Analisi Matematica per Informatici – Esercitazione 13 a.a. 2006-2007

Dott. Simone Zuccher

28 Febbraio 2007

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Integrali definiti

Richiami utili sugli integrali definiti. Siano $f(x), g(x)$ limitate ed integrabili su $I \subseteq \mathbb{R}$ e $a, b, c \in I,\ a < b$. Allora:

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx.$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0.$
- $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$
- Se $f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ con $a < b$, $\displaystyle\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$
- $\displaystyle g(x) \ge 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \ge 0.$
- $\displaystyle\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$
- $\displaystyle m \le \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right] \le M$ essendo $\displaystyle m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ e $\displaystyle M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$
- $f(x)$ continua su $[a, b] \Rightarrow \exists c \in [a, b] : \quad \displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).$

- Integrazione per parti: $\displaystyle\int_a^b [f'(x) \cdot g(x)]\, dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b [f(x) \cdot g'(x)]\, dx.$

- Integrazione per sostituzione. Sia $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ derivabile con derivata continua. Allora: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} [f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)]\, dt$

- Teorema fondamentale del calcolo integrale. Sia $f(x)$ continua ed integrabile su $[a, b]$ e $c, x \in [a, b]$, allora la funzione $F(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\, dt$ è una primitiva di $f(x)$. Inoltre, $F(x)$ è derivabile e risulta $F'(x) = f(x)$.

- Formula fondamentale per il calcolo integrale. Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = F|_a^b = [F]_a^b = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$

- Significato geometrico: l'integrale definito $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ di una funzione *non negativa* $f(x)$ rappresenta l'area compresa tra il grafico della funzione $y = f(x)$, l'asse x e le rette verticali $x = a$ e $x = b$.

- Area tra due curve $f(x)$ e $g(x)$. Se le curve hanno due o più punti di intersezione di ascissa $x_i, i = 1, \ldots, n, \quad n \geq 2$, allora

$$A = \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)|\, dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x) - g(x)|\, dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} |f(x) - g(x)|\, dx.$$

  Si noti che $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$ se $f(x) \geq g(x)$ oppure $|f(x) - g(x)| = g(x) - f(x)$ se $g(x) > f(x)$. Quindi, basta considerare per ciascun intervallo la differenza tra la funzione "maggiore" e quella "minore".

1.1 Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\, dx.$

1.1.1 Risoluzione

Essendo $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + c$, si ha $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0.$

1.2 Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\sin x)^2\, dx.$

1.2.1 Risoluzione

Essendo $\int (\sin x)^2 \; dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$ (si vedano le esercitazioni precedenti), si ha $\int_0^{2\pi} (\sin x)^2 \; dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi.$

1.3 Esercizio

Calcolare $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} \; dx.$

1.3.1 Risoluzione

Essendo $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} \; dx = \frac{2(x+1)^{3/2}}{3} - 2\sqrt{x+1} + c$ (si vedano le esercitazioni precedenti, integrali per sostituzione), si ha $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} \; dx = \left[\frac{2(x+1)^{3/2}}{3} - 2\sqrt{x+1} \right]_0^3 = \left[\frac{2(4)^{3/2}}{3} - 2\sqrt{4} \right] - \left[\frac{2(1)^{3/2}}{3} - 2\sqrt{1} \right] = \frac{8}{3}.$

1.4 Esercizio

Calcolare $\int_0^3 |x-1| \; dx.$

1.4.1 Risoluzione

Essendo $|x-1| = x-1$ per $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ e $|x-1| = 1-x$ per $x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$, si ha $\int_0^3 |x-1| \; dx = \int_0^1 (1-x) \; dx + \int_1^3 (x-1) \; dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^3 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$

1.5 Esercizio

Calcolare $\int_0^{2\pi} |\sin x| \; dx.$

1.5.1 Risoluzione

Si può procedere separando il $|\sin x|$ nei due casi (come fatto nell'esercizio precedente), oppure osservare che $f(x) = |\sin x|$ è periodica di periodo π per cui: $\int_0^{2\pi} |\sin x| \; dx = \int_0^{\pi} |\sin x| \; dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x| \; dx = \int_0^{\pi} |\sin x| \; dx + \int_0^{\pi} |\sin x| \; dx = 2 \int_0^{\pi} |\sin x| \; dx = 2 \int_0^{\pi} \sin x \; dx \quad (\sin x \geq 0 \forall \; x \in [0, \pi]) = [-2\cos x]_0^{\pi} = -2\cos(\pi) + 2\cos(0) = 2 + 2 = 4.$

1.6 Esercizio

Determinare l'area della regione di piano compresa tra la curva $y = \log x$, l'asse delle ascisse e la retta $x = e$.

1.6.1 Risoluzione

$A = \int_1^e \log x \, dx = [x(\log x - 1)]_1^e = 1.$

1.7 Esercizio

Determinare l'area della regione di piano compresa tra la parabola $y = x^2$ e la retta $y = x$.

1.7.1 Risoluzione

Si noti che le due curve si intersecano in due punti $(0,0)$ e $(1,1)$ e che nell'intervallo $[0,1]$ si ha $x \geq x^2$. Quindi l'area in questione è $\int_0^1 |x^2 - x| \, dx = \int_0^1 (x - x^2) \, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

1.8 Esercizio

Determinare l'area della regione di piano compresa tra la parabola $y = x^2$ e la retta $y = -2x + 3$.

1.8.1 Risoluzione

Le due curve si intersecano in $(-3,9)$ e $(1,1)$, inoltre nell'intervallo $[-3,1]$ si ha $-2x+3 \geq x^2$. Quindi l'area in questione è $\int_{-3}^1 (-2x + 3 - x^2) \, dx = \left[-x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^1 = \frac{32}{3}$.

1.9 Esercizio

Determinare l'area della regione di piano compresa tra la parabola $y^2 = 4x$, la retta $2x + y - 4 = 0$ e l'asse delle ascisse.

1.9.1 Risoluzione

Si noti che la parabola ha asse di simmetria parallelo all'asse delle x e vertice nell'origine. Inoltre, le due curve si intersecano in $(1,2)$ e $(4,-4)$, e la retta $y = -2x+4$ interseca l'asse x in $x = 2$. Vi sono pertanto due possibili regioni: $A_1 = \int_0^1 \sqrt{4x} \, dx + \int_1^2 (-2x+4) \, dx =$

$\frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}$ e $A_2=\int_0^2[0-(-\sqrt{4x})]\ dx+\int_2^4[(-2x+4)-(-\sqrt{4x})]\ dx=\frac{8}{3}\sqrt{2}+\frac{20-8\sqrt{2}}{3}=\frac{20}{3}$.

1.10 Esercizio

Determinare l'area della regione di piano delimitata nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

1.10.1 Risoluzione

Ricavando $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, l'area in questione è data da $A=4\cdot\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ dx=$ (dopo aver posto $x=a\sin t$) $=4\cdot\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2}\left[\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\right]\ dt=4ab\int_0^{\pi/2}(\cos t)^2dt=\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2}=4ab\frac{\pi}{4}=\pi ab.$

2 Integrali impropri

Richiami utili sugli integrali impropri.

- Sia $\alpha\in\mathbb{R}$. Allora l'integrale improprio $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\ dx$ è convergente per $\alpha>1$ e positivamente divergente per $\alpha\leq 1$.
- Sia $\alpha\in\mathbb{R}$. Allora l'integrale improprio $\int_a^b\frac{1}{(x-a)^\alpha}\ dx$ è convergente per $\alpha<1$ e positivamente divergente per $\alpha\geq 1$.
- Criterio del confronto. Siano $f(x), g(x)$ due funzioni definite su $[a,+\infty[$ e integrabili in ogni intervallo limitato $[a,b]$ con $a<b$; se $g(x)$ è integrabile su $[a,+\infty[$ ed esiste $x_0\geq a$ tale che $0\leq f(x)\leq g(x)\quad\forall x\geq x_0$, allora anche $f(x)$ è integrabile su $[a,+\infty[$.
- Se l'integrale improprio $\int_a^{+\infty}f(x)\ dx$ è assolutamente convergente, allora l'integrale $\int_a^{+\infty}f(x)\ dx$ è convergente.

  L'integrale improprio $\int_a^{+\infty}f(x)\ dx$ si dice assolutamente convergente se l'integrale improprio $\int_a^{+\infty}|f(x)|\ dx$ converge.

2.1 Esercizio

Dopo averne discusso la convergenza, calcolare $\int_1^2\frac{1}{\sqrt{2-x}}\ dx$ utilizzando la definizione.

2.1.1 Risoluzione

Il problema si verifica in $x = 2$. Si osservi che $\dfrac{1}{\sqrt{2-x}} = \dfrac{1}{(2-x)^{1/2}}$, pertanto l'integrale improprio converge $(1/2 < 1)$. Per calcolarne il valore si utilizza la definizione: $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = \lim_{t\to 2^-}\left[\int_1^t \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx\right]$. Calcolando dapprima l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = \int (2-x)^{-1/2}\,dx = -2\sqrt{2-x}+c$, si ha $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = \lim_{t\to 2^-}\left[\int_1^t \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx\right] = \lim_{t\to 2^-}\left[-2\sqrt{2-x}\right]_1^t = \lim_{t\to 2^-}\left[-2\sqrt{2-t}+2\right] = 2.$

2.2 Esercizio

Dopo averne discusso la convergenza, calcolare $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ utilizzando la definizione.

2.2.1 Risoluzione

Il problema si verifica in $x = 2$. Si osservi che $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{(2-x)(2+x)}} \sim \dfrac{1}{2(2-x)^{1/2}}$ per $x \to 2$, pertanto l'integrale improprio converge $(1/2 < 1)$. Si ha quindi $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \lim_{t\to 2^-}\left[\int_0^t \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\right] = \lim_{t\to 2^-}\left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^t = \lim_{t\to 2^-}\arcsin\frac{t}{2} = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$

2.3 Esercizio

Siano $a \in \mathbb{R}, a > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutere, al variare di α, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\,dx$$

.

2.3.1 Risoluzione

Se $\alpha \neq 1$ si ha $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\int_a^t \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\,dx\right] = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{(\log x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^t = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{(\log t)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{(\log a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]$. Pertanto l'integrale converge se $-\alpha+1 < 0$ ovvero per $\alpha > 1$, mentre diverge se $-\alpha+1 > 0$ ovvero per $\alpha < 1$.
Se $\alpha = 1$ si ha $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\log(\log x)\ dx\right]_a^t = \lim_{t\to+\infty}\left[\log(\log t) - \log(\log a)\right] = +\infty.$
In conclusione, l'integrale dato converge per $\alpha > 1$ e diverge positivamente per $\alpha \leq 1$.

2.4 Esercizio

Siano $a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutere, al variare di α, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^a \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\, dx$$

2.4.1 Risoluzione

Si proceda come nell'esercizio precedente.

2.5 Esercizio

Senza eseguire l'integrazione, si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x}\, dx$$

2.5.1 Risoluzione

$\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x} = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} \sim \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x^{3/2}}$ per $x \to +\infty$, pertanto l'integrale converge.

2.6 Esercizio

Senza eseguire l'integrazione, si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$$

2.6.1 Risoluzione

$\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \to 0$ e $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ per $x \to 1$, pertanto l'integrale converge.

2.7 Esercizio

Senza eseguire l'integrazione, si discuta la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$(a) \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \log\left(1+\frac{1}{x}\right) dx \qquad\qquad (b) \quad \int_1^{+\infty} \left(\sin\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

2.7.1 Risoluzione

(a) Essendo $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \sim \dfrac{1}{x^{3/2}}$ per $x \to +\infty$, l'integrale converge.

(b) Essendo $\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)^2 \sim \dfrac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$, l'integrale converge.

2.8 Esercizio

Senza eseguire l'integrazione, si discuta la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$(a) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\, dx \qquad\qquad (b) \quad \int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1}\, dx$$

2.8.1 Risoluzione

(a) Essendo $\dfrac{1}{\sqrt{\tan x}} \sim \dfrac{1}{x^{1/2}}$ per $x \to 0$, l'integrale converge.
(b) Essendo $\dfrac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} \sim \dfrac{1}{x^{1/2}}$ per $x \to 0$, l'integrale converge.

2.9 Esercizio

Determinare il più piccolo valore di $n \in \mathbb{N}$ affinché l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2+1})^n}\, dx$ converga.

2.9.1 Risoluzione

Essendo $\dfrac{x}{(\sqrt{x^2+1})^n} \sim \dfrac{1}{x^{n-1}}$ per $x \to +\infty$, si ha convergenza per $n - 1 > 1$, ovvero per $n > 2$. Quindi il minor $n \in \mathbb{N}$ affinché l'integrale improprio converga è $n = 3$.

2.10 Esercizio

Discutere al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a (2x+3)^{b+1}}\, dx$$

2.10.1 Risoluzione

Per $x \to 0^+$ si ha $\dfrac{1}{x^a(2x+3)^{b+1}} \sim \dfrac{1}{3^{b+1}x^a}$, quindi l'integrale converge per $a < 1$.
Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{1}{x^a(2x+3)^{b+1}} \sim \dfrac{1}{2^{b+1}x^{a+b+1}}$, pertanto l'integrale converge per $a + b + 1 > 1$, ovvero $b > -a$.
Globalmente l'integrale converge per $a < 1 \wedge b > -a$.

2.11 Esercizio

Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^a}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx$$

2.11.1 Risoluzione

Si noti che $\dfrac{(\log x)^a}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{(\log x)^a}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}$. Eseguendo la sostituzione $t = x-1 \Rightarrow x = 1+t$, si ha $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^a}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{(\log(1+t))^a}{\sqrt{t(t+2)}}\, dt$.

Per $t \to 0^+$ si ha $\dfrac{(\log(1+t))^a}{\sqrt{t(t+2)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2}t^{1/2-a}}$, quindi l'integrale converge per $1/2 - a < 1$, ovvero per $a > 3/2$.

Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{(\log(1+t))^a}{\sqrt{t(t+2)}} \sim \dfrac{1}{t(\log t)^{-a}}$, pertanto l'integrale converge per $-a > 1 \Rightarrow a < -1$.

In conclusione, l'integrale dato *non converge*, essendo $a > 3/2 \wedge a < -1$ impossibile.

3 Funzione integrale

3.1 Esercizio

Utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale ed il teorema per le derivate di funzioni composte, calcolare le derivate delle seguenti funzioni integrali:

$$(a)\ F(x) = \int_0^x \sqrt{t}\, dt \qquad (b)\ F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\, dt \qquad (c)\ F(x) = \int_{2x}^{3x} (\cos t)^2\, dt$$

.

3.1.1 Risoluzione

(a) $F'(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$.

(b) $F'(x) = e^{(\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^x$.

(c) $F(x) = \displaystyle\int_{2x}^{3x} (\cos t)^2\ dt = \int_{2x}^{x_0} (\cos t)^2\ dt + \int_{x_0}^{3x} (\cos t)^2\ dt = \int_{x_0}^{3x} (\cos t)^2\ dt - \int_{x_0}^{2x} (\cos t)^2\ dt$. Pertanto $F'(x) = [\cos(3x)]^2 \cdot (3x)' - [\cos(2x)]^2 \cdot (3x)' = 3\cos^2(3x) - 2\cos^2(2x)$.