Analisi Matematica per Informatici – Esercitazione 3
a.a. 2006-2007

Dott. Simone Zuccher

15 Novembre 2006

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Principio di induzione

Supponiamo di avere una successione P_n di proposizioni ($n \in \mathbb{N}$). P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ se

(i) P_0 è vera

(ii) $\forall k \in \mathbb{N} : P_k \Rightarrow P_{k+1}$

1.1 Esercizio

Facendo uso del principio di induzione dimostrare la formula

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

1.1.1 Risoluzione

- La formula è certamente vera per $n = 0$ in quanto $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1$ e $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$.
- Supponiamo che la formula sia vera per $n = k$ e dimostriamo che questo implica la veridicità anche per $n = k+1$. Per ipotesi, quindi, $1+2+4+8+\cdots+2^k = 2^{k+1}-1$. Sommando a entrambi i membri 2^{k+1} si ha $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$. In conclusione, abbiamo dimostrato che se la formula è vera per $n = k$ allora lo è anche per $n = k + 1$.

1.2 Esercizio

Facendo uso del principio di induzione dimostrare la formula

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

1.2.1 Risoluzione

- Si noti che in questo caso la formula considera solo $n \geq 1$, per cui la prima verifica va fatta per $n = 1$. In questo caso la formula è certamente vera in quanto $\sum_{k=1}^{1} k = 1$ e $\frac{1(1+1)}{2} = 1$.
- Supponiamo che la formula sia vera per $n = k$ e dimostriamo che questo implica la veridicità anche per $n = k+1$. Per ipotesi, quindi, $1+2+3+4+5+\cdots+k = k(k+1)/2$. Sommando a entrambi i membri $k+1$ si ha $1+2+3+4+5+\cdots+k+(k+1) = k(k+1)/2+(k+1) = (k+1)(k/2+1) = (k+1)(k+2)/2$. Quest'ultima espressione non è altro che la formula calcolata in $n = k+1$, pertanto abbiamo dimostrato che $P_k \Rightarrow P_{k+1}$.

1.3 Esercizio

Facendo uso del principio di induzione dimostrare che per $q \neq 1$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

1.3.1 Risoluzione

- Per $n = 0$ la formula è vera perché $\sum_{k=0}^{0} q^k = 1$ e $\frac{1-q^{0+1}}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1$.
- Supponiamo che la formula sia vera per $n = k$ e dimostriamo che questo implica la veridicità anche per $n = k+1$. Per ipotesi, quindi, $1+q+q^2+q^3+\cdots+q^k = (1-q^{k+1})/(1-q)$. Sommando a entrambi i membri q^{k+1} si ha $1+q+q^2+q^3+\cdots+q^k+q^{k+1} = (1-q^{k+1})/(1-q)+q^{k+1} = (1-q^{k+1}+q^{k+1}-q\cdot q^{k+1})/(1-q) = (1-q^{k+2})/(1-q)$. Quest'ultima espressione non è altro che la formula calcolata in $n = k+1$, pertanto abbiamo dimostrato che $P_k \Rightarrow P_{k+1}$.

1.4 Esercizio

Facendo uso del principio di induzione dimostrare le seguenti formule

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (b) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ (c) $\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$

1.4.1 Risoluzione

Eseguire gli stessi passi degli esercizi precedenti. La (c) si può dimostrare velocissimamente anche in altro modo: quale?

1.5 Esercizio

Facendo uso del principio di induzione dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > n$.

1.5.1 Risoluzione

- Per $n = 0$ si ha $2^0 > 0 \Leftrightarrow 1 > 0$, che è vera.
- Supponiamo che la formula sia vera per $n = k$ e dimostriamo che questo implica la veridicità anche per $n = k + 1$. Per ipotesi, quindi, $2^k > k$. Moltiplicando per 2 la disuguaglianza a destra e sinistra $(2 > 0)$ si ha $2^{k+1} > 2k$. Si osservi ora che, $\forall k \geq 1$, è sempre $2k \geq k + 1$. Pertanto $2^{k+1} > 2k \geq k + 1 \Rightarrow 2^{k+1} > k + 1$. Abbiamo quindi dimostrato che $P_k \Rightarrow P_{k+1}$.

1.6 Esercizio

Facendo uso del principio di induzione dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}, a \geq -1 : (1+a)^n \geq 1+na$ (disuguaglianza di Bernoulli).

1.6.1 Risoluzione

- Per $n = 0$ si ha $(1 + a)^0 \geq 1 + 0 \Leftrightarrow 1 \geq 1$, che è vera.
- Supponiamo che la formula sia vera per $n = k$ e dimostriamo che questo implica la veridicità anche per $n = k+1$. Per ipotesi, quindi, $(1+a)^k \geq 1+ka$. Moltiplicando per $(1 + a)$ la disuguaglianza a destra e sinistra $(1 + a > 0)$ si ha $(1 + a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a) = 1+a+ka+ka^2 = 1+(k+1)a+ka^2$. Si osservi ora che, $\forall k \geq 0$, è sempre $ka^2 \geq 0$ e quindi $1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a$. Sfruttando quest'ultima disuguaglianza si ha quindi $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$, ossia $P_k \Rightarrow P_{k+1}$.

1.7 Esercizio

Facendo uso del principio di induzione dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ valgono i seguenti raffinamenti della disuguaglianza di Bernoulli:

$$\text{(a)} \quad (1 + a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 \qquad a \geq 0$$

$$\text{(b)} \quad (1 + a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3 \quad a \geq -1$$

1.7.1 Risoluzione

Si seguano gli stessi passi dell'esercizio 1.6, osservando nel caso (a) che $a^3 \geq 0$ e nel caso (b) $a^4 \geq 0$.

1.8 Esercizio

Facendo uso del principio di induzione dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ il numero $n^2 + n$ è pari.

1.8.1 Risoluzione

Per $n = 1$ è certamente vero: $1^2 + 1 = 2$, pari.
Assumendo che sia vero per $n = k$, dimostriamo che lo è anche per $n = k+1$. Se k^2+k è pari, allora la proposizione valutata in $n = k+1$ diventa $(k+1)^2+(k+1) = k^2+3k+2 = (k^2 + k) + 2(k + 1)$, ma questo è un numero pari essendo pari sia $k^2 + k$ (per ipotesi) sia $2(k + 1)$.

1.9 Esercizio

Facendo uso del principio di induzione dimostrare l'uguaglianza delle formule

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2$$

1.9.1 Risoluzione

Si dimostri dapprima che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (vedi esercizio 1.2) e quindi che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

1.10 Esercizio

Facendo uso del principio di induzione dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

1.10.1 Risoluzione

Si proceda come noto.

2 Numeri complessi (forma cartesiana)

Definizioni utili per gli esercizi:

- Chiamiamo numero complesso z la coppia ordinata (x, y) tale che $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Scriveremo $z \in \mathbb{C}$.
- Per definizione: $0 := (0, 0)$, $1 := (1, 0)$, $i := (0, 1)$.
- Definite le operazioni di somma, differenza, prodotto e divisione tra numeri complessi, si verifica facilmente che $i^2 = -1$.
- Parte reale di z: $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(x, y) = x$; parte immaginaria di z: $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(x, y) = y$.
- Forma cartesiana equivalente. $z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = (x, 0) + i \cdot (y, 0) = x + iy$
- Complesso coniugato di $z \in \mathbb{C}$. $\overline{z} := (x, -y) = x - iy$
- Modulo di $z \in \mathbb{C}$. $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$

2.1 Esercizio

Dati $z = 1 + 2i$ e $w = 2 - i$, determinare $z + w$, $w - z$, zw, $\bar{z}w$, $|z|$, $|w|$, $z\bar{z}$, z^2, z^2w, z/w, w/z, z^2w.

2.1.1 Risoluzione

- $z + w = (1 + 2i) + (2 - i) = 3 + i$
- $w - z = (2 - i) - (1 + 2i) = 1 - 3i$
- $zw = (1 + 2i) \cdot (2 - i) = 2 - i + 4i - 2i^2 = 2 + 3i + 2 = 4 + 3i$
- $\bar{z}w = (1 - 2i) \cdot (2 - i) = 2 - i - 4i + 2i^2 = 2 - 5i - 2 = -5i$
- $|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
- $|w| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$
- $z\bar{z} = (1 + 2i) \cdot (1 - 2i) = 1^2 - 4i^2 = 1 + 4 = 5$
- $z^2 = (1 + 2i)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2i + 4i^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$
- $z^2w = (1 + 2i)^2 \cdot (2 - i) = (-3 + 4i) \cdot (2 - i) = -6 + 3i + 8i - 4i^2 = -2 + 11i$
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{1 + 2i}{2 - i} = \dfrac{1 + 2i}{2 - i} \cdot \dfrac{2 + i}{2 + i} = \dfrac{2 + i + 4i + 2i^2}{4 - i^2} = \dfrac{5i}{5} = i$
- $\dfrac{w}{z} = \dfrac{2 - i}{1 + 2i} = \dfrac{2 - i}{1 + 2i} \cdot \dfrac{1 - 2i}{1 - 2i} = \dfrac{2 - 4i - i + 2i^2}{1 - 4i^2} = \dfrac{-5i}{5} = -i$, oppure si noti che $\dfrac{w}{z} = \dfrac{1}{\frac{z}{w}} = \dfrac{1}{i} = -i$

2.2 Esercizio

Sia $w = z + z\bar{z} - z^2 + 2i + \bar{z} - 2(\text{Im}(z))^2$. Determinare il luogo geometrico dei punti del piano complesso (piano di Gauss) tali che $\text{Re}(w) = 3$ e $\text{Im}(w) = 0$.

2.2.1 Risoluzione

$w = z+z\bar{z}-z^2+2i+\bar{z}-2(\text{Im}(z))^2 = x+iy+x^2+y^2-(x^2+2xyi-y^2)+2i+x-iy-2y^2 = 2x - 2xyi + 2i = 2x + (-2xy + 2)i$. Pertanto:
$\text{Re}(w) = 3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = 3/2$, ossia retta verticale.
$\text{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow -2xy+2 = 0 \Leftrightarrow xy = 1$, ossia iperbole equilatera riferita ai propri asintoti.

2.3 Esercizio

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$2iz + 3 - 4i = 0$$

2.3.1 Risoluzione

Il modo più veloce è di ricavare z seguendo il procedimento tipico delle equazioni di primo grado. Si ha quindi $2iz = -3 + 4i$ da cui $z = (-3 + 4i)/2i$ e quindi (motiplicando numeratore e denominatore per i) $z = 2 + 3i/2$.
Un altro modo consiste nel sostituire $z = x+iy$ e separare la parte reale dell'equazione da quella immaginaria, ottenendo in tal modo un sistema di due equazioni in due incognite. Nel caso in esame si ha quindi $2i(x + iy) + 3 - 4i = 0 \Leftrightarrow 2ix - 2y + 3 - 4i = 0 \Leftrightarrow (3 - 2y) + (2x - 4)i = 0$, ossia:

$$\begin{cases} 3 - 2y = 0 \\ 2x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3/2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad z = 2 + 3i/2$$

Si noti che, se ci si limita ai numeri complessi in forma cartesiana, questo ultimo metodo risulta talvolta l'unico o quantomeno il più efficace (si veda l'esercizio seguente).

2.4 Esercizio

Risolvere in $\mathbb{C}$ le equazioni

$$z^2 - 4 = 0 \qquad\qquad z^2 + 4 = 0$$

2.4.1 Risoluzione

$z^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = 4 \Rightarrow z = \pm 2$.
$z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4 \Rightarrow z = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{2} = \pm i\sqrt{2}$.

2.5 Esercizio

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^2 - 5 - 12i = 0$$

2.5.1 Risoluzione

Risolvendo classicamente l'equazione di secondo grado si ottiene $z = \pm\sqrt{5+12i}$. Tuttavia, se ci limitiamo alla forma cartesiana dei numeri complessi, $\sqrt{5+12i}$ non è facilmente determinabile (lo sarebbe introducendo la forma trigonometrica o esponenziale dei numeri complessi). Tornando all'equazione iniziale e introducendo $z = x + iy$ si ha quindi $z^2 - 5 - 12i = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xyi - y^2 = 5 + 12i$, ossia

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6/y \\ 36/y^2 - y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6/y \\ y^4 + 5y^2 - 36 = 0 \end{cases}$$

$y^4 + 5y^2 - 36 = 0 \Rightarrow y^2 = -9 \vee y^2 = 4$ ma si noti che $x, y \in \mathbb{R}$ e quindi $y^2 = -9$ non è accettabile. $y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow x = \pm 3$ Quindi, $z^2 - 5 - 12i = 0 \Rightarrow z = \pm(3 + 2i)$.

2.6 Esercizio

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$iz^2 - z - 3 + i = 0$$

2.6.1 Risoluzione

Applicando la fomula per le equazioni di secondo grado si ottiene

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(i) \cdot (-3+i)}}{2i} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12i + 4}}{2i} = \frac{1 \pm \sqrt{5+12i}}{2i}$$

Siccome dall'esercizio 2.5 è noto il valore di $\sqrt{5+12i}$, le soluzioni sono

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{5+12i}}{2i} = \frac{1 \pm (3+2i)}{2i} \Rightarrow z = (1 - 2i) \vee z = (-1 + i)$$

Si noti che, in generale, $\sqrt{\Delta}$ nell'equazione di secondo grado in z non è noto e il suo calcolo richiede la soluzione di un sistema nonlineare di due equazioni in due inconite. Pertanto, il lavoro richiesto è equivalente a sostituire direttamente nell'equazione di partenza $z = x + iy$. Così facendo si ottiene $iz^2 - z - 3 + i = 0 \Leftrightarrow i(x^2 + 2xyi - y^2) - x - iy - 3 + i \Leftrightarrow (-2xy - x - 3) + (x^2 - y^2 - y + 1)i = 0$, ossia

$$\begin{cases} -2xy - x - 3 = 0 \\ x^2 - y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3/(2y+1) \\ (-3/(2y+1))^2 - y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \cdots$$

Che porta, come si verifica facilmente, a $z = (1 - 2i) \vee z = (-1 + i)$.

2.7 Esercizio

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$iz^2 - z\bar{z} + 9 + 3i = 0$$

2.7.1 Risoluzione

L'equazione diventa $i(x^2+2xyi-y^2)-(x^2+y^2)+9+3i=0$, da cui $-(x^2+y^2+2xy-9)+(x^2-y^2+3)i=0$, ovvero

$$\begin{cases} x^2+y^2+2xy-9=0 \\ x^2-y^2+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=9 \\ (x+y)(x-y)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\pm 3 \\ (x+y)(x-y)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases} \cup \begin{cases} x+y=-3 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \cup \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$$

da cui $z=\pm(1+2i)$.

2.8 Esercizio

Calcolare, in $\mathbb{C}$, le radici terze di i.

2.8.1 Risoluzione

Il problema si riduce alla soluzione dell'equazione $z^3=i$, ovvero
$(x+iy)^3 \Leftrightarrow x^3+3x^2yi-3xy^2+y^3i^3-i=0 \Leftrightarrow (x^3-3xy^2)+(3x^2y-y^3-1)i=0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x^3-3xy^2=0 \\ 3x^2y-y^3-1=0 \end{cases}$$

Dalla prima si ha $x(x^2-3y^2)=0$, il che implica $x=0$ oppure $x=\pm\sqrt{3}y$ che, sostituiti nella seconda danno rispettivamente $y=-1$ e $y=1/2$. Le tre radici sono quindi $z_1=-i$, $z_2=\sqrt{3}/2+i/2$ e $z_3=-\sqrt{3}/2+i/2$.

2.9 Esercizio

Calcolare, in $\mathbb{C}$, le radici quarte di i.

2.9.1 Risoluzione

Si proceda come nell'esercizio precedente e si ricordi, o tramite il triangolo di Tartaglia o tramite il binomio di Newton, che $(a+b)^4=\dots$.

2.10 Esercizio

Calcolare, in $\mathbb{C}$, le radici quarte di -4.

2.10.1 Risoluzione

Bisogna risolvere l'equazione $z^4=-4$, che implica $z^2=\pm\sqrt{-4}=\pm 2i$. Da $z^2=2i$ si ottiene $x^2+2xyi-y^2-2i=0 \Rightarrow z=\pm(1+i)$. Da $z^2=-2i$ si ottiene $x^2+2xyi-y^2+2i=0 \Rightarrow z=\pm(1-i)$. Le quattro radici sono quindi $z=\pm(1+i)$ e $z=\pm(1-i)$.

2.11 Esercizio

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$\frac{z^3+1}{z^3-1} = \frac{1}{i}$$

.

2.11.1 Risoluzione

Dopo aver posto $z^3 \neq 1$, si osservi che $1/i = -i$ e quindi l'equazione si riduce a $z^3 + 1 = -i(z^3 - 1)$, da cui si procede come al solito...

2.12 Esercizio

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$|z-1| = |z+1|$$

.

2.12.1 Risoluzione

Si osservi che $(z-1) = (x-1) + iy$ e quindi $|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Analogamente, $|z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$, per cui si ottiene $x = 0$ (asse delle ordinate). Intuitivamente, l'esercizio consiste nel trovare i punti del piano che hanno ugual distanza dal punto $(1; 0)$ e $(-1; 0)$. Evidentemente, questo è l'asse del segmento che ha per estremi tali punti, ossia proprio la retta $x = 0$.

2.13 Esercizio

Risolvere in $\mathbb{C}$ e rappresentare graficamente la soluzione della disequazione

$$z + \bar{z} \leq |z|^2$$

.

2.13.1 Risoluzione

Si ha $x + iy + x - iy \leq x^2 + y^2$, ovvero $x^2 + y^2 - 2x \geq 0$. Questi sono tutti i punti del piano esterni o coincidenti con la circonferenza di centro $C(1; 0)$ e raggio 1.