Analisi Matematica per Informatici – Esercitazione 1
a.a. 2006-2007

Dott. Simone Zuccher

25 Ottobre 2006

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

$=$	uguale a	$\neq$	diverso da
$\exists$	esiste	$\nexists$	non esiste
$\forall$	per ogni	$\exists!$	esiste ed è unico
$\Rightarrow$	implica	$\not\Rightarrow$	non implica
$\Leftrightarrow$	equivale a	$\not\Leftrightarrow$	non equivale a
$\in$	appartiene a	$\notin$	non appartiene a
$\subseteq$	contenuto in	$\not\subseteq$	non contenuto in
$\subset$	contenuto strettamente in	$\not\subset$	non contenuto strettamente in
$\cup$	unione	$\cap$	intersezione
$\vee$	o (*vel*, OR)	$\wedge$	e (*et*, AND)
$:$	tale che		

1 Insiemi

Definizioni utili per gli esercizi:

- $A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$
- $A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
- $A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
- $A^c = \{x : x \notin A\}$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \;\Rightarrow x \in B)$
- $A = B \Leftrightarrow ((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A))$
- $\mathcal{P}(A)$, ovvero l'insieme delle parti di A, è la famiglia di tutti i sottoinsiemi (propri ed impropri) di A.
- $A \times B = \{(x, y) : (x \in A \wedge y \in B)\}$

1.1 Esercizio

Si dimostri che $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

1.1.1 Risoluzione

Per dimostrare la doppia implicazione bisogna dimostrare sia che $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$, sia che $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$.

1. Supponiamo $A \subseteq B$ e dimostriamo che questo implica $A \cup B = B$, ossia $A \cup B \subseteq B$ e $B \subseteq A \cup B$.
   (a) Dimostriamo che $A \cup B \subseteq B$. $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$, ma essendo per ipotesi $A \subseteq B$ si ha che $x \in A \Rightarrow x \in B$, ossia
   $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B$.
   (b) Dimostriamo che $B \subseteq A \cup B$. $x \in B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow A \cup B$
2. Supponiamo $A \cup B = B$ e dimostriamo che questo implica $A \subseteq B$.
   $A \cup B \Rightarrow A \subseteq A \cup B = B$ (per ipotesi), ossia $A \subseteq B$.

1.2 Esercizio

Si dimostri che $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

1.2.1 Risoluzione

Come nel caso precedente, bisogna dimostrare due implicazioni.

1. Supponiamo $A \subseteq B$ e dimostriamo che questo implica $A \cap B = A$, ossia $A \cap B \subseteq A$ e $A \subseteq A \cap B$.
   (a) Dimostriamo che $A \cap B \subseteq A$. $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$, ossia $x \in A$.
   (b) Dimostriamo che $A \subseteq A \cap B$. $x \in A \Rightarrow x \in B$ (per ipotesi), ossia
   $x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$.
2. Supponiamo $A \cap B = A$ e dimostriamo che questo implica $A \subseteq B$.
   $A = A \cap B \subseteq B$.

1.3 Esercizio

Si dimostri che

$$A \cup (A \cap B) = A \qquad \text{e} \qquad A \cap (A \cup B) = A$$

1.3.1 Risoluzione

1. Siccome $(A \cap B) \subseteq A$, dalla proprietà dimostrata nell'esercizio 1.1 segue immediatamente $A \cup (A \cap B) = A$.
2. Siccome $A \subseteq (A \cup B)$, dalla proprietà dimostrata nell'esercizio 1.2 segue immediatamente $A \cap (A \cup B) = A$.

1.4 Esercizio

Si dimostri che $A \setminus B = A \cap B^c$.

1.4.1 Risoluzione

$x \in (A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B^c) \Leftrightarrow x \in (A \cap B^c)$

1.5 Esercizio

Si dimostri che $(A^c)^c = A$.

1.5.1 Risoluzione

$x \in (A^c)^c \Leftrightarrow x \notin A^c \Leftrightarrow x \in A$

1.6 Esercizio

Si dimostrino le relazioni di De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad \text{e} \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

1.6.1 Risoluzione

1. $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow ((x \notin A) \wedge (x \notin B)) \Leftrightarrow ((x \in A^c) \wedge (x \in B^c)) \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$

2. $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow ((x \notin A) \vee (x \notin B)) \Leftrightarrow ((x \in A^c) \vee (x \in B^c)) \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$

1.7 Esercizio

Si dimostri la proprietà ditributiva dell'unione rispetto all'intersezione:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

1.7.1 Risoluzione

$x \in ((A \cap B) \cup C) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee (x \in C) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in C)) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C)) \Leftrightarrow x \in ((A \cup C) \cap (B \cup C))$.

1.8 Esercizio

Si dimostri la proprietà ditributiva dell'intersezione rispetto all'unione:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

1.8.1 Risoluzione

$x \in ((A \cup B) \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge (x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap C) \vee x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in ((A \cap C) \cup (B \cap C))$

1.9 Esercizio

Utilizzando le proprietà sugli insiemi dimostrate negli esercizi precedenti, semplificare le seguenti espressioni:

1. $[A \cup (A \cap B)] \cap B$
2. $A \cap B \cap (B \cup C^c)$

1.9.1 Risoluzione

1. $[A \cup (A \cap B)] \cap B = [(A \cup A) \cap (A \cup B)] \cap B = [A \cap (A \cup B)] \cap B = A \cap B$.
   C'è anche un modo molto più veloce, tenuto conto delle proprietà dimostrate nell'esercizio 1.3. Infatti, da $((A \cap B) \cup A) = A$ segue la soluzione $A \cap B$.

2. $A \cap B \cap (B \cup C^c) = A \cap (B \cap (B \cup C^c)) = A \cap ((B \cap B) \cup (B \cap C^c)) = A \cap (B \cup (B \setminus C)) = A \cap B$.
   Anche in questo caso, si poteva procedere in modo più veloce tenendo conto delle proprietà dimostrate nell'esercizio 1.3 ed osservando che $B \cap (B \cup C^c) = B$, da cui la soluzione $A \cap B$.

1.10 Esercizio

Dati $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{b, d\}$, si ricavi:

1. $B \cup C$
2. $A \cup C$
3. $B \cap C$
4. $A \cap C$
5. $A \times B$
6. $A \times C$
7. $\mathcal{P}(A)$
8. $A \setminus C$

1.10.1 Risoluzione

1. $B \cup C = \{1, 2, b, d\}$
2. $A \cup C = \{a, b, c, d\}$
3. $B \cap C = \emptyset$
4. $A \cap C = \{b\}$
5. $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$
6. $A \times C = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, b), (c, d)\}$
7. $\mathcal{P}(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \emptyset, \{a, b, c\}\}$
8. $A \setminus C = \{a, c\}$

1.11 Esercizio

Dati $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{b, d\}$, verificare che:

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3. $A \times B \neq B \times A$
4. $B \times (A \setminus C) = (B \times A) \setminus (B \times C)$

1.11.1 Risoluzione

Si lascia allo studente diligente la banale verifica.

1.12 Esercizio

Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}^+$ sia

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} : 1 - \frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n} \right\}.$$

Determinare $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} A_n$ e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} A_n$.

1.12.1 Risoluzione

- Intersezione.
  Si verifica facilmente che $1 - \dfrac{1}{n} < 1 < 1 + \dfrac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$, quindi certamente $1 \in \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} A_n$. Dimostriamo che non esiste nessun altro valore di $x \in \mathbb{R}$ che appartenga all'intersezione. Sia $a \in \mathbb{R}, a > 1$. Detto $\epsilon = a - 1 > 0$, a seguito della proprietà di Archimede è possibile determinare un numero naturale $\bar{n}$ tale che $\bar{n} > 1/\epsilon$ (ovvero $\epsilon > 1/\bar{n}$). Siccome $a = 1 + \epsilon > 1 + 1/\bar{n}$, segue $a \notin \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} A_n$.
  Analogamente si dimostra che $a \in \mathbb{R}, a < 1 \Rightarrow a \notin \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} A_n$ (esercizio per lo studente diligente). Pertanto $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} A_n = \{1\}$.

- Unione.
  È sufficiente osservare che gli A_n sono progressivamente contenuti l'uno all'interno dell'altro al crescere di n, ovvero $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots$ e pertanto $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} A_n = A_1$.

1.13 Esercizio

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1 - \dfrac{1}{n} \right\}$. Determinare $\displaystyle\bigcap_{n=3}^{6} A_n$.

1.13.1 Risoluzione

Si osservi che $A_3 \subset A_4 \subset A_5 \subset A_6$ e pertanto $\displaystyle\bigcap_{n=3}^{6} A_n = A_3$.

1.14 Esercizio

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $A_n = \{x \in \mathbb{R} : x \leq n^2\}$. Dimostrare che $\displaystyle\bigcup_{n \geq 1} A_n = \mathbb{R}$.

1.14.1 Risoluzione

Si veda l'esercizio 9.14 delle dispense del Prof. Squassina.

1.15 Esercizio

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $A_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, -\dfrac{1}{n} \leq y \leq \dfrac{1}{n} \right\}$. Determinare $\displaystyle\bigcap_{n \geq 1} A_n$.

1.15.1 Risoluzione

Si veda l'esercizio 9.15 delle dispense del Prof. Squassina.

2 Relazioni

Definizioni utili per gli esercizi:

- Diciamo che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza in $X \times X$ se verifica le seguenti proprietà:
  1. Riflessiva. $\forall x \in X : x\mathcal{R}x$
  2. Simmetrica. $\forall x \in X, \forall y \in X : x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
  3. Transitiva. $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X : (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$
- Diciamo che $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine in $X \times X$ se verifica le seguenti proprietà:
  1. Riflessiva. $\forall x \in X : x\mathcal{R}x$
  2. Antimmetrica. $\forall x \in X, \forall y \in X : (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$
  3. Transitiva. $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X : (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$

  Una relazione d'ordine si dice di ordine *totale* se, oltre alle 3 proprietà precedenti soddisfa anche la seguente: $\forall x \in X, \forall y \in X : (x\mathcal{R}y)$ oppure $(y\mathcal{R}x)$.
- Data una relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ in X, chiamiamo classe di equivalenza di $x \in X$, e la indichiamo con $[x]$, l'insieme di tutti gli elementi di X che sono in relazione di equivalenza con x, ossia: $[x] = \{y \in X : x\mathcal{R}y\}$.

2.1 Esercizio

Analizzare le proprietà delle seguenti relazioni:

- Essere figlio di.
- Frequentare la stessa classe.
- Essere rette parallele nel piano.
- Essere rette perpendicolari nel piano.

2.1.1 Risoluzione

- Non è riflessiva, non è simmetrica, non è transitiva e non è antisimmetrica.
- È riflessiva, è simmetrica, è transitiva, quindi è un'equivalenza.
- È riflessiva, è simmetrica, è transitiva, quindi è un'equivalenza.
- Non è riflessiva, è simmetrica, non è transitiva.

2.2 Esercizio

Verificare che le seguenti relazioni sono di equivalenza:

- Portare gli occhiali.
- La similitudine tra i poligoni di un piano.
- La congruenza tra figure piane.

2.2.1 Risoluzione

Basta verificare che ciascuna relazione gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva (cosa piuttosto banale).

2.3 Esercizio

Presi $x, y \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, insieme dei numeri interi relativi), e definita in $\mathbb{Z}$ la seguente relazione $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow$ "$x - y$ è divisibile per 4", si verifichi che essa è una relazione di equivalenza e si determinino le classi di equivalenza.

2.3.1 Risoluzione

Proprietà riflessiva: $x - x$ (ossia 0) è divisibile per 4 (0 diviso $4 = 0 \in \mathbb{Z}$), per cui $x\mathcal{R}x$.
Proprietà simmetrica: se $x - y$ è divisibile per 4 allora certamente lo è anche $y - x = -(x - y)$, ovvero il suo opposto, per cui $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
Proprietà transitiva: se $x - y$ è divisibile per 4 ($x\mathcal{R}y$) allora $\exists k_1 \in \mathbb{Z} : x - y = k_1 4$. Se $y - z$ è divisibile per 4 ($y\mathcal{R}z$) allora $\exists k_2 \in \mathbb{Z} : y - z = k_2 4$. Sommando membro a membro si ottiene $x - z = (k_1 + k_2)4 = k4, k \in \mathbb{Z}$, ovvero $x\mathcal{R}z$. Quindi, $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
Le classi di equivalenza sono 4: quella dei numeri relativi divisibili per 4 (ovvero i multipli di 4: $\{0, \pm 4, \pm 8, \dots\}$), quella dei (multipli di 4)+1 (ovvero $\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots$), quella dei (multipli di 4)+2 ($\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots$) e quella dei (multipli di 4)+3 ($\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots$).

2.4 Esercizio

Presi $x, y \in \mathbb{Z}$ e definita in $\mathbb{Z}$ la seguente relazione $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow$ "$xy > 0$", si verifichi che essa è una relazione di equivalenza in $\mathbb{Z}$.

2.4.1 Risoluzione

Proprietà riflessiva: $xx = x^2 > 0$, per cui $x\mathcal{R}x$.
Proprietà simmetrica: se $xy > 0$ allora anche $yx > 0$, per cui $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
Proprietà transitiva: se $xy > 0$ e $yz > 0$ significa che x, y, z sono tutti concordi e pertanto $xz > 0$, ovvero $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

2.5 Esercizio

Dato l'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ di un insieme finito di elementi A, si dimostri che la relazione di inclusione '$\subseteq$' è d'ordine *parziale* su $\mathcal{P}(A)$.

2.5.1 Risoluzione

Si noti l'enfasi sul fatto che l'ordinamento è parziale e non totale, ossia bisogna verificare solo le 3 proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Siano X, Y due sottoinsiemi dell'insieme delle parti di A, ovvero $X, Y \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow (X \subseteq \mathcal{P}(A) \wedge (Y \subseteq \mathcal{P}(A))$ e verifichiamo le suddette proprietà.
Proprietà riflessiva: se $X \subseteq \mathcal{P}(A)$ allora $X \subseteq X$, per cui $X\mathcal{R}X$.
Proprietà antisimmetrica: presi $X, Y \subseteq \mathcal{P}(A)$, ovvero $(X \subseteq \mathcal{P}(A) \wedge (Y \subseteq \mathcal{P}(A))$, se si assume $(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)$ si ha $X = Y$, ossia $(X\mathcal{R}Y) \wedge (Y\mathcal{R}X) \Rightarrow X = Y$.
Proprietà transitiva: presi $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$, se $(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq Z) \Rightarrow X \subseteq Z$, ovvero $(X\mathcal{R}Y) \wedge (Y\mathcal{R}Z) \Rightarrow X\mathcal{R}Z$.

2.6 Esercizio

Si consideri l'insieme dei numeri naturali privati dello 0, ossia $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, sul quale è definita la relazione $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow$ "x è divisibile per y". Si verifichi che questa è una relazione d'ordine parziale.

2.6.1 Risoluzione

Proprietà riflessiva: x è divisibile per se stesso, quindi $x\mathcal{R}x$.
Proprietà antisimmetrica: se x è divisibile per y e simultaneamente y è divisibile per x, l'unica possibilità è che x e y coincidano, ovvero $(x\mathcal{R}y) \wedge (x\mathcal{R}y) \Rightarrow x = y$.
Proprietà transitiva: se x è divisibile per y e y è divisibile per z allora $x = k_1 y \quad (k_1 \in \mathbb{N})$ e $y = k_2 z \quad (k_2 \in \mathbb{N})$ e quindi $x = k_1 k_2 z$, ossia x è divisibile per z. In conclusione, $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

2.7 Esercizio

Siano A e B due insiemi non vuoti totalmente ordinati e consideriamo su $A \times B$ la relazione definita da "$(a, b) \leq (a', b')$ se $a \leq a'$ e, nel caso $a = a'$, $b \leq b'$". Dimostrare che la relazione è d'ordine *totale*.

2.7.1 Risoluzione

Si noti che la relazione in questione è quella lessicografica ristretta a parole di 2 lettere.
Proprietà riflessiva: la coppia ordinata $(a, b) \in A \times B$ è tale per cui $a \leq a$ e $b \leq b$, per cui $(a, b)\mathcal{R}(a, b)$.
Proprietà antisimmetrica: prese le coppie $(a, b) \in A \times B$ e $(a', b') \in A \times B$, se la parola (a, b) (di 2 lettere) viene prima o coincide con la parola (a', b'), ovvero $(a, b)\mathcal{R}(a', b')$, e la parola (a', b') viene prima o coincide con (a, b), ovvero $(a', b')\mathcal{R}(a, b)$, allora la parola in

questione è sempre la stessa ossia $(a,b)=(a',b')$. Quindi $(a,b)\mathcal{R}(a',b')\wedge(a',b')\mathcal{R}(a,b)\Rightarrow(a,b)=(a',b')$.
Proprietà transitiva: se si prendono 3 parole di due lettere $(a,b),(a',b'),(a'',b'')\in A\times B$ e (a,b) viene prima o coincide con (a',b') la quale a sua volta viene prima o coincide con (a'',b''), si conclude facilmente che (a,b) viene prima o coincide con (a'',b''). Quindi $(a,b)\mathcal{R}(a',b')\wedge(a',b')\mathcal{R}(a'',b'')\Rightarrow(a,b)\mathcal{R}(a'',b'')$.
La relazione in questione è pertanto d'ordine. Inoltre, siccome si può stabilire $(a,b)\mathcal{R}(a',b')$ oppure $(a',b')\mathcal{R}(a,b)$, ossia (a,b) viene o prima o dopo (a',b') (oppure coincide), allora l'ordine è totale.

2.8 Esercizio

Sia $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x\geq 0)\wedge(0\leq y\leq x)\}$ e sia $(a,b)\mathcal{R}(c,d)\Leftrightarrow(a-c,b-d)\in E$. Si dimostri che tale relazione è d'ordine su $\mathbb{R}^2$.

2.8.1 Risoluzione

Proprietà riflessiva: la coppia ordinata $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ è tale per cui $(a-a,b-b)=(0,0)\in E$, per cui $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$.
Proprietà antisimmetrica: prese le coppie $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ e $(c,d)\in\mathbb{R}^2$, se $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ e $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$ allora $(a-c,b-d)\in E$ e $(c-a,d-b)\in E$, ovvero $(a-c\geq 0)\wedge(c-a\geq 0)\Rightarrow a-c=c-a=0$, ossia $a=c$. Inoltre, essendo nullo il primo elemento x delle coppie $(x,y)\in E$ si ha che anche il secondo (y) è nullo in quanto $0\leq y\leq x=0$. Questo implica che anche $b-d=d-b=0$, ovvero $b=d$. Quindi $(a,b)\mathcal{R}(c,d)\wedge(c,d)\mathcal{R}(a,b)\Rightarrow(a,b)=(c,d)$.
Proprietà transitiva: si prendano 3 coppie $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{R}^2$ e si supponga che valgano le relazioni $(a,b)\mathcal{R}(c,d)\wedge(c,d)\mathcal{R}(e,f)$. A seguito di queste ipotesi, si ha $a-c\geq 0$, $c-e\geq 0$, $0\leq b-d\leq a-c$ e $0\leq d-f\leq c-e$. Allora $a-e$ e $b-f$ si possono riscrivere rispettivamente come $a-e=(a-c)+(c-e)$ e $b-f=(b-d)+(d-f)$. Date le ipotesi, si ottiene $(a-c)+(c-e)\geq 0\Rightarrow(a-e)\geq 0$ e $(b-d)+(d-f)\leq(a-c)+(c-e)=a-e\Rightarrow 0\leq(b-f)\leq(a-e)$, ossia si è ottenuto che la coppia $(a-e,b-f)\in E$, ovvero $(a,b)\mathcal{R}(c,d)\wedge(c,d)\mathcal{R}(e,f)\Rightarrow(a,b)\mathcal{R}(e,f)$.