Analisi Matematica per Informatici – Esercitazione 10 a.a. 2006-2007

Dott. Simone Zuccher

07 Febbraio 2007

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Determinazione del dominio di una funzione

Richiami utili per la determinazione del dominio.

- Determinare il *dominio* o *insieme di definizione* o *campo di esistenza* di una funzione significa trovare tutti i valori della variabile indipendente x per i quali l'espressione analitica di $f(x)$ ha significato. Generalmente questo equivale ad un sistema in cui sono riportate tutte le condizioni che devono verificarsi simultaneamente.
- Funzioni che hanno problemi di dominio:
  1. $\sqrt[2n]{\varphi(x)} \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$
  2. $[\varphi(x)]^\alpha, \alpha \notin \mathbb{N} \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$
  3. $\dfrac{1}{\varphi(x)} \Rightarrow \varphi(x) \neq 0$
  4. $\log_a \varphi(x), a > 0, a \neq 1 \Rightarrow \varphi(x) > 0$
  5. $\tan \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
  6. $\cot \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
  7. $\arcsin \varphi(x) \Rightarrow -1 \leq \varphi(x) \leq 1$
  8. $\arccos \varphi(x) \Rightarrow -1 \leq \varphi(x) \leq 1$
- Funzioni che non hanno problemi di dominio: tutti i polinomi, le potenze con esponente naturale ($[\varphi(x)]^n, n \in \mathbb{N}$), le esponenziali ($a^{\varphi(x)}$), le radici con indice dispari ($\sqrt[2n+1]{\varphi(x)}$), seno e coseno ($\sin \varphi(x), \cos \varphi(x)$) e arcotangente ($\arctan \varphi(x)$).

1.1 Esercizio

Determinare il dominio di $f(x) = \sqrt{x(1-x^2)}$.

1.1.1 Risoluzione

Deve essere $x(1-x^2) \geq 0 \Rightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [0,1]$.

1.2 Esercizio

Determinare il dominio di $f(x) = \sqrt{\log x}$.

1.2.1 Risoluzione

Deve essere $\begin{cases} \log x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [1, +\infty[$.

1.3 Esercizio

Determinare il dominio di $f(x) = \log\left[(\log x - 1)^\pi\right]$.

1.3.1 Risoluzione

Deve essere $\begin{cases} \log x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in]e, +\infty[$.

1.4 Esercizio

Determinare il dominio di $f(x) = \sqrt{\dfrac{\log^2 x - 4}{\log x + 1}}$.

1.4.1 Risoluzione

Deve essere $\begin{cases} \dfrac{\log^2 x - 4}{\log x + 1} \geq 0 \\ \log x + 1 \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}[\cup [e^2, +\infty[$.

1.5 Esercizio

Determinare il dominio di $f(x) = \arcsin[\log(x-1) - \log x)]$.

1.5.1 Risoluzione

Deve essere $\begin{cases} -1 \leq \log(x-1) - \log x \leq 1 \\ x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [\frac{e}{e-1}, +\infty[$.

2 Grafico qualitativo di una funzione

Schema generale per lo studio di una funzione.

1. Determinazione del dominio D di $f(x)$.
2. Eventuali simmetrie e/o periodicità in modo da studiare la funzione eventualmente su un intervallo più piccolo rispetto al dominio.
   Funzione pari: $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in D$
   Funzione dispari: $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in D$
   Funzione periodica: $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in D, T \in \mathbb{R}$.
3. Intersezioni con gli assi.
4. Segno di $f(x)$ (da evitare nei casi complicati).
5. Calcolo dei limiti agli estremi del dominio (agli estremi di tutti gli intervalli di cui il dominio è l'unione) e determniazione di eventuali asintoti.
6. Calcolo della derivata prima e studio del segno di $f'(x)$ per determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$ ed eventuali punti di massimo e minimo per $f(x)$.
7. Calcolo della derivata seconda e studio del segno di $f''(x)$ per determinare gli intervalli in cui $f(x)$ è concava o convessa ed eventuali punti di flesso per $f(x)$.

2.1 Esercizio

Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

2.1.1 Risoluzione

1. Dominio: $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \in]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$.
2. Né simmetrie né periodicità.
3. Intersezioni con gli assi. $x = 0 \Rightarrow y = 3/2$. $y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$.
4. Segno: $f(x)$ non negativa per $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]\cup]2, +\infty[$.
5. Limiti, nell'ordine:
   $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-3}{x-2} = -\infty$; $\lim_{x\to2^-} \dfrac{x^2-3}{x-2} = -\infty$ $\lim_{x\to2^+} \dfrac{x^2-3}{x-2} = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3}{x-2} = +\infty$.
   Pertanto, $f(x)$ ammette un asintoto verticale di equazione $x = 2$ e non ammette certamente asintoto orizzontale. Potrebbe ammettere asintoto obliquo: verifichiamo. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-3}{x^2-2x} = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\dfrac{x^2-3}{x-2} - x\right] = 2$.
   Quindi $f(x)$ ammette asintoto obliquo di equazione $y = x + 2$.

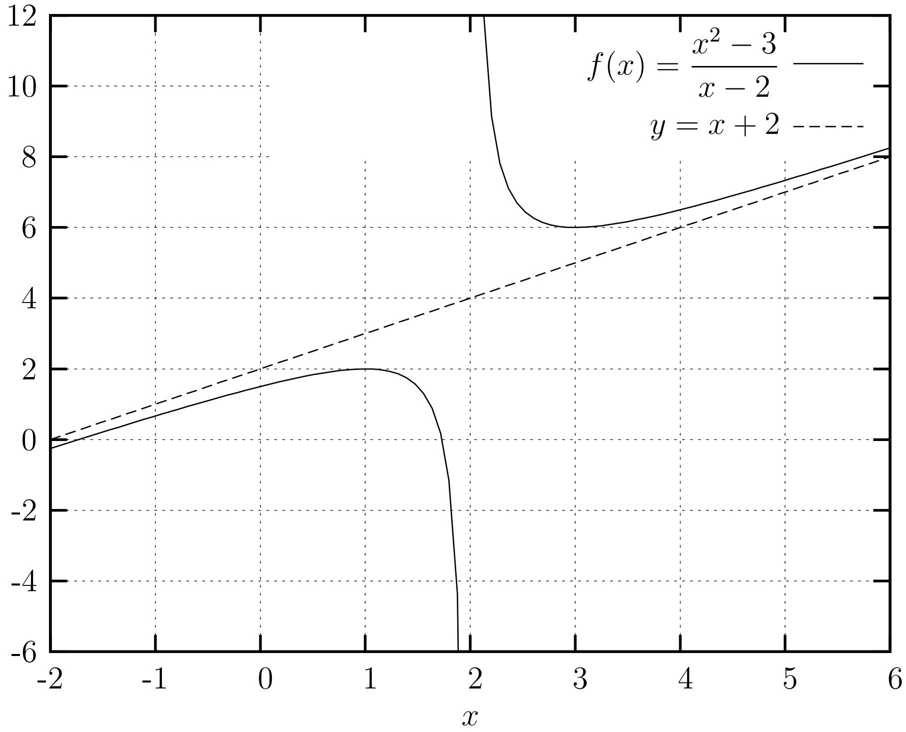

Figura 1: Grafico di $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$ e del suo asintoto obliquo $y = x + 2$ (esercizio 2.1)

6. Derivata prima $f'(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$. Essa ha lo stesso dominio di $f(x)$ e quindi la funzione è derivabile in ogni punto del suo dominio. $f'(x)$ si annulla per $x = 1 \vee x = 3$, che sono quindi punti stazionari. $f'(x)$ è non negativa per $x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$, pertanto $f(x)$ è ivi crescente. $f'(x)$ è non positiva per $x \in [1, 2[\cup]2, 3]$, pertanto $f(x)$ è ivi decrescente. Dal segno di $f'(x)$ si deduce che $x = 1$ è un punto di minimo relativo $(1, 2)$, mentre $x = 3$ è un punto di massimo relativo $(3, 6)$.

7. Derivata seconda $f''(x) = \dfrac{2}{(x-2)^3}$. Siccome $f''(x) \neq 0$, non esistono punti di flesso. Dallo studio del segno di $f''(x)$ si deduce che $f''(x) > 0$ per $x \in]2, +\infty[$ pertanto $f(x)$ è ivi convessa, mentre è concava altrove.

In figura 1 è riportato il grafico di $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$ e del suo asintoto obliquo $y = x + 2$.

2.2 Esercizio

Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - \dfrac{8}{x}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

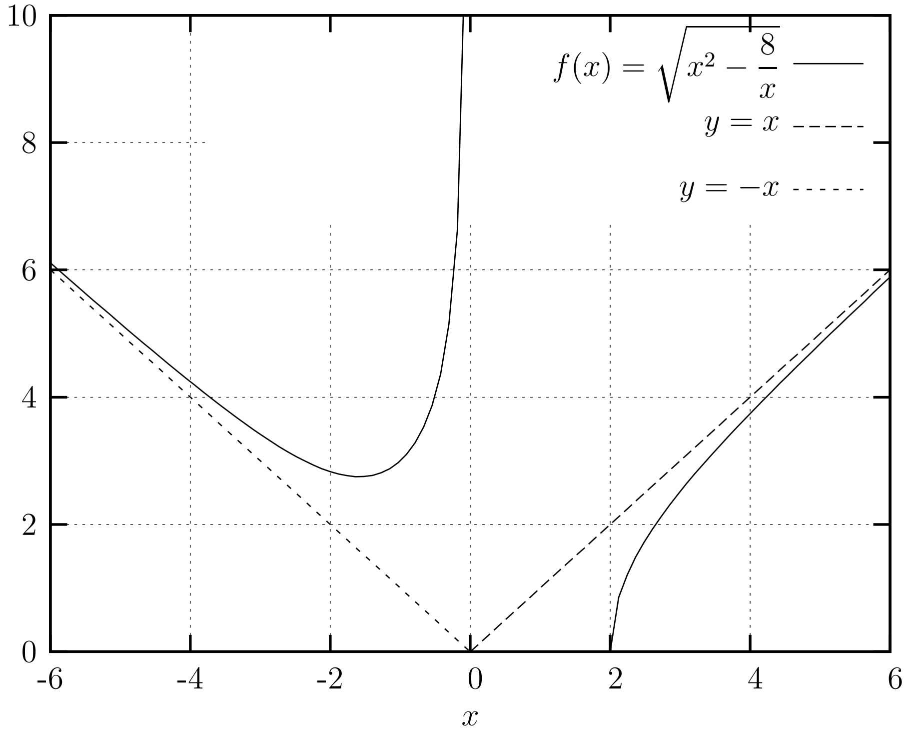

Figura 2: Grafico di $f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{8}{x}}$ e dei sui asintoti obliqui $y = \pm x$ (esercizio 2.2)

2.2.1 Risoluzione

1. Dominio: $x^2 - \frac{8}{x} \geq 0 \Rightarrow x \in]-\infty, 0[\cup [2, +\infty[$.

2. Né simmetrie né periodicità.

3. Intersezioni con gli assi. $x = 0$ è escluso dal dominio e quindi non si può calcolare. $y = 0 \Rightarrow x = 2$.

4. Segno: $f(x)$ è sempre non negativa.

5. Limiti, nell'ordine:
   $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - \frac{8}{x}} = +\infty$; $\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x^2 - \frac{8}{x}} = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - \frac{8}{x}} = +\infty$. Si noti che non si sono fatti né il limite per $x \to 0^+$, non essendo ammesso dal dominio, né il limite per $x \to 2^+$, essendo $f(2) = 0$. Dall'analisi dei limiti si deduce che $f(x)$ ammette un asintoto verticale (sinistro) di equazione $x = 0$ e non ammette certamente asintoto orizzontale. Potrebbe ammettere asintoto obliquo: verifichiamo. $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - \frac{8}{x}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{1 - \frac{8}{x^3}} = \pm 1$,

$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) \mp x] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{-8/x}{\sqrt{x^2-8/x} \pm x} \right] = 0$. Quindi $f(x)$ ammette asintoto obliquo destro di equazione $y = x$ e asintoto obliquo sinistro di equazione $y = -x$.

6. Derivata prima $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - \frac{8}{x}}} \left(x + \frac{4}{x^2} \right) = \frac{x^3+4}{x^2\sqrt{\frac{x^3-8}{x}}} = \frac{x^3+4}{\sqrt{x^3(x^3-8)}}$. Si noti che essa *non ha lo stesso dominio di* $f(x)$. Infatti, per $x = 2$ si annulla il denominatore di $f'(x)$. Essendo $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = +\infty$, $f(x)$ non è derivabile in $x = 2$. $f'(x)$ si annulla per $x = -\sqrt[3]{4}$, che è quindi un punto stazionario. $f'(x)$ è non negativa per $x \in [-\sqrt[3]{4}, 0[\cup]2, +\infty[$, pertanto $f(x)$ è ivi crescente. $f'(x)$ è non popsitiva per $x \in]-\infty, -\sqrt[3]{4}]$, pertanto $f(x)$ è ivi decrescente. Dal segno di $f'(x)$ si deduce che $x = -\sqrt[3]{4}$ è un punto di minimo relativo, mentre dal grafico si può dedurre che $x = 2$ è il minimo assoluto.

7. Derivata seconda $f''(x) = -\frac{24(x^3-2)}{x^4\sqrt{(x^2-8/x)^3}}$. Siccome $f''(x) \neq 0$ (non essendo $x = \sqrt[3]{2}$ nel dominio), non esistono punti di flesso. Dallo studio del segno di $f''(x)$ si deduce che $f''(x) > 0$ per $x \in]-\infty, 0[$ pertanto $f(x)$ è ivi convessa, mentre è concava per $x \in]2, +\infty[$.

In figura 2 è riportato il grafico di $f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{8}{x}}$ e dei sui asintoti obliqui $y = \pm x$.

2.3 Esercizio

Studiare la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

2.3.1 Risoluzione

1. Dominio: $D = \mathbb{R}$, essendo l'indice della radice dispari.

2. Né simmetrie né periodicità.

3. Intersezioni con gli assi. $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$.

4. Segno: $f(x)$ è non negativa quando $(x-1) \geq 0$, ovvero per $x \in [1, +\infty[$.

5. Limiti, nell'ordine:
$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2(x-1)} = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2(x-1)} = +\infty$. Dall'analisi dei limiti si deduce che $f(x)$ non ammette né asintoto verticale né orizzontale. Potrebbe ammettere asintoto obliquo: verifichiamo. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\sqrt[3]{x^2(x-1)} = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = -1/3$. Quindi $f(x)$ ammette asintoto obliquo di equazione $y = x - 1/3$.

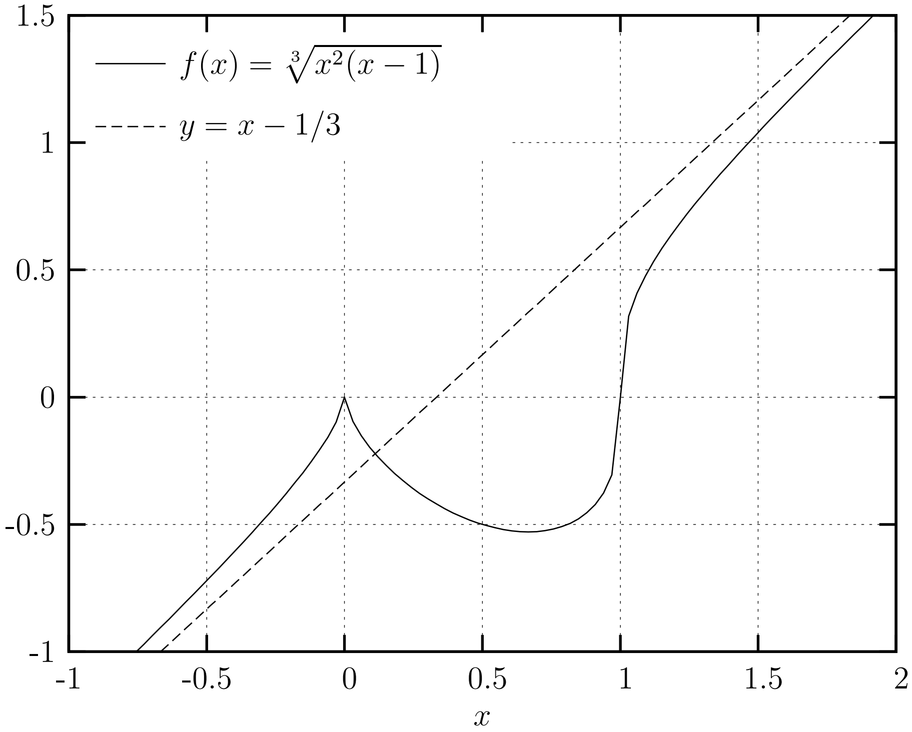

Figura 3: Grafico di $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$ e del suo asintoto obliquo $y = x - 1/3$ (esercizio 2.3)

6. Derivata prima $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 2x}{3\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}} = \dfrac{3x-2}{3\sqrt[3]{x(x-1)^2}}$. Si noti che essa *non ha lo stesso dominio di* $f(x)$. Infatti, per $x = 0 \vee x = 1$ si annulla il denominatore di $f'(x)$ e pertanto $f(x)$ non è derivabile in tali punti. Essendo $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$, e $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty$, si deduce che $x = 0$ è un punto di cuspide per $f(x)$ mentre $x = 1$ è un punto di flesso a tangente verticale. $f'(x)$ si annulla per $x = 2/3$, che è quindi un punto stazionario. $f'(x)$ è non negativa per $x \in]-\infty, 0[\cup [2/3, 1[\cup]1, +\infty[$, pertanto $f(x)$ è ivi crescente. $f'(x)$ è non positiva per $x \in]0, 2/3]$, pertanto $f(x)$ è ivi decrescente. Dal segno di $f'(x)$ si deduce che $x = 2/3$ è un punto di minimo relativo. Inoltre, essendo $f'(x) > 0$ nell'intorno di $x = 1$, si deduce che in $x = 1$ la funzione ha un flesso *ascendente* a tangente verticale. Non essendo $f(x)$ limitata inferiormente né superiormente, non esistono né minimi né massimi assoluti.

7. Derivata seconda $f''(x) = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4(x-1)^5}}$. Si noti che il dominio di $f''(x)$ è lo stesso di quello di $f'(x)$ e che $f''(x) \neq 0$, quindi non ci sono altri flessi oltre a quello già visto in $x = 1$ (punto di non derivabilità sia per la derivata prima che per la seconda). Dallo studio del segno di $f''(x)$ si deduce che $f''(x) > 0$ per $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$ pertanto $f(x)$ è ivi convessa, mentre è concava per $x \in]1, +\infty[$.

In figura 3 è riportato il grafico di $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$ e del suo asintoto obliquo $y = x - 1/3$.

2.4 Esercizio

Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{\log x}{1 + \log x}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

2.4.1 Risoluzione

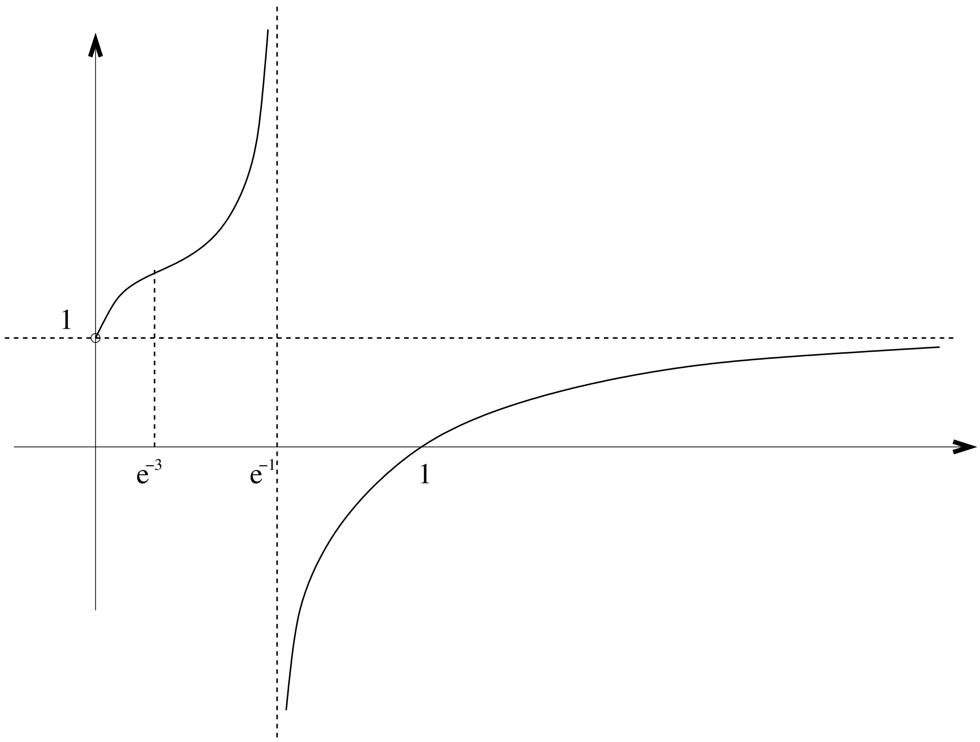

Figura 4: Grafico di $f(x) = \dfrac{\log x}{1 + \log x}$ e dei suoi asintoti orizzontale $y = 1$ e verticale $x = 1/e$ (esercizio 2.4)

1. Dominio: $x > 0 \wedge (1 + \log x) \neq 0 \Rightarrow x \in]0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, +\infty[$.
2. Né simmetrie né periodicità.
3. Intersezioni con gli assi. $x = 0$ è escluso dal dominio e quindi non si può calcolare. $y = 0 \Rightarrow x = 1$.
4. Segno: $f(x)$ è non negativa per $x \in]0, 1/e[\cup [1, +\infty[$.
5. Limiti, nell'ordine:
$\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{1 + \log x} = 1^+$; $\displaystyle \lim_{x \to (1/e)^-} \frac{\log x}{1 + \log x} = +\infty$; $\displaystyle \lim_{x \to (1/e)^+} \frac{\log x}{1 + \log x} = -\infty$;

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{1+\log x} = 1$. Dall'analisi dei limiti si deduce che $f(x)$ ammette la retta $y = 1$ come asintoto orizzontale (destro) e la retta $x = \frac{1}{e}$ come asintoto verticale. $f(x)$ non ammette asintoti obliqui.

6. Derivata prima $f'(x) = \dfrac{1}{x(1+\log x)^2}$. Nonostante essa abbia lo stesso dominio di $f(x)$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$ e quindi per $x \to 0^+$ la funzione tende a 1^+ con tangente verticale (positiva). $f'(x)$ non si annulla mai, quindi non ci sono punti stazionari (eventuali massimi o minimi) ma è sempre positiva, quindi $f(x)$ è sempre crescente per $x \in]0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, +\infty[$.

7. Derivata seconda $f''(x) = -\dfrac{\log x + 3}{x^2(1+\log x)^3}$. $f''(x) = 0$ per $x = 1/e^3$, che risulta pertanto punto di flesso. Dallo studio del segno di $f''(x)$ si deduce che $f''(x) > 0$ per $x \in]1/e^3, 1/e[$ pertanto $f(x)$ è ivi convessa, mentre è concava per $x \in]0, 1/e^3[\cup]1/e, +\infty[$.

In figura 4 è riportato il grafico di $f(x) = \dfrac{\log x}{1+\log x}$ e dei suoi asintoti orizzontale $y = 1$ e verticale $x = 1/e$.

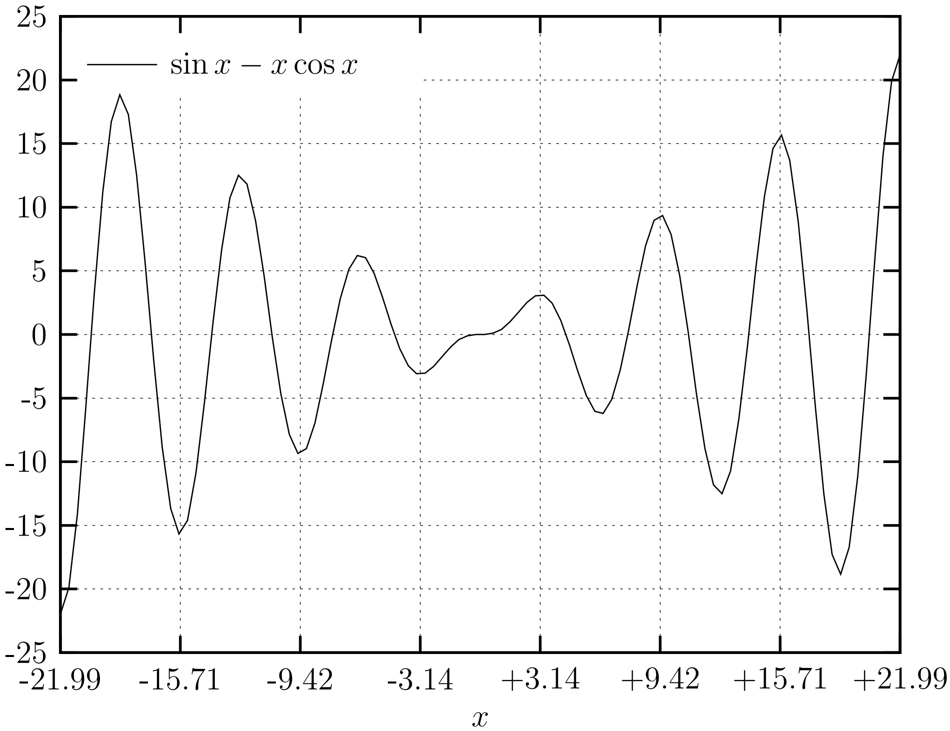

Figura 5: Grafico di $f(x) = \sin x - x\cos x$ (esercizio 2.5)

2.5 Esercizio

Studiare la funzione $f(x) = \sin x - x \cos x$ e tracciarne un grafico approssimativo.

2.5.1 Risoluzione

È una funzione dispari, definita su tutto $\mathbb{R}$, non periodica, quindi basta studiarla per $x \geq 0$. $x = 0 \Rightarrow y = 0$, ma la soluzione di $f(x) = 0$ implica $\sin x - x \cos x = 0$ ovvero, posto $x \neq \pi/2 + k\pi$ si può tentare di risolvere $\tan x = x$, che non è banale. Lasciando quindi perdere il segno e le intersezioni con $y = 0$, studiamo la derivata prima. $f'(x) = x \sin x$. Limitatamente a $x > 0$, si ha $f'(x) > 0$ quando $\sin x > 0$, ovvero per $x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[, k = 0, 1, 2, \ldots$. La derivata prima si annulla in $x = 0$, $x = 2k\pi, k = 1, 2, 3, \ldots$ e $x = (2k+1)\pi, k = 0, 1, 2, \ldots$. I punti $x = 2k\pi, k = 1, 2, 3, \ldots$ ($f(2k\pi) = -2k\pi$) sono punti di minimo relativo. I punti $x = (2k+1)\pi, k = 0, 1, 2, \ldots$ ($f((2k+1)\pi) = (2k+1)\pi$) sono punti di massimo relativo. La derivata seconda $f''(x) = \sin x + x \cos x$ si annulla in corrispondenza delle soluzioni dell'equazione $x + \tan x = 0$, una delle quali è $x = 0$, punto di flesso a tangente orizzontale. In figura 5 è riportato il grafico di $f(x) = \sin x - x \cos x$.

3 Esistenza delle radici di un'equazione

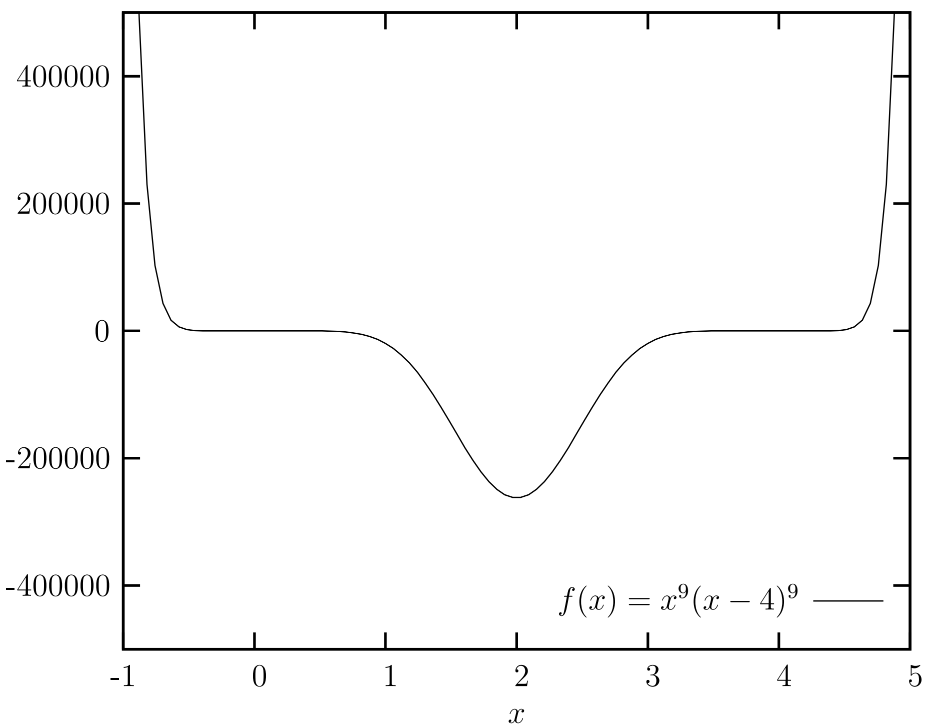

Figura 6: Grafico di $f(x) = x^9(x-4)^9$ (esercizio 3.1)

3.1 Esercizio

Determinare il numero delle soluzioni reali dell'equazione $x^9(x-4)^9 = \alpha$.

3.1.1 Risoluzione

Studiamo la funzione $f(x) = x^9(x-4)^9$. Si verifica che $f'(x)$ si annulla per $x = 2$, è positiva per $x > 2$ e negativa per $x < 2$. Quindi $f(x)$ è strettamente decrescente per $x \in]-\infty, 2]$, strettamente crescente per $x \in [2, -\infty[$ ed ha un minimo assoluto in $x = 2 \Rightarrow f(2) = -2^{18}$ (si veda la figura 6). In conclusione, quindi, l'equazione $x^9(x-4)^9 = \alpha$ ammette due soluzioni (distinte) se $\alpha > -2^{18}$, una soluzione se $\alpha = -2^{18}$, nessuna soluzione se $\alpha < -2^{18}$.

Alternativamente, si poteva considerare l'equazione $x(x-4) = \alpha^{1/9}$, che è di secondo grado e ammette soluzioni $x = 2 \pm \sqrt{4 + \alpha^{1/9}}$, purché sia $\alpha \geq -4^9 = -2^{18}$ (da cui le stesse conclusioni ottenute nel primo modo).

3.2 Esercizio

Determinare il numero delle soluzioni reali dell'equazione $x^{10}(x-2)^{10} = \alpha$.

3.2.1 Risoluzione

Procedendo come nell'esercizio precedente, si ottiene: nessuna soluzione per $\alpha < 0$, due soluzioni per $\alpha = 0$, quattro soluzioni per $0 < \alpha < 1$, tre soluzioni per $\alpha = 1$ e due soluzioni per $\alpha > 1$.

3.3 Esercizio

Determinare il numero ed il segno delle radici reali dell'equazione $x^3+2x^2+10x-20 = 0$.

3.3.1 Risoluzione

Si noti che i limiti per $x \to \pm\infty$ di $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ sono rispettivamente $\pm\infty$ e pertanto esiteranno $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Quindi, in base al teorema di esistenza degli zeri ($f(x)$ è continua su $[a, b]$, intervallo chiuso e limitato), $f(x)$ ammette almeno una radice compresa tra a e b. Essendo $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$. Ne segue che $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ ammette una sola radice. Per stabilirne il segno, basta osservare che $f(0) = -20 < 0$ e quindi $f(x)$ si annulla per $x > 0$. L'unica radice è pertanto positiva.

3.4 Esercizio

Determinare il numero ed il segno delle radici reali dell'equazione $x^4 + x^2 = ax + b$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}, b \geq 0$.

3.4.1 Risoluzione

Si proceda pensando all'intersezione tra le funzioni $f(x) = x^4 + x^2$ e $g(x) = ax + b$.