Analisi Matematica per Informatici – Esercitazione 5
a.a. 2006-2007

Dott. Simone Zuccher

29 Novembre 2006

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

Principali limiti notevoli di successioni:

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a > 1 \\ 1 & \text{se} \quad a = 1 \\ 0 & \text{se} \quad -1 < a < 1 \\ \nexists & \text{se} \quad a \leq -1 \end{cases}$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^b = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad b > 0 \\ 1 & \text{se} \quad b = 0 \\ 0 & \text{se} \quad b < 0 \end{cases}$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1 \qquad a > 0$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = \lim_{n\to+\infty} n^{b/n} = 1 \qquad \forall b \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^b} = 0 \qquad b > 0$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \qquad a > 1, b > 0$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad a > 1, \quad n! := n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1, \quad 0! := 1, \quad 1! := 1$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

1 Verifica di limiti di successioni

Per la verifica di limite di successione si utilizzano le stesse tecniche della verifica del limite di funzione con la semplificazione che $n \to +\infty$ e quindi si tratterà sempre di trovare un $\bar{x}$ tale che $\forall n > \bar{x}$ si abbia che...

1.1 Esercizio

Si verifichi, tramite la definizione di limite, che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2}$$

1.1.1 Risoluzione

Scelto $\epsilon > 0$ si ottiene $\bar{x} = 5/(4\epsilon) - 5/2$ tale che $\forall n > \bar{x}$ si ha $\left|\frac{n}{2n+5} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$.

1.2 Esercizio

Si verifichi, tramite la definizione di limite, che

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 - 1 = +\infty$$

1.2.1 Risoluzione

Scelto $M > 0$ si ottiene $\bar{x} = \sqrt{M+1}$ tale che $\forall n > \bar{x}$ si ha $n^2 - 1 > M$.

1.3 Esercizio

Si verifichi, tramite la definizione di limite, che

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - n^2 = -\infty$$

1.3.1 Risoluzione

Scelto $M > 0$ si ottiene $\bar{x} = \sqrt{M+1}$ tale che $\forall n > \bar{x}$ si ha $1 - n^2 < -M$.

2 Calcolo di limiti di successioni

Per il calcolo di limite di successione si utilizzano le stesse tecniche di calcolo del limite di funzione, ai quali si rimanda per una trattazione completa dei vari casi. Qui sono riportati solo alcuni esempi nei quali ci si riconduce all'utilizzo dei limiti notevoli per successioni e alle tecniche classiche.

2.1 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} e^n + 2^n - 3^n$$

2.1.1 Risoluzione

$-\infty$.

2.2 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\sqrt{\pi}}$$

2.2.1 Risoluzione

$+\infty$.

2.3 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-e}$$

2.3.1 Risoluzione

0.

2.4 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\pi}}$$

2.4.1 Risoluzione

1.

2.5 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\pi n^e}$$

2.5.1 Risoluzione

1.

2.6 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}$$

2.6.1 Risoluzione

-1.

2.7 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$$

2.7.1 Risoluzione

1.

2.8 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n+1)}{(\log n)^2}$$

2.8.1 Risoluzione

0.

2.9 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-\log n}{n!-n^n}$$

2.9.1 Risoluzione

0.

2.10 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3^{(n+1)/2}}$$

2.10.1 Risoluzione

Dopo aver osservato che $\dfrac{2^n}{3^{(n+1)/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ si ha $+\infty$.

2.11 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$$

2.11.1 Risoluzione

Dopo aver osservato che $\sqrt[n]{2^n + 3^n} = \sqrt[n]{3^n}\,\sqrt[n]{1 + (2/3)^n}$ si ha 3.

2.12 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{3758} - n!}{e^n - n^{123}}$$

2.12.1 Risoluzione

$-\infty$.

2.13 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n \cdot 3^{n+1} + n^5 + 1) \cdot n!}{(3^n + 2^n) \cdot (n+1)!}$$

2.13.1 Risoluzione

3.

2.14 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\log n)^3}{n}$$

2.14.1 Risoluzione

0.

2.15 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n-2} - 2^{\sqrt{n^2-1}}$$

2.15.1 Risoluzione

Dopo aver raccolto $2^{n-2}(1 - 2^{\sqrt{n^2-1}-(n-2)})$ e notato che $[\sqrt{n^2-1} - (n-2)] \to 2$ per $n \to +\infty$, si ottiene $-\infty$.

2.16 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1}$$

2.16.1 Risoluzione

e.

2.17 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^{n}$$

2.17.1 Risoluzione

e^2.

2.18 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-1}-2n^{-2}}{3n^{-3}-4n^{-4}}$$

2.18.1 Risoluzione

$+\infty$.

2.19 Esercizio

Determinare, al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(e+\frac{1}{n^\alpha})^{n^2}}{e^{n^2}}$$

2.19.1 Risoluzione

$\alpha = 2 \Rightarrow e^{1/e}$, $\alpha = 2 \Rightarrow e^0 = 1$, $0 < \alpha < 2 \Rightarrow +\infty$.

2.20 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(nx)}{\sin x}$$

2.20.1 Risoluzione

n.

2.21 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x}$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$.

2.21.1 Risoluzione

n pari. $y = x - \pi \Rightarrow \lim_{x \to \pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin(ny + n\pi)}{\sin(y + \pi)} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin(ny)}{-\sin y} = -n$.

n dispari. $\lim_{y \to 0} \frac{\sin(ny + n\pi)}{\sin(y + \pi)} = n$.

2.22 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n \to +\infty} [1 + (-1)^n] \left(\frac{n+1}{n} \right)^n + [1 - (-1)^n] \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

2.22.1 Risoluzione

Si noti che per n pari si ottiene $\lim_{n \to +\infty} 2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 2e$ mentre per n dispari si ha $\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{2}{e}$.

Essendo i due limiti (su due restrizioni) diversi tra loro, la successione non ammette limite.

2.23 Esercizio

Dimostrare che il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1}\cos x$$

non esiste, esibendo due successioni $\{a_n\}, \{b_n\} \to +\infty$ tali che $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(b_n)$.

2.23.1 Risoluzione

Per esempio se si scelgono $a_n = \pi/2 + 2n\pi$ e $b_n = 2n\pi$ si ottiene $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = 0$ e $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = 1$.

3 Ordine di infinito e di infinitesimo

Richiami di teoria utili per gli esercizi:

- $f(x)$ si dice *infinitesimo* per $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.
- $f(x)$ si dice *infinito* per $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} f(x) = (\pm)\infty$.
- Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni *infinitesime* per $x \to x_0$. Allora il limite del loro rapporto può dare una delle seguenti possibilità:

  1. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $\Rightarrow$ f è infinitesimo di ordine superiore rispetto a g
  2. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0, l \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f è infinitesimo dello stesso ordine rispetto a g
  3. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = (\pm)\infty$ $\Rightarrow$ f è infinitesimo di ordine inferiore rispetto a g
  4. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \nexists$ $\Rightarrow$ f e g non sono confrontabili

- Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni *infinite* per $x \to x_0$. Allora il limite del loro rapporto può dare una delle seguenti possibilità:

1. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad \Rightarrow$ f è infinito di ordine inferiore rispetto a g

2. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0, l \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow$ f è infinito dello stesso ordine rispetto a g

3. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = (\pm)\infty \qquad \Rightarrow$ f è infinito di ordine superiore rispetto a g

4. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \nexists \qquad \Rightarrow$ f e g non sono confrontabili

- Il simbolo $o(\cdot)$ ("o piccolo di ..."). Diremo (impropriamente) che $f(x) = o(g(x))$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, ovvero $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0$.
- Il simbolo $O(\cdot)$ ("o grande di ..."). Diremo (impropriamente) che $f(x) = O(g(x))$ se il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ è definitivamente limitato per $x \to x_0$.
- Il simbolo $\sim$ ("asintotico a ..."). Diremo che $f(x) \sim g(x)$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, ovvero $f(x)$ è un infinitesimo o infinito dello stesso ordine rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0$.

3.1 Esercizio

Si verifichi che

- $\sin x \sim x$ per $x \to 0$
- $\tan x \sim x$ per $x \to 0$
- $\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$
- $e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$
- $e^{-x^2} - 1 \sim -x^2$ per $x \to 0$
- $\log(1 - \sin x) \sim -x$ per $x \to 0$
- $\sqrt{x^2 - 1} \sim x$ per $x \to +\infty$
- $\sqrt{x^2 - 1} + x \sim 2x$ per $x \to +\infty$
- $\log x + x \sim x$ per $x \to +\infty$
- $x^2 + x + \sqrt{x} \sim x^2$ per $x \to +\infty$
- $x^2 + x + \sqrt{x} \sim \sqrt{x}$ per $x \to 0$

3.1.1 Risoluzione

Si calcolino i limiti come da definizione.

3.2 Esercizio

Utilizzando il simbolo di uguaglianza asintotica $\sim$ determinare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n - \log n + (-1)^n + \frac{1}{n}}{n^2 + 10\sin n - \frac{1}{\log n}}$$

3.2.1 Risoluzione

0.

3.3 Esercizio

Utilizzando il simbolo di uguaglianza asintotica $\sim$ determinare

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sin^2 x}{x^3 \log(1+x)}$$

3.3.1 Risoluzione

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sin^2 x}{x^3 \log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2 \cdot x^2}{x^3 \cdot x} = \frac{1}{2}$

3.4 Esercizio

Determinare l'ordine di infinitesimo $a > 0$ per $x \to 0$, rispetto all'infinitesimo campione x, di $f(x) = x^2 + 2\sin(3x^3) + 1 - e^{-x^2}$ e la funzione $g(x) = kx^a$ tale che $f(x) \sim g(x)$ (parte principale di $f(x)$).

3.4.1 Risoluzione

$\sin(3x^3) \sim 3x^3$ e $1 - e^{-x^2} \sim x^2$, quindi $x^2 + 2\sin(3x^3) + 1 - e^{-x^2} \sim x^2 + 6x^3 + x^2 = 2x^2 + o(x^3) \sim 2x^2$. Pertanto la parte principale è $2x^2$ e l'ordine è 2.

4 Funzioni continue

Richiami di teoria utili per gli esercizi:

- Definizione di continuità nel punto x_0: $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Continuità da sinistra nel punto x_0: $\displaystyle\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- Continuità da destra nel punto x_0: $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

- Una funzione si dice continua su un intervallo $[a;b]$ se è continua in ogni punto dell'intervallo $]a;b[$, continua da sinistra in $x=a$ e continua da destra in $x=b$.

- Discontinuità di prima specie: limite destro e sinistro finiti ma diversi tra loro. Salto $S = \left| \lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x) \right|$.

- Discontinuità di seconda specie: almeno uno dei due limiti (destro o sinistro) o è infinito o non esiste.

- Discontinuità di terza specie (o eliminabile): il limite destro e sinistro coincidono e sono finiti (il limite esiste finito), ma $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$.
  In tal caso la esiste un prolungamento per continuità $g(x)$ della $f(x)$
  $$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

4.1 Esercizio

Si verifichi la continutà o meno della funzione
$$f(x) = \begin{cases} x\cos(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

4.1.1 Risoluzione

$f(x)$ è continua perchè $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$.

4.2 Esercizio

Si verifichi la continutà o meno della funzione
$$f(x) = \frac{1}{2 - e^{1/x}}$$

4.2.1 Risoluzione

$x = 0$: discontinuità di prima specie essendo $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1/2$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (salto $S = 1/2$).
$x = 1/\log 2$: discontinuità di seconda specie essendo $\lim_{x\to(1/\log 2)^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to(1/\log 2)^+} f(x) = +\infty$.

4.3 Esercizio

Determinare per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \\ 3 - ax^2 & x > 1 \end{cases}$$
è continua in $x = 1$.

4.3.1 Risoluzione

$a = 1$.

4.4 Esercizio

Determinare per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+ax)}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

è continua in $x = 0$.

4.4.1 Risoluzione

$a = 2$.

4.5 Esercizio

Studiare la continuità della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$$

.

4.5.1 Risoluzione

Discontinuità eliminabile in $x = 2$. Il prolungamento è

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} & x \neq 2 \\ \\ -1 & x = 2 \end{cases}$$

4.6 Esercizio

Dire quante soluzioni ammette l'equazione $e^x + x^3 = 0$ e determinare un intervallo ragionevole in cui esse sono localizzate.

4.6.1 Risoluzione

$e^x = -x^3$, una sola soluzione, $x_0 \in [-1; 0]$.