Analisi Matematica per Informatici – Esercitazione 7
a.a. 2006-2007

Dott. Simone Zuccher

17 Gennaio 2007

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Derivate

Richiami sulle derivate utili ai fini degli esercizi.

- Definizione. Chiamiamo derivata di f in x, e la indichiamo con $f'(x)$, il limite, *se esiste finito*, del rapporto incrementale, ovvero

$$f'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

  Nel caso si considerino separatemente il limite da destra e da sinistra, si avranno la derivata destra $f'_+(x)$ e la derivata sinistra $f'_-(x)$.

- Punti di non derivabilità. Se il limite del rapporto incrementale è infinito o non esiste, allora la funzione f non è derivabile in x. Si hanno tre casi.

  1. Punti di flesso a tangente verticale: $f'(x) = \pm\infty$ (derivata destra e sinistra coincidono ma sono entrambe $+\infty$ oppure $-\infty$)
  2. Punti di cuspide: $f'_+(x) = +\infty$ e $f'_-(x) = -\infty$ oppure $f'_+(x) = -\infty$ e $f'_-(x) = +\infty$ (derivata destra e sinistra sono opposte ed infinite)
  3. Punti angolosi: $f'_+(x) \neq f'_-(x)$ (derivata destra e sinistra sono diverse, una delle due può anche essere $+\infty$ oppure $-\infty$).

- Regole di derivazione

  1. $D[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$
  2. $D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, da cui: $D[kf(x)] = kf'(x), k \in \mathbb{R}$
  3. $D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, da cui: $D\left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$

4. $D[f(g(h(x)))] = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$
5. $D[f^{-1}(y)] = \dfrac{1}{f'(x)}$, essendo $y = f(x)$ e $f'(x) \neq 0$
6. $D[f(x)^{g(x)}] = f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \log f(x) + g(x) \dfrac{f'(x)}{f(x)} \right]$

- Derivate fondamentali ed altre notevoli ricavate utilizzando quelle fondamentali e le regole di derivazione

derivate fondamentali

$f(x)$	$f'(x)$
$k, k \in \mathbb{R}$	0
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
a^x	$a^x \log a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x} \log_a e = \dfrac{1}{x \log a}$
$\log x$	$\dfrac{1}{x}$
$\log \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

altre derivate notevoli

$f(x)$	$f'(x)$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-(1 + \cot^2 x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

Nota. Si osservi che, in generale, per le funzioni sopra riportate, il dominio di $f'(x)$ coincide con quello di $f(x)$ $(D = D')$. Questo non è vero per $f(x) = x^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$, essendo $f'(x) = +\infty$ in $x = 0$, e per $f(x) = \arcsin x$ oppure $f(x) = \arccos x$, essendo $f'(x)$ infinita in $x = \pm 1$.

1.1 Esercizio

Utilizzando la definizione di derivata, si calcolino $D[1/x]$ e $D[\sqrt{x}]$.

1.1.1 Risoluzione

Si scriva il rapporto incrementale $[f(x+h) - f(x)]/h$ e se ne calcoli il limite per $h \to 0$.

1.2 Esercizio

Utilizzando la definizione di derivata, dire se la funzione $f(x) = |x-a|$, $a \in \mathbb{R}$, è derivabile in $x = a$.

1.2.1 Risoluzione

Si scriva il rapporto incrementale $[f(a+h) - f(a)]/h = |h|/h$ e se ne calcolino i limiti da destra e da sinistra, ossia per $h \to 0^{\pm}$. Siccome tali limiti non coincidono, la funzione f non è derivabile in $x = a$.

1.3 Esercizio

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Cosa si può dire di $D[|f(x)|]$?

1.3.1 Risoluzione

Applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, si ottiene facilmente che se $f(x) \neq 0$ allora $D[|f(x)|] = \operatorname{sgn} f(x) \cdot f'(x)$. Tuttavia, nel caso particolare $f(x) = 0$ la derivata $D[|f(x)|]$ diventa

$$D[|f(x)|] = \lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h)|}{h},$$

che esiste solo se il limite da destra e da sinistra coincidono, ovvero se derivata destra e sinistra sono uguali. Evidentemente, a causa del valore assoluto, questo accade solo se $f'(x) = 0$ e quindi per $f'(x) \neq 0 \wedge f(x) = 0$ $D[|f(x)|]$ non esiste. Il risultato si può riassumere come

$$D[|f(x)|] = \begin{cases} \operatorname{sgn} f(x) \cdot f'(x) & \text{se } f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) = 0 \wedge f'(x) = 0 \\ \nexists & \text{se } f(x) = 0 \wedge f'(x) \neq 0 \end{cases}$$

Tipicamente, i punti tali che $f(x) = 0 \wedge f'(x) \neq 0$ sono punti angolosi per la funzione $|f(x)|$.

1.4 Esercizio

In base al noto teorema, una funzione derivabile è continua. Esibire un esempio di funzione continua ma non derivabile.

1.4.1 Risoluzione

Basta prendere una funzione continua in $x = c$ ma tale che $f'_-(c) \neq f'_+(c)$. Per esempio
$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 1 \\ x^2+1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

1.5 Esercizio

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq c \\ ax + b & \text{se } x > c \end{cases}$$

determinare a e b in modo che $f(x)$ sia derivabile.

1.5.1 Risoluzione

Si noti che $f(x)$ è certamente derivabile per $x > c$ e per $x < c$. Per quanto riguarda $x = c$, applicando la definizione di derivata e osservando che $f(c) = c^2$, si ottengono le seguenti espressioni per le derivate sinistra e destra:

$$f'_-(c) = \lim_{h \to 0} \frac{(c+h)^2 - c^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2c + h = 2c$$

$$f'_+(c) = \lim_{h \to 0} \frac{a(c+h) + b - c^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah + (ac + b - c^2)}{h}$$

Si noti che $f'_-(c)$ è certamente finita, ma affinché lo sia anche $f'_+(c)$ è necessario che $ac + b - c^2 = 0$, che implica $f'_+(c) = a$. Per garantire la derivabilità in $x = c$, però, è necessario anche che $f'_+(c) = f'_-(c)$, ossia $2c = a$. Riassumendo, deve essere $c^2 = ac + b$ e $a = 2c$, da cui $a = 2c$ e $b = -c^2$.

Osservazione Molti studenti fanno l'**errore** di calcolare la derivata come

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq c \\ a & \text{se } x > c \end{cases}$$

ed imporre $f'_+(c) = f'_-(c) \Leftrightarrow 2c = a$. Questo modo è *sbagliato* perchè non tiene conto della definizione di derivata. Infatti, scelti per esempio $a = 1, c = 2, b = 3$ (che soddisfano la condizione $2c = a$), si ottiene la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ x + 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

che non è derivabile in quanto la definizione del limite del rapporto incrementale porta a $f'_+(2) = +\infty$. Per evitare questo, bisogna imporre la continutà della funzione in $x = c$.

1.6 Esercizio

Determinare eventuali punti di non derivabilità della funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

1.6.1 Risoluzione

Essendo $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x = \pm 1$ sono punti del dominio di $f(x)$ che però non appartengono al dominio di $f'(x)$ ($D' \subset D$). Pertanto $f(x)$, pur essendo definita in $x = \pm 1$, non è ivi derivabile.

1.7 Esercizio

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

stabilire se è continua, derivabile, e se la derivata è continua.

1.7.1 Risoluzione

È immediato verificare che $f(x)$ è continua. Per $x \neq 0$ la funzione è derivabile e risulta $f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$. Per $x = 0$ è necessario applicare la definizione, quindi

$$\lim_{h \to 0} \frac{(0+h) \sin \left(\dfrac{1}{0+h} \right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \sin \dfrac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \sin \frac{1}{h} = \nexists.$$

Quindi,

$$f'(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \nexists & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Si noti che $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sin \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{1}{x} \right) = \nexists$, pertanto $f'(x)$ non è continua in $x = 0$.

1.8 Esercizio

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

stabilire se è continua, derivabile, e se la derivata è continua.

1.8.1 Risoluzione

È immediato verificare che $f(x)$ è continua. Per $x \neq 0$ la funzione è derivabile e risulta $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. Per $x = 0$ è necessario applicare la definizione, quindi

$$\lim_{h \to 0} \frac{(0+h)^2 \sin \left(\dfrac{1}{0+h} \right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \dfrac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

Quindi,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Si noti che $\lim\limits_{x \to 0} \left(2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} \right) = \nexists$, pertanto $f'(x)$ non è continua in $x = 0$.

1.9 Esercizio

Discutere la continuità, derivabilità e continuità della derivata prima della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

essendo $\alpha \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

1.9.1 Risoluzione

Si proceda come nei due esercizi precedenti, discutendo inoltre la continuità della derivata.

1.10 Esercizio

Utilizzando i teoremi sulle derivate (regole di derivazione), calcolare le derivate delle seguenti funzioni.

x^3+4x+1	$[3x^2+4]$	$\sqrt{x}$	$[\frac{1}{2\sqrt{x}}]$
$\frac{x^3+2x+1}{x^2+1}$	$[\frac{x^4+x^2-2x+2}{(x^2+1)^2}]$	$\frac{1}{\cos x}$	$[\frac{\sin x}{\cos^2 x}]$
e^{x^2+x}	$[(2x+1)e^{x^2+x}]$	$\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$	$[\frac{1}{x^2-1}]$
x^x	$[x^x(\log x+1)]$	$\log(\log x)$	$[\frac{1}{x\log x}]$
$\sqrt{x}^{\sqrt{x}}$	$[\frac{\sqrt{x}^{\sqrt{x}-1}(\log x+2)}{4}]$	$\log(\log\log(x))$	$[\frac{1}{x\log x\log(\log x)}]$
$(x^3+4)^{\cos x}$	$[(x^3+4)^{\cos x}\left(\frac{3x^2\cos x}{x^3+4}-\sin x\log(x^3+4)\right)]$	e^{e^x}	$[e^{e^x+x}]$
$\sin x^{\cos x}$	$[\sin x^{\cos x-1}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\log(\sin x)\right)]$	$x\arcsin x$	$[\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}]$
$\arccos(1-2x)$	$[\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}]$	$\frac{1}{2}\arccos(1-x^2)$	$[\frac{x}{\lvert x\rvert\sqrt{2-x^2}}]$
$\arctan(\sin x)$	$[\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}]$	$\arctan\frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$[\frac{\cos x(2-\cos^2 x)}{\cos^4 x-\cos^2 x+1}]$

1.11 Esercizio

Si determini l'equazione della tangente al grafico delle seguenti funzioni nei punti indicati a fianco.

1. $f(x) = 5x^2+3x; \quad x_0 = 1$
2. $f(x) = \arctan\frac{2-\cos x}{1+\cos x}; \quad x_0 = \frac{\pi}{3}$
3. $f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2}; \quad x_0 = -2$

1.11.1 Risoluzione

1. $y = 13x - 5$
2. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{(9-4\sqrt{3})\pi}{36}$
3. $x + 2 = 0$

1.12 Esercizio

Determinare l'espressione della derivata n-esima delle seguenti funzioni.

1. $f(x) = e^x$
2. $f(x) = 3^x$
3. $f(x) = e^{-x}$
4. $f(x) = \log x$
5. $f(x) = \sin x$
6. $f(x) = \cos x$
7. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}, \quad ad \neq bc$

1.12.1 Risoluzione

1. e^x
2. $3^x(\log 3)^n$
3. $(-1)^n e^{-x}$
4. $(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$
5. $\sin(x + n\pi/2)$
6. $\cos(x + n\pi/2)$
7. $(-1)^{n-1}c^{n-1}n!\dfrac{(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$