Analisi Matematica per Informatici – Esercitazione 8
a.a. 2006-2007

Dott. Simone Zuccher

24 Gennaio 2007

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Proprietà delle funzioni derivabili

Richiami sulle applicazioni delle derivate utili ai fini degli esercizi.

- Se x_0 è un punto di minimo o di massimo per $f(x)$, allora $f'(x_0) = 0$.
- Teorema di Rolle. Sia $f(x)$ continua su $[a, b]$, derivabile su $]a, b[$ e $f(a) = f(b)$. Allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $f'(\xi) = 0$.
  Geometricamente il teorema assicura che, se sono verificate le ipotesi, esiste almeno un punto $\xi \in]a, b[$ a tangente orizzontale.
- Teorema di Cauchy. Siano $f(x)$ e $g(x)$ continue su $[a, b]$ e derivabili su $]a, b[$. Allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $g'(\xi)[f(b) - f(a)] = f'(\xi)[g(b) - g(a)]$.
  Se, inoltre, $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a, b[$ (il che implica $g(a) \neq g(b)$), allora
  $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$
- Teorema di Lagrange (o del valor medio). Sia $f(x)$ continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$. Allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.
  Geometricamente il teorema assicura che, se sono verificate le ipotesi, esiste almeno un punto $\xi \in]a, b[$ in cui la tangente è parallela alla retta passante per i punti estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.
- Sia $f(x)$ continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$, allora
  1. $f'(x) = 0 \ \forall x \in]a, b[\Rightarrow f(x)$ costante su $[a, b]$.
  2. $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in]a, b[\Rightarrow f(x)$ crescente su $[a, b]$ (strettamente se $f'(x) > 0$).
  3. $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in]a, b[\Rightarrow f(x)$ decrescente su $[a, b]$ (strettamente se $f'(x) < 0$).

- Ricerca di massimi/minini. La condizione necessaria $f'(x_0) = 0$ fornisce l'insieme di possibili punti di massimo e/o minimo. L'analisi della monotonia di $f(x)$ nell'intorno di x_0 o l'uso delle derivate successive calcolate in x_0 (si veda più avanti) permette di determinare eventuali massimi o minimi.

1.1 Esercizio

Si determinino gli intervalli in cui le seguenti funzioni sono crescenti.

$f(x) = x^2 - 3x + 2$	$[x \geq 3/2]$	$f(x) = \log(x^2 + 1)$	$[x \geq 0]$
$f(x) = \log(x^2 - 1)$	$[x > 1]$	$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{2x}$	[mai]
$f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^3 + \dfrac{11}{2}x^2 - 6x + 2$	$[-1 \leq x \leq 2 \vee x \geq 3]$	$\dfrac{2x+1}{x+3}$	$[\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}]$

1.1.1 Risoluzione

Si calcoli la derivata e se ne studi la positività.

1.2 Esercizio

Si determinino eventuali massimi e minimi relativi della funzione $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 3$ in $\mathbb{R}$.

1.2.1 Risoluzione

Essendo $f'(x) = 2(6x^2 - 5x + 1)$ si ha $f'(x) = 0$ per $x_1 = 1/3$ e $x_2 = 1/2$. Dallo studio della monotonia di $f(x)$ si deduce che $f(x)$ è crescente per $x < 1/3$ e $x > 1/2$ e decrescente altrove. Pertanto, $x_1 = 1/3$ è punto di massimo e $x_2 = 1/2$ è punto di minimo.

1.3 Esercizio

Si determinino eventuali massimi e minimi relativi della funzione $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 1$ in $\mathbb{R}$.

1.3.1 Risoluzione

Essendo $f'(x) = 3(x-2)^2$ si ha $f'(x) = 0$ per $x = 2$. Tuttavia, dallo studio della monotonia di $f(x)$ si deduce che $f(x)$ è sempre crescente e quindi $x = 0$ non è né punto di massimo né punto di minimo ma punto di flesso a tangente orizzontale.

1.4 Esercizio

Si dica se il teorema di Rolle è applicabile nei seguenti casi sugli intervalli riportati e, se lo è, si determini/no il/i punto/i ξ previsto/i da tale teorema.

1. $f(x) = -x^2 + 6x$ sull'intervallo $[2, 4]$
2. $f(x) = x^3 - 3x$ sull'intervallo $[0, \sqrt{3}]$
3. $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$ sull'intervallo $[0, 3]$

1.4.1 Risoluzione

1. $\xi = 3$
2. $\xi = 1$. Perché $\xi = -1$ non è accettabile?
3. $\xi = 3/2$

1.5 Esercizio

Si dica se il teorema di Lagrange (o del valor medio) è applicabile nei seguenti casi sugli intervalli riportati e, se lo è, si determini/no il/i punto/i ξ previsto/i da tale teorema.

1. $f(x) = -x^2 + 4$ sull'intervallo $[-2, 1]$
2. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ sull'intervallo $[0, 2]$
3. $f(x) = \dfrac{x+3}{2x-5}$ sull'intervallo $[0, 2]$

1.5.1 Risoluzione

1. $\xi = -1/2$
2. $\xi = (1 + \sqrt{7})/3$. Perché $\xi = (1 - \sqrt{7})/3$ non è accettabile?
3. $\xi = (5 - \sqrt{5})/2$.

1.6 Esercizio

Utilizzando i teoremi sulle derivate, si dimostri che

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

1.6.1 Risoluzione

Si calcoli la derivata di $f(x) = \arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ e si noti che $f'(x)$ è identicamente nulla $\forall x \in \mathbb{R}$. Pertanto $f(x) = \arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ è costante e il valore di tale costante può essere facilmente determinato calcolando $f(0) = 0$. Quindi, $\arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \Rightarrow \arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

1.7 Esercizio

Utilizzando i teoremi sulle derivate, si dimostri che

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ -\pi/2 & x < 0 \end{cases}$$

1.7.1 Risoluzione

Si ragioni come sopra oppure si veda l'esercizio 8.19 delle dispense del Prof. Squassina.

1.8 Esercizio

Utilizzando i teoremi sulle derivate, si dimostri che per $x > -1$ si ha

$$x \geq \log(1+x)$$

1.8.1 Risoluzione

Posto $h(x) = x - \log(1+x)$, definita per $x > -1$, si noti che $h(x)$ ha un minimo assoluto in $x = 0$ essendo $h'(0) = 0$, $h'(0) > 0$ per $x > 0$ e $h'(0) < 0$ per $x < 0$. Essendo inoltre $h(0) = 0$, si conclude che $h(x) \geq 0$ per $x > -1$, ovvero $x \geq \log(1+x)$ per $x > -1$.

1.9 Esercizio

Utilizzando i teoremi sulle derivate, si dimostrino le seguenti disuguaglianze

1. $e^x \geq x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\dfrac{x^2+1}{8} \geq \dfrac{x^2}{(x+1)^2}, \quad x > 0$
3. $x \log_a x \geq (x-1) \log_a e, \quad x > 0, a > 1 \wedge a \neq 1$

1.9.1 Risoluzione

Si proceda come nell'esercizio precedente.

1.10 Esercizio

Verificare che la funzione $f(x) = \sin(e^x)$ soddisfa l'equazione

$$f''(x) - f'(x) + e^{2x} f(x) = 0.$$

1.10.1 Risoluzione

Essendo $f'(x) = e^x \cos(e^x)$ e $f''(x) = e^x \cos(e^x) - e^{2x} \sin(e^x)$ basta sostituire e verificare l'identità.

2 Calcolo di limiti tramite il teorema di de L'Hôpital

Richiami sull'utilizzo del teorema di de L'Hôpital.

- Teorema di de L'Hôpital. Siano $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ due funzioni tali che:

  1. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ (oppure $\pm\infty$)
  2. f, g derivabili su $]a, b[$ e $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a, b[$
  3. esista finito il limite $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

  allora anche il rapporto $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ammette limite e si ha

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Il teorema di de L'Hôpital è applicabile anche nel caso di limite destro e/o sinistro e nel caso $x \to \pm\infty$.

- Il teorema di de L'Hôpital è applicabile anche nel caso in cui il limite di $f(x)$ non esista e $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$.

- Si noti che se $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \infty$ (ossia $f(x) \to 0$ e $g(x) \to \infty$) allora si hanno due possibilità:

  1. applicare de L'Hôpital al rapporto $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{h(x)}$, essendo $h(x) = 1/g(x)$, ottenendo una forma di indecisione del tipo $0/0$
  2. applicare de L'Hôpital al rapporto $\lim_{x\to a} \dfrac{h(x)}{g(x)}$, essendo $h(x) = 1/f(x)$, ottenendo una forma di indecisione del tipo ∞/∞

2.1 Esercizio

Utilizzando il teorema di de L'Hôpital si dimostrino le seguenti uguaglianze.

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^b}{a^x} = 0, \quad \forall a > 1, \forall b > 0$
2. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log_a x}{x^b} = 0, \quad \forall a > 1, \forall b > 0$
3. $\lim_{x\to 0^+} x^b \log_a x = 0, \quad \forall a > 1, \forall b > 0$

Si noti che vale anche $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(\log_a x)^\alpha}{x^b} = 0, \quad \forall a > 1, \forall b > 0, \forall \alpha > 0$

2.1.1 Risoluzione

1. Posto $x^b/a^x = (x/a^{\frac{x}{b}})^b = (x/\alpha^x)^b$ essendo $\alpha = a^{\frac{1}{b}} > 1$, basta mostrare che il limite di x/α^x è zero. Utilizzando de L'Hôpital si ha $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\alpha^x \log \alpha} = 0$.

2. Applicando subito de L'Hôpital si ha $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{\frac{1}{x}\log_a e}{bx^{b-1}} = \dfrac{\log_a e}{bx^b} = 0$.

3. Si noti la forma di indecisione del tipo $0 \cdot \infty$. Riscrivendo $x^b \log_a x = \log_a x / x^{-b}$ ed applicando de L'Hôpital sia arriva subito alla soluzione.

2.2 Esercizio

Utilizzando il teorema di de L'Hôpital si calcolino i seguenti limiti.

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x}$	$[0]$	$\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$	$[\alpha]$
$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x}$	$[+\infty]$	$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(\log x)^3}{x}$	$[0]$
$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log(2x+1)}{\log x}$	$[1]$	$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log(1+\sqrt{x})}{\log x}$	$[1/2]$

2.2.1 Risoluzione

Si applichi il teorema una o più volte.

2.3 Esercizio

Utilizzando il teorema di de L'Hôpital si calcolino i seguenti limiti.

$$1.\ \lim_{x\to 0^+} x^{10} \cdot e^{\frac{1}{x}} \qquad 2.\ \lim_{x\to 0^+} x^x \qquad 3.\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x}$$

2.3.1 Risoluzione

1. Forma di indecisione $0 \cdot \infty$. Si noti che riscrivendo come $e^{1/x}/x^{-10}(\infty/\infty)$ oppure $x^{10}/e^{-1/x}(0/0)$ non si risolve la forma di indecisione. Se, invece, si pone $t = 1/x$, il limite diventa $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{e^t}{t^{10}} = +\infty$.

2. $x^x = e^{x\log x}$, passando al limite si ottine 1.

3. $\sqrt[x]{x} = e^{\frac{1}{x}\log x}$, passando al limite si ottine 1.