Analisi Matematica per Informatici – Esercitazione 9
a.a. 2006-2007

Dott. Simone Zuccher

01 Febbraio 2007

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Calcolo di limiti tramite il teorema di de L'Hôpital

1.1 Esercizio

Utilizzando il teorema di de L'Hôpital si calcoli

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin x}{\cos x}$$

1.1.1 Risoluzione

$\displaystyle \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin^2 x} = 0$

1.2 Esercizio

Utilizzando il teorema di de L'Hôpital si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log \sqrt{1+x^2}}{1-\cos x}$$

1.2.1 Risoluzione

$\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\log \sqrt{1+x^2}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\log(1+x^2)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{(1+x^2)\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x\sin x + (1+x^2)\cos x} = 1.$

1.3 Esercizio

Utilizzando il teorema di de L'Hôpital calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} x\log x.$$

1.3.1 Risoluzione

Si noti che sono limiti nella forma $0 \cdot \infty$. Dagli esempi generali visti la scorsa esercitazione si sa già il risultato. Altrimenti, basta osservare che $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ e $\lim_{x\to0^+} x\log x = \lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to0^+} -x = 0$.

1.4 Esercizio

Utilizzando il teorema di de L'Hôpital si calcoli

$$\lim_{x\to0} \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{\log(x+1)} \right)$$

1.4.1 Risoluzione

Derivando una volta si ha $\lim_{x\to0} \frac{(x+1)\log(x+1) - x}{x\log(x+1)} = \lim_{x\to0} \frac{\log(x+1)}{\log(x+1) + x/(x+1)}$. Derivando ulteriormente oppure dividendo numeratore e denominatore per $\log(x+1)$ si ottiene $\lim_{x\to0} \frac{1}{1 + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{x}{\log(x+1)}} = \frac{1}{2}$, ove si è tenuto conto del limite notevole noto.

1.5 Esercizio

Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x}$$

1.5.1 Risoluzione

Raccogliendo x al numeratore e al denominatore si ottiene banalmente $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} = 1$.

Attenzione: se si fosse applicato de L'Hôpital (il limite si presenta nella forma ∞/∞), si sarebbe ottenuto $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1-\sin x} = \nexists$. L'uguaglianza tra i due limiti rappresenta un nonsenso in quanto il limite del rapporto delle derivate non esiste e quindi il teorema di de L'Hôpital non è applicabile e nulla si può dire sul limite originale. Al contrario, la scrittura adottata porterebbe a concludere che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x} = \nexists$, che è falso. Pertanto, l'utilizzo dell'uguale (=) tra un passaggio e l'altro nell'applicazione di de L'Hôpital è prassi ma formalmente è consentito *solo dopo* aver verificato l'effettiva esistenza del limite del rapporto delle derivate.

2 Calcolo di limiti tramite sviluppi in serie di Taylor

Richiami utili al calcolo di limiti tramite sviluppi in serie di Taylor

- Sviluppi di McLaurin (ossia sviluppi di Taylor centrati nell'origine) per le principali funzioni.

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \\
&\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\cdots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\tan x &= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4) \\
\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)
\end{aligned}$$

- Proprietà del simbolo "o piccolo" o. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ si ha:
  1. $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$
  2. $a \cdot o(x^n) = o(x^n)$
  3. $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
  4. $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
  5. $o(o(x^n)) = o(x^n)$
  6. $o(x^n + o(x^n)) = o(x^n)$

2.1 Esercizio

Determinare gli sviluppi di McLaurin (ossia gli sviluppi di Taylor centrati nell'origine) di

$$\frac{1}{1+x} \qquad \text{e} \qquad \sqrt{1+x}$$

arrestati al second'ordine.

2.1.1 Risoluzione

Considerando lo sviluppo di $(1+x)^\alpha$, posto rispettivamente $\alpha = -1$ e $\alpha = 1/2$, si ha $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ e $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + o(x^2)$. Alternativamente, si poteva procedere calcolando le funzioni e le rispettive derivate (fino alla seconda) nel punto $x = 0$.

2.2 Esercizio

Verificare che, per $x \to 0$, valgono gli sviluppi

$$\log(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \qquad \text{e} \qquad e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

2.2.1 Risoluzione

Dagli sviluppi del coseno, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)$, e del logaritmo, $\log(1+y) = y - \dfrac{y^2}{2} + o(y^2)$, posto $1 + y = \cos x \Rightarrow y = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)$, si ha $\log(\cos x) = \left[-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)\right] - \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)\right]^2 + o([x^2]^2) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + o(x^4)$.
Lo stesso ragionamento si applica agli sviluppi dell'esponenziale e del seno.

2.3 Esercizio

Utilizzando gli sviluppi di Taylor si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x + \log \cos x}{x^4}$$

2.3.1 Risoluzione

Dall'esercizio precedente è noto lo sviluppo del $\log \cos x$ per $x \to 0$, pertanto
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x + \log \cos x}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - [1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)] + [-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)]}{x^4} =$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} = -\dfrac{1}{8}$.

2.4 Esercizio

Utilizzando gli sviluppi di Taylor si calcoli

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} + \sin x}{\tan x}$$

2.4.1 Risoluzione

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x} + \sin x}{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x} + o(\sqrt{x})}{x} = +\infty.$

2.5 Esercizio

Utilizzando gli sviluppi di Taylor si calcoli

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x) - \sin x + x^2/2}{x^3}$$

2.5.1 Risoluzione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x) - \sin x + x^2/2}{x^3} =$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{[x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)] - [x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^6)] + x^2/2}{x^3} =$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3/3 + x^3/6 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

2.6 Esercizio

Utilizzando gli sviluppi di Taylor si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

2.6.1 Risoluzione

Dopo aver notato che lo sviluppo del $\sin^2 x = [x - x^3/6 + o(x^4)]^2 = x^2 - x^4/3 + o(x^4)$, si ha $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^4/3 + o(x^4)}{x^4 + o(x^6)} = -\frac{1}{3}$.

2.7 Esercizio

Utilizzando gli sviluppi di Taylor si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2 + \log(1+x^3)}{\sin x - x}$$

2.7.1 Risoluzione

Noti gli sviluppi $e^{x^2} = 1 + x^2 + x^4/2 + o(x^4)$, $\log(1+x^3) = x^3 + o(x^3)$ e $\sin x = x - x^3/6 + o(x^4)$, si ha $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2 + \log(1+x^3)}{\sin x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4/2 + o(x^4) + x^3 + o(x^3)}{-x^3/6 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{-x^3/6 + o(x^4)} = -\frac{1}{6}$.

Attenzione: se si fosse arrestato lo sviluppo di e^{x^2} a $e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$ si sarebbe ottenuto $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2 + \log(1+x^3)}{\sin x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{-x^3/6 + o(x^4)} = \infty$, che è evidentemente sbagliato!

2.8 Esercizio

Utilizzando gli sviluppi di Taylor, discutere al variare del parametro a il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\log(1+x) - 6x + 3x^2 - 2x^3}{x^4}$$

2.8.1 Risoluzione

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\log(1+x) - 6x + 3x^2 - 2x^3}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{a[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)] - 6x + 3x^2 - 2x^3}{x^4} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{(a-6)x + (3-\frac{a}{2})x^2 + (\frac{a}{3}-2)x^3 - \frac{a}{4}x^4}{x^4}.$$

Quindi, per $a = 6$ il limite vale $-\frac{3}{2}$; per $a \neq 6$ vale ∞.

2.9 Esercizio

Utilizzando gli sviluppi di Taylor si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$$

2.9.1 Risoluzione

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\log\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\log\frac{x - x^3/6 + o(x^3)}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\log[1 - x^2/6 + o(x^2)]} =$$
$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{-x^2/6 + o(x^2)}{x^2}} = e^{-1/6}$$

2.10 Esercizio

Utilizzando gli sviluppi di Taylor calcolare i seguenti limiti

$$a)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^{1/x^2} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{1/x^2} \qquad c)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x}$$

2.10.1 Risoluzione

Procedendo come nell'esercizio precedente, si ricava facilmente (a) $e^{-2/3}$; (b) $e^{-3/2}$; (c) 1.

3 Determinazione di eventuali asintoti di una funzione

Richiami utili per la determinazione degli asintoti.

- Asintoti orizzontali.

  1. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$, allora la retta $y = l_1$ si dice asintoto orizzontale destro per $f(x)$.
  2. Se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$, allora la retta $y = l_2$ si dice asintoto orizzontale sinistro per $f(x)$.
  3. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = l$, allora la retta $y = l$ si dice asintoto orizzontale per $f(x)$.

- Asintoti verticali.
  Se una funzione ammette limite (o semplicemente limite destro, oppure limite sinistro) infinito per $x \to x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, allora la retta $x = x_0$ si dice asintoto verticale per $f(x)$ (anche in questo caso si può distinguere tra asintoto da destra e da sinistra nel caso uno dei due limiti sia infinito e l'altro o non lo sia o non esista). In pratica, basta che sia verificata una delle seguenti condizioni $\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = +\infty$ oppure $-\infty$ oppure ∞.

- Asintoto obliquo.
  Se $f(x) \sim mx + q$ per $x \to +\infty$ (oppure per $x \to -\infty$), allora la retta $y = mx + q$ si dice asintoto obliquo per $f(x)$ (anche qui si può distinguere tra asintoto destro e sinistro nel caso siano diversi tra loro). Questa condizione si può riscrivere come $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$ (rispettivamente $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$). Praticamente, m e q vengono determinati come segue, purchè entrambi i limiti esistano finiti:
  $$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$$

3.1 Esercizio

Determinare eventuali asintoti di $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ e $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$.

3.1.1 Risoluzione

$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Asintoto orizzontale $y = 1$, asintoto verticale $x = -1$.
$f(x) = \sqrt{x^2+1}$. Asintoto obliquo $y = x$ per $x \to +\infty$, e altro asintoto obliquo $y = -x$ per $x \to -\infty$.
$f(x) = x + \sqrt[3]{x}$. Non ammette asintoti. Infatti, $f(x) \sim x$ per $x \to +\infty$, ma $[f(x) - x] \to +\infty$ per $x \to +\infty$.