# Analisi Matematica per Informatici – Esercitazione 11 a.a. 2006-2007

Dott. Simone Zuccher

14 Febbraio 2007

**Nota**. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

## 1 Integrali indefiniti immediati (o quasi)

Richiami utili per il calcolo degli integrali

- Proprietà:
    1. $\int f(x)\ dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$, ovvero le primitive di una funzione $f(x)$ differiscono tutte per una costante.
    2. $\int [f(x) \pm g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$
    3. $\int kf(x)\ dx = k \int g(x)\ dx$
- Integrali immediati, o quasi, vedi tabella 1, pagina 2

### 1.1 Esercizio

Calcolare i seguenti integrali.

$$\int \cot x\ dx \qquad [\log|\sin x| + c] \qquad\qquad \int \tan x\ dx \qquad [-\log|\cos x| + c]$$

$$\int \sin(ax)\ dx \qquad \left[-\frac{1}{a}\cos(ax) + c\right] \qquad\qquad \int \cos(ax)\ dx \qquad \left[\frac{1}{a}\sin(ax) + c\right]$$

$$\int \sqrt{x}\ dx \qquad \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c\right] \qquad\qquad \int \frac{1}{\sqrt{x+a}}\ dx \qquad [2\sqrt{x+a} + c]$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a+x^2}}\ dx \qquad [\sqrt{a+x^2} + c] \qquad\qquad \int \frac{x}{\sqrt{a-x^2}}\ dx \qquad [-\sqrt{a-x^2} + c]$$

| Integrali fondamentali | | Altri integrali notevoli | |
|---|---|---|---|
| $\int x^\alpha \, dx$ | $= \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \ \alpha \neq -1$ | $\int f'(x) \cdot [f(x)]^\alpha \, dx$ | $= \dfrac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \ \alpha \neq -1$ |
| $\int \dfrac{1}{x} \, dx$ | $= \log\lvert x\rvert + c$ | $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} \, dx$ | $= \log\lvert f(x)\rvert + c$ |
| $\int a^x \, dx$ | $= \dfrac{a^x}{\log a} + c, \ a > 0 \wedge a \neq 1$ | $\int f'(x) \cdot a^{f(x)} \, dx$ | $= \dfrac{a^{f(x)}}{\log a} + c, \ a > 0 \wedge a \neq 1$ |
| $\int e^x \, dx$ | $= e^x + c$ | $\int f'(x) \cdot e^{f(x)} \, dx$ | $= e^{f(x)} + c$ |
| $\int \sin x \, dx$ | $= -\cos x + c$ | $\int f'(x) \cdot \sin[f(x)] \, dx$ | $= -\cos[f(x)] + c$ |
| $\int \cos x \, dx$ | $= \sin x + c$ | $\int f'(x) \cdot \cos[f(x)] \, dx$ | $= \sin[f(x)] + c$ |
| $\int \dfrac{1}{(\cos x)^2} \, dx$ | $= \tan x + c$ | $\int \dfrac{f'(x)}{[\cos f(x)]^2} \, dx$ | $= \tan[f(x)] + c$ |
| $\int \dfrac{1}{(\sin x)^2} \, dx$ | $= -\cot x + c$ | $\int \dfrac{f'(x)}{[\sin f(x)]^2} \, dx$ | $= -\cot[f(x)] + c$ |
| $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ | $= \arcsin x + c$ | $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \, dx$ | $= \arcsin[f(x)] + c$ |
| $\int \dfrac{1}{1+x^2} \, dx$ | $= \arctan x + c$ | $\int \dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} \, dx$ | $= \arctan[f(x)] + c$ |

Tabella 1: Tabella degli integrali notevoli

### 1.1.1 Risoluzione

Si applichino le conoscenze relative agli integrali immediati ed altri integrali notevoli (vedi tabella 1, pagina 2).

## 1.2 Esercizio

Dimostrare, sotto l'ipotesi $a > 0$, le seguenti uguaglianze.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} + c \qquad \int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

### 1.2.1 Risoluzione

Si applichino le conoscenze relative agli integrali immediati ed altri integrali notevoli (vedi tabella 1, pagina 2).

## 1.3 Esercizio

Calcolare i seguenti integrali.

$$\int \frac{1}{(5x+3)^6}\,dx \qquad \left[-\frac{1}{25(5x+3)^5}+c\right] \qquad \int \sqrt{x+2}\,dx \qquad \left[\tfrac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}+c\right]$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx \qquad \left[-\frac{1}{3}\sqrt{2-3x^2}+c\right] \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx \qquad \left[-\arcsin\tfrac{1}{x}+c\right]$$

$$\int \sin^5 x\cos x\,dx \qquad \left[\frac{1}{6}\sin^6 x+c\right] \qquad \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad \left[\frac{1}{3}(\arcsin x)^3+c\right]$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\,dx \qquad [\log|\arctan x|+c] \qquad \int \frac{1}{(\arcsin x\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad [\log|\arcsin x|+c]$$

$$\int \frac{1}{x\log x}\,dx \qquad [\log|\log x|+c] \qquad \int \frac{(\log x)^n}{x}\,dx,\ n\neq -1 \qquad \left[\frac{(\log x)^{n+1}}{n+1}+c\right]$$

$$\int \frac{\sin(2x)}{1+(\sin x)^2}\,dx \qquad [\log(1+(\sin x)^2)+c] \qquad \int 3xe^{x^2}\,dx \qquad \left[\frac{3}{2}e^{x^2}+c\right]$$

### 1.3.1 Risoluzione

Si applichino le conoscenze relative agli integrali immediati ed altri integrali notevoli (vedi tabella 1, pagina 2).

# 2 Integrali che richiedono alcune manipolazioni della funzione integranda

Negli esercizi che seguono sarà necessario manipolare la funzione integranda in modo da ricondursi ad integrali immediati (o quasi) visti precedentemente.

## 2.1 Esercizio

Tenendo conto delle uguaglianze goniometriche note, calcolare i seguenti integrali.

$$1.\ \int \sin^2 x\,dx \qquad 2.\ \int \cos^2 x\,dx$$

### 2.1.1 Risoluzione

Dalla formula di duplicazione del coseno $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ si ha

1. $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos(2x)}{2}$, quindi $\displaystyle\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}\, dx - \int \frac{\cos(2x)}{2}\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{\sin(2x)}{4} + c.$

2. Osservando che $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$, si ottiene $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}\, dx + \int \frac{\cos(2x)}{2}\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{\sin(2x)}{4} + c.$

## 2.2 Esercizio

Tenendo conto delle uguaglianze goniometriche note, calcolare i seguenti integrali.

$$1. \int \frac{1}{\sin x}\, dx \qquad 2. \int \frac{1}{\cos x}\, dx$$

### 2.2.1 Risoluzione

Dalla formula di duplicazione del seno $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ si ottiene $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, da cui

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\, dx = \int \frac{1}{2}\frac{1}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\, dx = \int \frac{\left(\tan\frac{x}{2}\right)'}{\tan\frac{x}{2}}\, dx = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c.$

   Si dimostri, per esercizio ed utilizzando gli stessi passaggi, che in generale vale la seguente
$$\int \frac{1}{\sin(x+a)}\, dx = \log\left|\tan\left(\frac{x+a}{2}\right)\right| + c \qquad (1)$$

2. Utilizzando la (1), dopo aver osservato che $\cos x = \sin(x + \pi/2)$, si ottiene $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}\, dx = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$

## 2.3 Esercizio

Tenendo conto delle uguaglianze goniometriche note, calcolare i seguenti integrali.

$$1. \int \frac{1}{\sin x \cos x}\, dx \qquad 2. \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$$

### 2.3.1 Risoluzione

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x \cos x}\, dx = \int \frac{1}{\tan x \cos^2 x}\, dx = \log|\tan x| + c$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2}\, dx = \int \frac{1}{[(\sin(2x))/2]^2}\, dx = 2\int \frac{(2x)'}{[\sin(2x)]^2}\, dx =$
$-2\cot(2x) + c$

## 2.4 Esercizio

Dimostrare le seguenti uguaglianze.

1. $\displaystyle\int \frac{hx+k}{mx+n}\, dx = \frac{h}{m}x + \frac{km-hn}{m^2}\log|mx+n| + c$

2. $\displaystyle\int \frac{hx+k}{mx^2+n}\, dx = \frac{h}{2m}\log|mx^2+n| + \frac{k}{\sqrt{mn}}\arctan\left(\sqrt{\frac{m}{n}}x\right) + c, \quad m\cdot n > 0$

### 2.4.1 Risoluzione

1. $\displaystyle\int \frac{hx+k}{mx+n}\, dx = \frac{1}{m}\int \frac{hmx+mk}{mx+n}\, dx = \frac{1}{m}\int \frac{hmx+mk+hn-hn}{mx+n}\, dx =$
$\displaystyle\frac{1}{m}\int \frac{h(mx+n)+km-hn}{mx+n}\, dx = \frac{h}{m}\int 1\, dx + \frac{km-hn}{m^2}\int \frac{m}{mx+n}\, dx =$
$\displaystyle\frac{h}{m}x + \frac{km-hn}{m^2}\log|mx+n| + c$

2. $\displaystyle\int \frac{hx+k}{mx^2+n}\, dx = h\int \frac{x}{mx^2+n}\, dx + k\int \frac{1}{mx^2+n}\, dx =$
$\displaystyle\frac{h}{2m}\int \frac{2mx}{mx^2+n}\, dx + \frac{k}{n}\frac{1}{\sqrt{m/n}}\int \frac{\sqrt{m/n}}{(\sqrt{m/n}x)^2+1}\, dx =$
$\displaystyle\frac{h}{2m}\log|mx^2+n| + \frac{k}{\sqrt{mn}}\arctan\left(\sqrt{\frac{m}{n}}x\right) + c$

## 2.5 Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int \frac{3x+2}{4x+5}\, dx$.

### 2.5.1 Risoluzione

Eseguendo gli stessi passaggi del primo esempio dell'esercizio precedente, si ottiene $\displaystyle\int \frac{3x+2}{4x+5}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{12x+8}{4x+5}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{12x+8+15-15}{4x+5}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{12x+15-7}{4x+5}\, dx =$
$\displaystyle\frac{3}{4}\int 1\, dx - \frac{7}{4}\int \frac{1}{4x+5}\, dx = \frac{3}{4}x - \frac{7}{16}\log|4x+5| + c.$
Alternativamente, bastava sostituire $h = 3, k = 2, m = 4, n = 5$ nella formula risolutiva vista nell'esempio 1 dell'esercizio 2.4.

## 2.6 Esercizio

Calcolare $\int \frac{1}{3x^2+2}\,dx$.

### 2.6.1 Risoluzione

Eseguendo gli stessi passaggi del secondo esempio dell'esercizio 2.4, si ottiene $\int \frac{1}{3x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{2}x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\frac{3}{2}x\right)+ c$.

Alternativamente, bastava sostituire $h = 0, k = 1, m = 3, n = 2$ nella formula risolutiva vista nell'esempio 2 dell'esercizio 2.4.

## 2.7 Esercizio

Dimostrare, nel caso $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la seguente uguaglianza

$$\int \frac{hx+k}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{h}{2a}\log|ax^2+bx+c| + \frac{2ak-bh}{a\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)+c$$

### 2.7.1 Risoluzione

$\frac{hx+k}{ax^2+bx+c} = h\frac{x+k/h}{ax^2+bx+c} = \frac{h}{2a}\cdot\frac{2ax+2ak/h}{ax^2+bx+c} = \frac{h}{2a}\cdot\frac{2ax+2ak/h+b-b}{ax^2+bx+c} = \frac{h}{2a}\cdot\left[\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}+\frac{2ak/h-b}{ax^2+bx+c}\right]$.

Quindi, $\int \frac{hx+k}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{h}{2a}\cdot\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + \int \frac{h}{2a}\cdot\frac{2ak/h-b}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{h}{2a}\log|ax^2+bx+c| + \int \frac{h}{2a}\cdot\frac{2ak/h-b}{ax^2+bx+c}\,dx$.

Per integrare la seconda parte, si osservi che $\frac{h}{2a}\cdot\frac{2ak/h-b}{ax^2+bx+c} = \frac{2ak-bh}{2}\cdot\frac{1}{a^2x^2+abx+ac} = \frac{2ak-bh}{2}\cdot\frac{1}{(ax+\frac{b}{2})^2+ac-\frac{b^2}{4}} = \frac{2ak-bh}{2}\cdot\frac{1}{(ax+\frac{b}{2})^2+\frac{4ac-b^2}{4}} = \frac{2ak-bh}{2}\cdot\frac{1/(\frac{4ac-b^2}{4})}{\frac{4}{4ac-b^2}(ax+\frac{b}{2})^2+1} = \frac{2ak-bh}{2}\cdot\frac{4}{4ac-b^2}\cdot\frac{1}{(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}})^2+1} = \frac{2ak-bh}{2}\cdot\frac{4}{4ac-b^2}\cdot\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\cdot\frac{\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}}{(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}})^2+1} = \frac{2ak-bh}{a\sqrt{4ac-b^2}}\cdot\frac{\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}}{(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}})^2+1}$.

Pertanto, $\int \frac{h}{2a}\cdot\frac{2ak/h-b}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ak-bh}{a\sqrt{4ac-b^2}}\int \frac{\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}}{(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}})^2+1}\,dx = \frac{2ak-bh}{a\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)+c$. Sommando i due contributi si ottiene l'uguaglianza data. Si noti che il risultato del secondo integrale dell'esercizio 2.4 si ottiene immediatamente dalla formula precedente ponendo $a = m, b = 0, c = n$.

## 2.8 Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+x+1}\,dx$.

### 2.8.1 Risoluzione

Eseguendo gli stessi passaggi dell'esercizio precedente, si ottiene $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+x+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4/3}{x^2+x+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1+4/3-1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1+1/3}{x^2+x+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{3}{2}\log|x^2+x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}\,dx = \frac{3}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c =$.
Alternativamente, bastava sostituire $h = 3, k = 2, a = 1, b = 1, c = 1$ nella formula risolutiva vista nell'esercizio 2.7.

# 3 Integrali per parti

Richiami utili al calcolo di integrali per parti.

- L'integrazione per parti utilizza l'uguaglianza

$$\int [f'(x)\cdot g(x)]\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int [f(x)\cdot g'(x)]\,dx$$

- Schema riassuntivo per la scelta di $f'(x)$ e $g(x)$ nel caso si abbia l'integrale del loro prodotto: vedi tabella 2. Si noti che $1 = x^0$ rientra nel caso $x^n$.

| $f'(x)$ | | $g(x)$ |
|---|---|---|
| $\sin x$ | se moltiplicato per | $x^n$ |
| $\cos x$ | se moltiplicato per | $x^n$ |
| $e^x$ | se moltiplicato per | $x^n$ |
| $x^n$ | se moltiplicato per | $\log x$ |
| $x^n$ | se moltiplicato per | $\arcsin x$ |
| $x^n$ | se moltiplicato per | $\arccos x$ |
| $x^n$ | se moltiplicato per | $\arctan x$ |
| $x^n$ | se moltiplicato per | $\text{arccot}\, x$ |

Tabella 2: Scelta di $f'(x)$ e $g(x)$ nell'integrazione per parti $\int [f'(x)\cdot g(x)]\,dx$

## 3.1 Esercizio

Calcolare $\int x \cos x \, dx$.

### 3.1.1 Risoluzione

Scegliendo, secondo la tabella 2, pagina 7, $f'(x) = \cos x$ e $g(x) = x$, si ha $f(x) = \int \cos x \, dx = \sin x$ e $g'(x) = 1$, quindi $\int x \cos x \, dx = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx = x \cdot \sin x + \cos x + c$.

## 3.2 Esercizio

Calcolare $\int x \log x \, dx$.

### 3.2.1 Risoluzione

Scegliendo, secondo la tabella 2, pagina 7, $f'(x) = x$ e $g(x) = \log x$, si ha $f(x) = x^2/2$ e $g'(x) = 1/x$, quindi $\int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \log x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \left( \log x - \frac{1}{2} \right) + c$.

## 3.3 Esercizio

Calcolare $\int \log x \, dx$.

### 3.3.1 Risoluzione

Scegliendo, secondo la tabella 2, pagina 7, $f'(x) = 1$ e $g(x) = \log x$, si ha $f(x) = x$ e $g'(x) = 1/x$, quindi $\int \log x \, dx = x \cdot \log x - \int 1 \, dx = x (\log x - 1) + c$.

## 3.4 Esercizio

Calcolare $\int \arctan x \, dx$.

### 3.4.1 Risoluzione

Scegliendo, secondo la tabella 2, pagina 7, $f'(x) = 1$ e $g(x) = \arctan x$, si ha $f(x) = x$ e $g'(x) = 1/(1 + x^2)$, quindi $\int \arctan x \, dx = x \cdot \arctan x - \int \frac{x}{1 + x^2} \, dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + c$.

## 3.5 Esercizio

Calcolare $\int x^2 e^x \, dx$.

### 3.5.1 Risoluzione

Scegliendo, secondo la tabella 2, pagina 7, $f'(x) = e^x$ e $g(x) = x^2$, si ha $f(x) = e^x$ e $g'(x) = 2x$, quindi $\displaystyle\int x^2 e^x\ dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x\ dx = x^2 \cdot e^x - 2\left(x \cdot e^x - \int e^x\ dx\right) + c = e^x(x^2 - 2x + 2) + c$.

## 3.6 Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int (\log x)^2\ dx$.

### 3.6.1 Risoluzione

Scegliendo, secondo la tabella 2, pagina 7, $f'(x) = 1$ e $g(x) = (\log x)^2$, si ha $f(x) = x$ e $g'(x) = \dfrac{2}{x}\log x$, quindi $\displaystyle\int (\log x)^2\ dx = x \cdot (\log x)^2 - 2\int \log x\ dx = x\left[(\log x)^2 - 2\log x + 2\right] + c$.

## 3.7 Esercizio

Calcolare, per parti, $\displaystyle\int (\sin x)^2\ dx$.

### 3.7.1 Risoluzione

Scegliendo $f'(x) = \sin x$ e $g(x) = \sin x$, si ha $f(x) = -\cos x$ e $g'(x) = \cos x$, quindi $\displaystyle\int (\sin x)^2\ dx = -\sin x \cdot \cos x + \int (\cos x)^2\ dx = -\sin x \cdot \cos x + \int [1 - (\sin x)^2]\ dx = -\sin x \cdot \cos x + \int 1\ dx - \int \sin x)^2\ dx$, ovvero $\displaystyle\int (\sin x)^2\ dx = -\sin x \cdot \cos x + x - \int \sin x)^2\ dx$, da cui $\displaystyle\int (\sin x)^2\ dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + c$ (si confronti questo risultato con l'esercizio 2.1).

## 3.8 Esercizio

Calcolare, per parti, $\displaystyle\int \frac{x}{(\sin x)^2}\ dx$.

### 3.8.1 Risoluzione

Scegliendo $f'(x) = \dfrac{1}{(\sin x)^2}$ e $g(x) = x$, si ha $f(x) = -\cot x$ e $g'(x) = 1$, quindi $\displaystyle\int \frac{x}{(\sin x)^2}\ dx = -x \cdot \cot x + \log|\sin x| + c$.