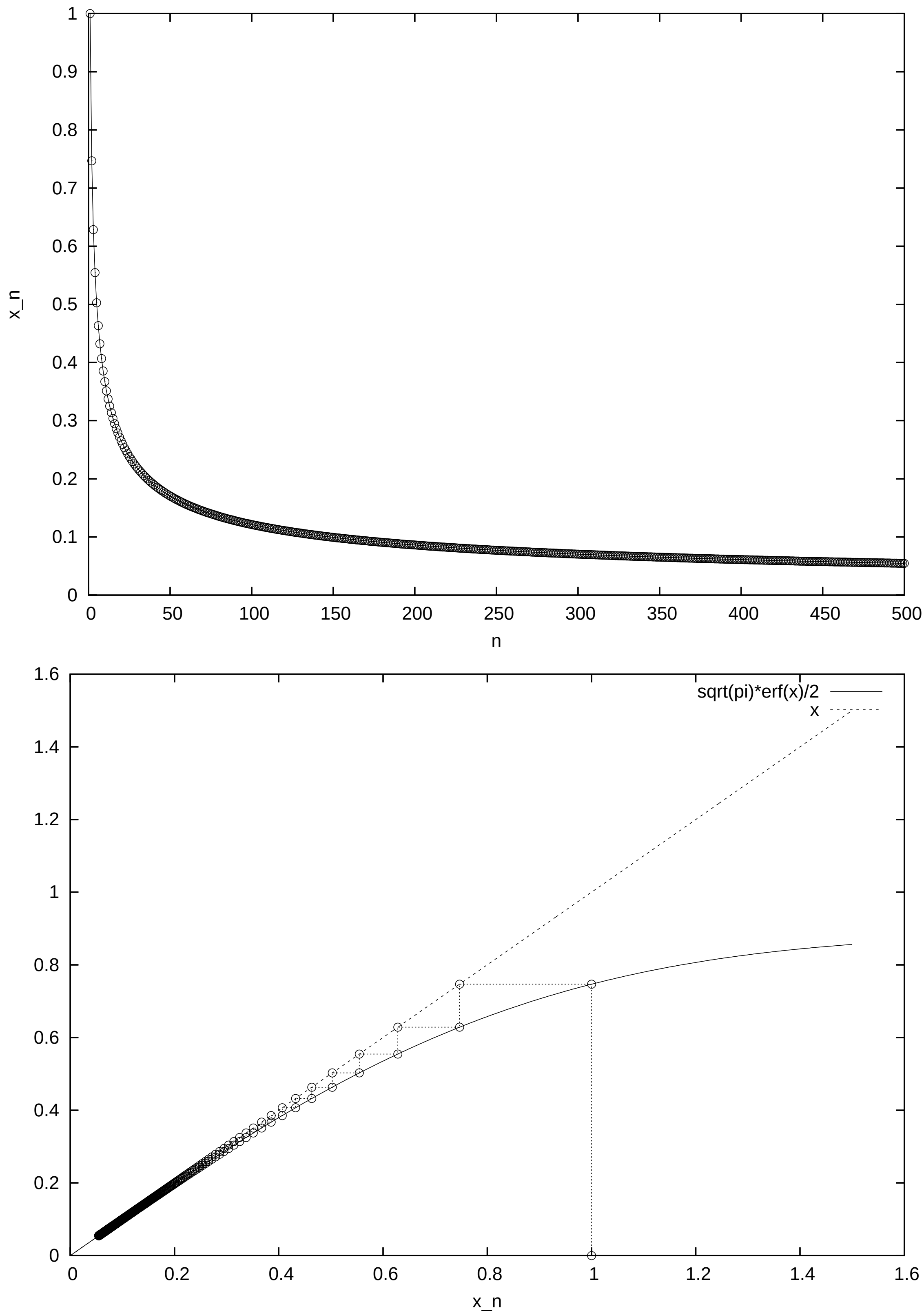

Figura 6: Storia temporale x_n e studio dei punti uniti, $N = 500$.

1.4 Esercizio

Si consideri l'equazione

$$x^k = \cos\frac{x}{k}.$$

1. provare che esiste un'unica soluzione $x_k > 0$;
2. provare che (x_k) rimane limitata;
3. calcolare il limite di (x_k) per $k \to \infty$.

1.4.1 Risoluzione

1. Disegnando il grafico di $y = x^k$ e $y = \cos\frac{x}{k}$, come riportato in figura 7, si osserva facilmente che le due funzioni si intersecano in un solo punto $x_k \in (0, 1)$ (si osservi che, per k pari, le intersezioni sono due, di cui una sola positiva).
2. A seguito del punto precedente, la successione stessa (x_k) rimane limitata tra 0 e 1.
3. Al tendere all'infinito di k la funzione $y = \cos\frac{x}{k}$ diventa sempre più "piatta" (costante) nell'intorno di $x = 1$ dove vale 1 in quanto l'argomento del coseno tende a zero. Siccome, per $k \to +\infty$, $x = 1$ soddisfa l'equazione $x^k = \cos\frac{x}{k}$, il limite della successione è 1.

`esempio4.m` può essere utilizzato per la soluzione grafica di questo esercizio. Esso richiede come input N (numero di iterazioni) e il valore iniziale di tentativo per la funzione che calcola la radice $x_k > 0$. Si consiglia di fornire un valore $0 < x_{\text{guess}} < 1$.

```
% Name:     esempio4.m
% Author:   Simone Zuccher
% Created:  04 Apr 2007
% Purpose:  Compute the solution of x^k = cos (x/k)
% Input:    Number of total iterations and x0 for nonlinear solver
% Output:   Plot  x^k and cos (x/k)
% Modified:

% Clear all variables
clear

% Change format to long exponential
format long e

% Input the number of total iterations
m=input('Input N (number of iterations): ');

% Input the initial value for nonlinear solver.
x0=input('Input x0 (initial value for nonlinear solver): ');
```

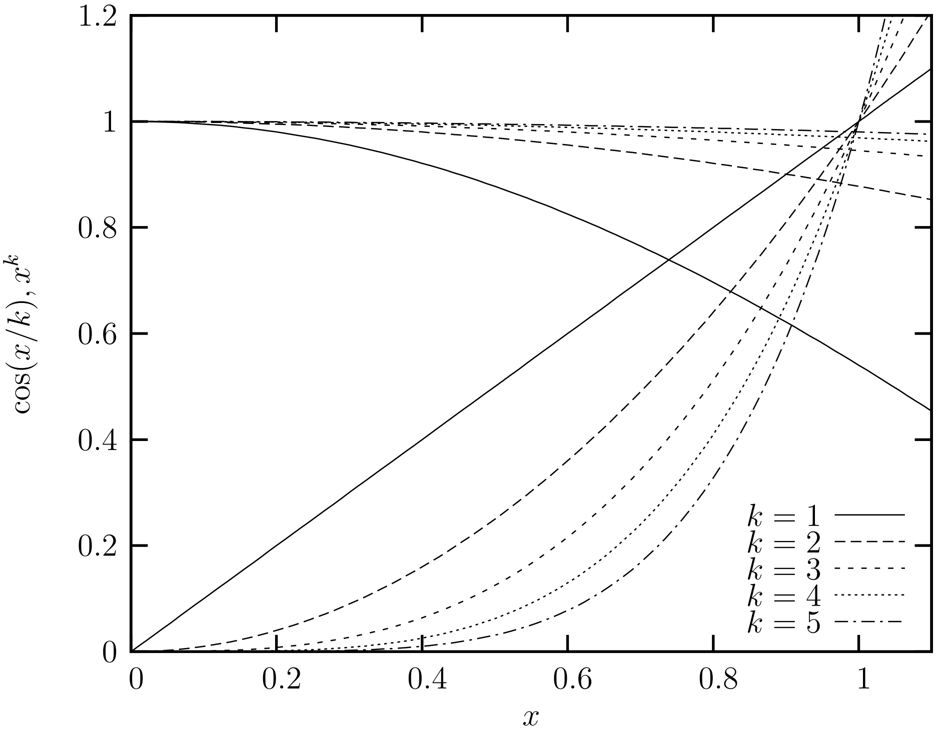

Figura 7: $y = \cos\frac{x}{k}$ e $y = x^k$ al variare di k. Si noti come il punto di intersezione sia per $0 < x < 1$, al limite è $x \to 1$ per $k \to \infty$.

```
% Create a vector needed for plots
t=linspace(-1.1,1.1,500);

% Loop on all functions
for n=1:1:m
  % set range for plot
  gset xrange[-1.1:1.1]

  % set attributes for plots
  attr1=['-g;t^' int2str(n) ';'];
  attr2=['-b;cos(t/' int2str(n) ');'];

  % plot of x^n and cos(x/n)
  plot(t,t.^n,attr1,t,cos(t/n),attr2);

  % define the function
  fun= ["x^" int2str(n) "-cos(x/" int2str(n) ")"];

  % compute zero closest to x0 and diplay it
  s(n)=fsolve(fun,x0);
```

```
  disp(s(n))

  % Wait for keypressed
  disp('Please press a key to continue...');
  pause();
end
```

1.5 Esercizio

Si consideri la successione definita da

$$x_0 = \lambda, \qquad x_{k+1} = \frac{x_k}{1 + x_k},$$

con $\lambda \geq 0$. Calcolare il limite di (x_k) per $k \to \infty$.

1.5.1 Risoluzione

Essendo $f(x) = \frac{x}{1+x}$ strettamente crescente per $x \geq 0$, essendo $x = 0$ il suo unico punto unito, ed essendo $x_2 < x_1$, la successione è strettamente decrescente ed ha come limite $x = 0$ $\forall x_0 \geq 0$. Alternativamente, si osservi che $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \lim_{x\to 0^\pm} 1/(x+1)^2 = 1^\mp$ e quindil'origine è stabile superiormente e instabile inferiormente. Una ulteriore alternativa era l'analisi classica secondo lo schema 5. Da $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ si ottiene $f'(0) = 1$, da $f''(x) = -\frac{2}{(x+1)^3}$ segue $f''(0) = -2 < 0$, per cui il punto di quilibrio $x = 0$ è superiormente localmente asintoticamente stabile e inferiormente repulsivo. Qui interessa che sia stabile superiormente.

Si osservi che la successione data modellizza una legge di crescita di una popolazione con risorse limitate e tasso di natalità inversamente proporzionale alle dimensioni della popolazione, pertanto condannata all'estinzione.

`esempio5.m` può essere utilizzato per la soluzione grafica di questo esercizio. Esso richiede come input N (numero di iterazioni) e il valore iniziale $x_0 = \lambda$.

In figura 8 sono riportati la storia temporale e il *cobwebbing*, ottenuti per $N = 500$ e $x_0 = 0.9$. Si può notare la natura dell'origine, attrattiva se pur con una velocità di convergenza molto bassa.

```
% Name:     esempio5.m
% Author:   Simone Zuccher
% Created:  04 Apr 2007
% Purpose:  Compute x(k+1) = x(k)/( 1 + x(k) )
% Input:    Number of total iterations and x(1)
% Output:   Plot of x(k) versus k and x(k+1) versus x(k)
% Modified:

% Clear all variables
clear

% Change format to long exponential
format long e

% Input the number of total iterations
m=input('Input N (number of iterations): ');

% Input the initial value.
s(1)=input('Input s(1) (initial value): ');
```

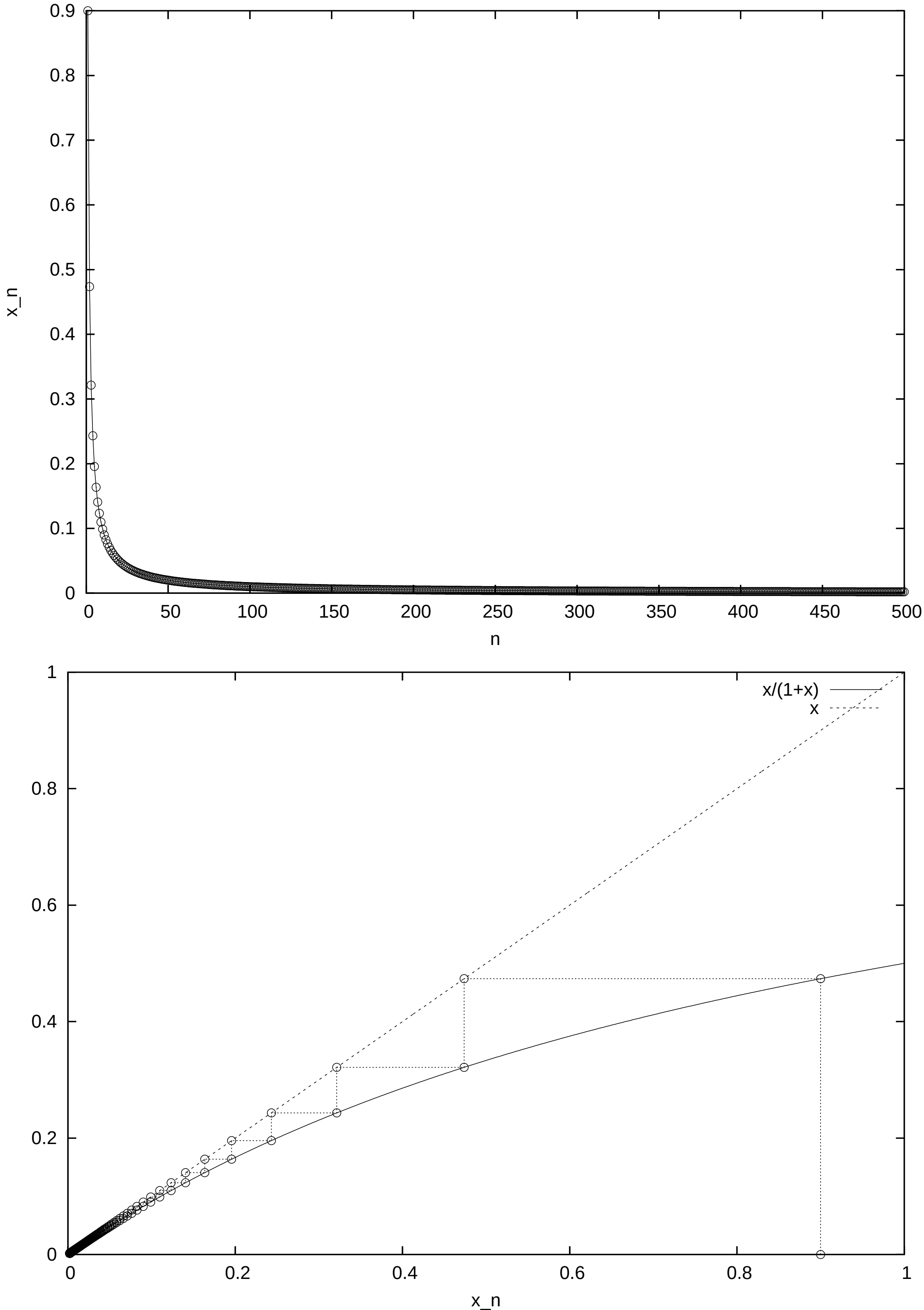

Figura 8: Storia temporale x_n e studio dei punti uniti, $N = 500$, $x_0 = 0.9$.

```
if(s(1)<0)
  disp('s(1)<0: stopping...')
  return
endif

% Display value of s(1)
disp(s(1));

% Assign x and y needed for 2nd plot
x(1)=s(1);
y(1)=0.0;

% Loop on all points
for n=1:1:m-1
  s(n+1)     = s(n)/(1.+s(n));
  disp(s(n+1));
  x(2*n)     = s(n);
  y(2*n)     = s(n+1);
  x(2*n+1)   = s(n+1);
  y(2*n+1)   = s(n+1);
end

% Plots s(n) versus n
gset auto
plot(s,'+-g;s(n);');

% Wait for keypressed
disp('Please press a key to continue...');
pause();

disp(s(m))

% Plot f(x), x and path
t=linspace(0,1,500);
plot(t,t./(1.+t),'-g;t/(1+t);',t,t,'-b;x;',x,y,'+-');
```

1.6 Esercizio

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Si studi la successione definita da

$$x_0 = \lambda, \qquad x_{k+1} = 4 \int_0^{x_k} \frac{e^{2\tau}}{(e^{2\tau}+1)^2} d\tau.$$

1.6.1 Risoluzione

Si osservi che $x_{k+1} = 4 \displaystyle\int_0^{x_k} \frac{e^{2\tau}}{(e^{2\tau}+1)^2} = 1 - \frac{2}{e^{2x_k}+1}$, pertanto $f(x) = 1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}$. Essa è una funzione sempre crescente che ha come unico punto unito $x = 0$, dove la sua derivata prima $f'(x) = \frac{4\,e^{2\,x}}{(e^{2\,x}+1)^2}$ vale $f'(0) = 1$. Pertanto è necessario l'uso delle derivate successive. Essendo $f''(x) = -\frac{8\,(e^x-1)\,(e^x+1)\,e^{2\,x}}{(e^{2\,x}+1)^3}$ e quindi $f''(0) = 0$ e $f'''(x) = \frac{16\,e^{2\,x}\left(e^{4\,x}-4\,e^{2\,x}+1\right)}{(e^{2\,x}+1)^4}$ e quindi $f'''(0) = -2 < 0$, l'origine è un punto localmente asintoticamente stabile.

Alternativamente, si osservi che $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e quindi la funzione è sempre crescente. Pertanto anche la successione è monotona. Partendo da $x_0 > 0$ si ha $x_1 < x_0$ e quindi la successione è decrescente e converge a 0. Partendo da $x_0 < 0$ si ha $x_1 > x_0$ e quindi la successione è crescente e converge a 0. Partendo da $x_0 = 0$, x_n rimane tale.

`esempio6.m` può essere utilizzato per la soluzione grafica di questo esercizio. Esso richiede come input N (numero di iterazioni) e il valore iniziale $x_0 = \lambda$.

In figura 9 è riportato un esempio per $N = 500$ e $x_0 = 1.8$.

```
% Name:     esempio6.m
% Author:   Simone Zuccher
% Created:  04 Apr 2007
% Purpose:  Compute x(k+1) = 4*integrate(4*(exp(2*t))/(1+exp(2*t))^2,t,o,x(k))
% Input:    Number of total iterations and x(1)
% Output:   Plot of x(k) versus k and x(k+1) versus x(k)
% Modified:

% Clear all variables
clear

% Change format to long exponential
format long e

% Input the number of total iterations
m=input('Input N (number of iterations): ');

% Input the initial value.
s(1)=input('Input s(1) (initial value): ');

% Display value of s(1)
disp(s(1));

% Assign x and y needed for 2nd plot
x(1)=s(1);
```

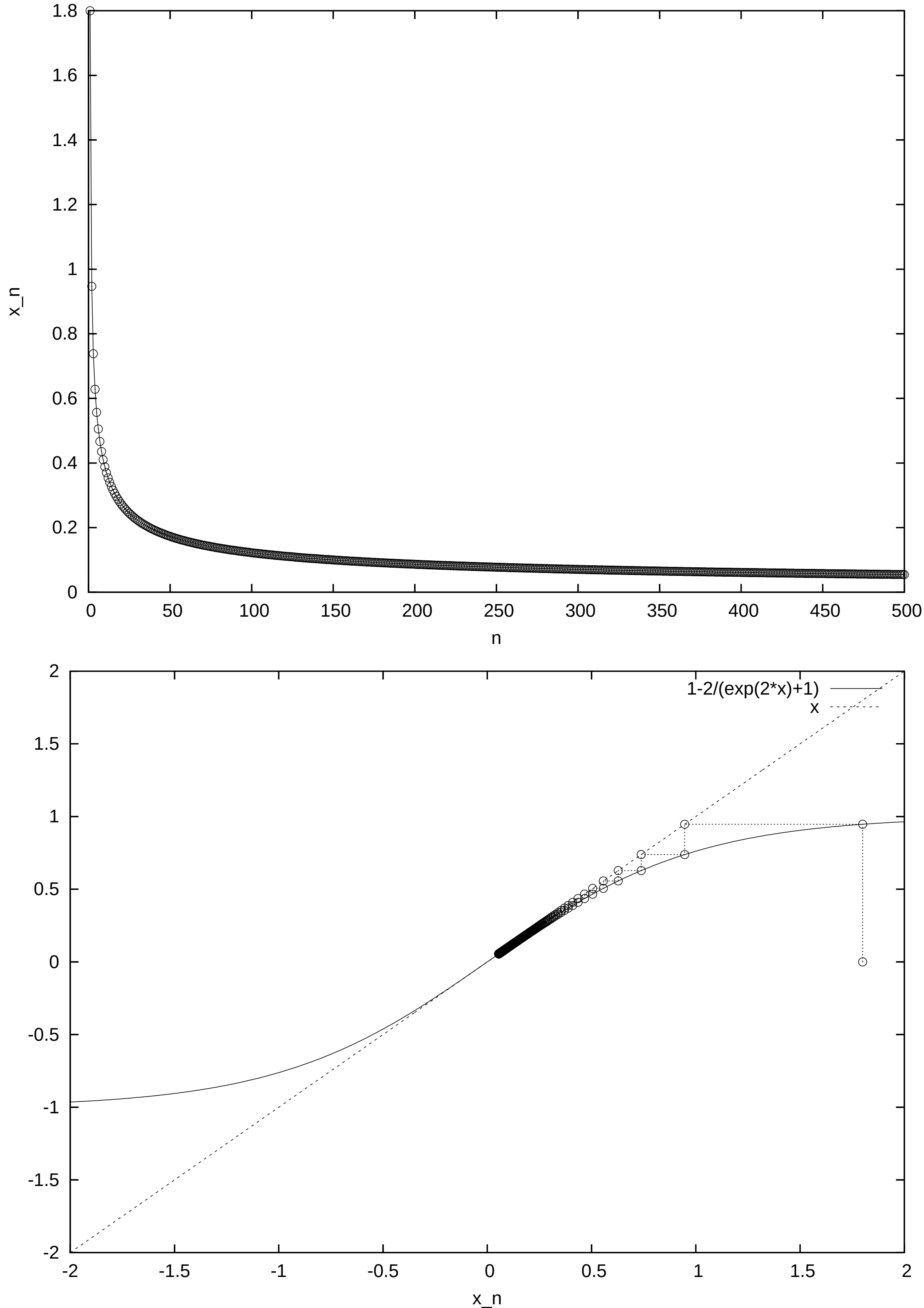

Figura 9: Storia temporale x_n e studio dei punti uniti, $N = 500$ e $x_0 = 1.8$.

```
y(1)=0.0;

% Loop on all points
for n=1:1:m-1
  s(n+1)     = 1. - 2./(exp(2.*s(n))+1.);
  disp(s(n+1));
  x(2*n)     = s(n);
  y(2*n)     = s(n+1);
  x(2*n+1)   = s(n+1);
  y(2*n+1)   = s(n+1);
end

% Plots s(n) versus n
gset auto
plot(s,'+-g;s(n);');

% Wait for keypressed
disp('Please press a key to continue...');
pause();

disp(s(m))

% Plot f(x), x and path
t=linspace(-2,2,500);
plot(t,1. - 2./(exp(2.*t)+1.),'-g;1-2/(exp(2*t)+1);',t,t,'-b;x;',x,y,'+-');
```

1.7 Esercizio

Sia $\lambda > 0$. Si studi la successione definita da

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \lambda, \qquad x_{k+1} = x_k + x_{k-1}^2.$$

1.7.1 Risoluzione

Si noti che la successione è strettamente crescente essendo $x_{k+1} - x_k = x_{k-1}^2 > 0 \; \forall x_{k-1} \neq 0$ e quindi la successione diverge a $+\infty \; \forall x_1 > 0$.

`esempio7.m` può essere utilizzato per la soluzione grafica di questo esercizio. Esso richiede come input N (numero di iterazioni) e il valore iniziale $x_1 = \lambda > 0$.

```
% Name:     esempio7.m
% Author:   Simone Zuccher
% Created:  03 Apr 2007
% Purpose:  Compute x(k+1) = x(k) + [x(k-1)]^2
% Input:    Number of total iterations and x(2)
% Output:   Plot of x(k) versus k and x(k+1) versus x(k)
% Modified:

% Clear all variables
clear

% Change format to long exponential
format long e

% Input the number of total iterations
m=input('Input N (number of iterations): ');

% Input the initial value.
s(1)=0.;
s(2)=input('Input s(2) (second initial value): ');

% Display value of s(1) and s(2)
disp(s(1));
disp(s(2));

% Loop on all points
for n=2:1:m-1
  s(n+1)     = s(n) + s(n-1)^2;
  disp(s(n+1));
end

% Plots s(n) versus n
gset auto
plot(s,'+-g;s(n);');

disp('');
```

```
disp(s(m))
```

1.8 Esercizio

Sia $\lambda > 0$. Si studi la successione definita da

$$x_0 = \lambda, \qquad x_{k+1} = \log(1 + x_k).$$

1.8.1 Risoluzione

Si noti che $f(x) = \log(1+x)$ è strettamente crescente pertanto anche la successione (x_k) è monotona. Essendo $x = 0$ l'unico punto unito, e $x_1 < x_0$ $\forall x_0 > 0$, la successione è decrescente e converge a zero. Alternativamente, si osservi che $f'(0) = 1/(1+x)$, quindi $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \lim_{x\to 0^\pm} 1/(x+1) = 1^\mp$ e pertanto l'origine è stabile superiormente e instabile inferiormente. Ricorrendo allo schema 5, si ha $f'(0) = 1$, $f''(x) = -1/(1+x)^2 \Rightarrow f''(0) = -1 < 0$, ovvero l'origine è superiormente localmente asintoticamente stabile ed inferiormente repulsiva. Essendo interessati solo al caso $\lambda > 0$, l'origine risulta stabile come riportato in figura 10 per $N = 500$ e $x_0 = 1.8$.

`esempio8.m` può essere utilizzato per la soluzione grafica di questo esercizio. Esso richiede come input N (numero di iterazioni) e il valore iniziale $x_0 = \lambda > 0$.

```
% Name:     esempio8.m
% Author:   Simone Zuccher
% Created:  12 Apr 2007
% Purpose:  Compute x(k+1) = log( 1 + x(k) )
% Input:    Number of total iterations and x(1)
% Output:   Plot of x(k) versus k and x(k+1) versus x(k)
% Modified:

% Clear all variables
clear

% Change format to long exponential
format long e

% Input the number of total iterations
m=input('Input N (number of iterations): ');

% Input the initial value.
s(1)=input('Input s(1) (initial value): ');

% Set s(1) positive if negative
if(s(1)<0)
  s(1)=abs(s(1));
endif

% Display value of s(1)
```

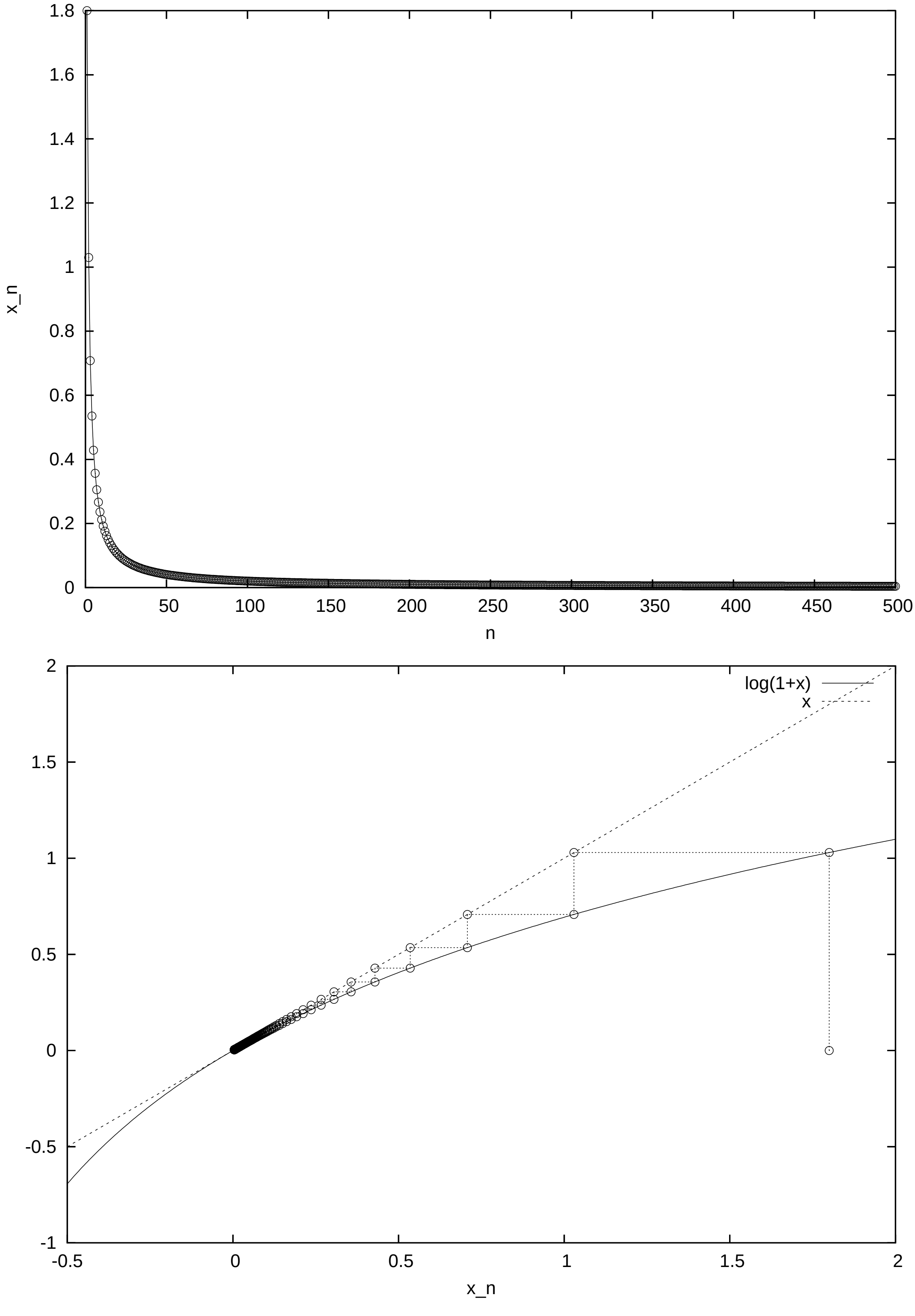

Figura 10: Storia temporale x_n e studio dei punti uniti, $N = 500$ e $x_0 = 1.8$.

```
disp(s(1));

% Assign x and y needed for 2nd plot
x(1)=s(1);
y(1)=0.0;

% Loop on all points
for n=1:1:m-1
  s(n+1)     = log(1.+s(n));
  disp(s(n+1));
  x(2*n)     = s(n);
  y(2*n)     = s(n+1);
  x(2*n+1)   = s(n+1);
  y(2*n+1)   = s(n+1);
end

% Plots s(n) versus n
gset auto
plot(s,'+-g;s(n);');

% Wait for keypressed
disp('Please press a key to continue...');
pause();

disp(s(m))

% Plot f(x), x and path
t=linspace(-.5,2,500);
plot(t,log(1.+t),'-g;log(1+t);',t,t,'-b;x;',x,y,'+-');
```