

Analisi Matematica per Informatici – Esercitazione 4

a.a. 2006-2007

Dott. Simone Zuccher

22 Novembre 2006

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

Richiami utili per gli esercizi:

- Forme indeterminate: $+\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, 0^0 , $(\pm\infty)^0$ e $1^{\pm\infty}$.
- Principali limiti notevoli (si lascia allo studente la loro dimostrazione):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\log a}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

1 Verifica di limiti

1.1 Esercizio

Si verifichi, tramite la definizione di limite, che

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = 3$$

1.1.1 Risoluzione

Scelto $\epsilon > 0$ si ottiene $1 - \epsilon/2 < x < 1 + \epsilon/2$

1.2 Esercizio

Si verifichi, tramite la definizione di limite, che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x} = 1$$

1.2.1 Risoluzione

Scelto $\epsilon > 0$ si ottiene $x < -1/\epsilon$

1.3 Esercizio

Si verifichi, tramite la definizione di limite, che

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{4x - x^2 - 4} = -\infty$$

1.3.1 Risoluzione

Scelto $M > 0$ si ottiene $2 - 1/\sqrt{M} < x < 2 + 1/\sqrt{M}$.

1.4 Esercizio

Si verifichi, tramite la definizione di limite, che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

1.4.1 Risoluzione

Scelto $M > 0$ si ottiene $x < -\sqrt[3]{M}$.

2 Calcolo di limiti

2.1 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 5}{2x^2 + 1}$$

2.1.1 Risoluzione

-1.

2.2 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

2.2.1 Risoluzione

$+\infty$.

2.3 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

2.3.1 Risoluzione

-1 .

2.4 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

2.4.1 Risoluzione

2 .

2.5 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 - x}{x^2 + 2x}$$

2.5.1 Risoluzione

$-1/2$.

2.6 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x$$

2.6.1 Risoluzione

$+\infty$.

2.7 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x$$

2.7.1 Risoluzione

$+\infty$.

2.8 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - x^3 + x + 1}{3x^3 + 1}$$

2.8.1 Risoluzione

$+\infty$.

2.9 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 2}{1 + x - 3x^3}$$

2.9.1 Risoluzione

$-1/3$.

2.10 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{3x^3 + 1}$$

2.10.1 Risoluzione

0.

2.11 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

2.11.1 Risoluzione

0.

2.12 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{2x^2 - x - 1}$$

2.12.1 Risoluzione

$$1/(2\sqrt{2}).$$

2.13 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{2x^2 - x - 1}$$

2.13.1 Risoluzione

$$-1/(2\sqrt{2}).$$

2.14 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

2.14.1 Risoluzione

$$0.$$

2.15 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + \cos(e^x)}{4x}$$

2.15.1 Risoluzione

$$+\infty.$$

2.16 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

2.16.1 Risoluzione

\nexists perché il limite destro vale $+\infty$ e quello sinistro $-\infty$.

2.17 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$$

2.17.1 Risoluzione

\nexists perché il limite destro vale $+\infty$ e quello sinistro 0.

2.18 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin^2 x + \sin x - 4}{\cos x}$$

2.18.1 Risoluzione

Si noti che $3 \sin^2 x + \sin x - 4 = (\sin x - 1)(3 \sin x + 4)$, da cui il limite 0.

2.19 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\alpha} \frac{\cos x - \cos \alpha}{x - \alpha}$$

2.19.1 Risoluzione

Ricordando che $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$, si ha $-\sin \alpha$.

2.20 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

2.20.1 Risoluzione

1/2

2.21 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{x+2} - 1}{x + 2}$$

2.21.1 Risoluzione

1

2.22 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{x+1} - 1}{5x}$$

2.22.1 Risoluzione

1/25

2.23 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-3}{x+4} \right)^{\frac{x^2-1}{2x}}$$

2.23.1 Risoluzione

$1/\sqrt{e^7}$

2.24 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{\sqrt[6]{x^2+1} - 1}$$

2.24.1 Risoluzione

6

2.25 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{\sqrt[7]{x} - 1}$$

2.25.1 Risoluzione

Dopo aver posto $y = x - 1$, si ottiene $7/5$

2.26 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{\log(1 + 3x^2)}$$

2.26.1 Risoluzione

1/3

2.27 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2^x - 3^x)}{1 - \cos(3x)}$$

2.27.1 Risoluzione

$\frac{2}{9} \log(2/3)$

2.28 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{x/(1-x)}$$

2.28.1 Risoluzione

1/e

2.29 Esercizio

Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{1/x}$$

2.29.1 Risoluzione

\nexists perché il limite destro vale 0 e quello sinistro $+\infty$.