

Laboratorio di Dinamica dei Fluidi

Esercitazione 04 – a.a. 2008-2009

Dott. Simone Zuccher

05 Giugno 2009

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Moti a potenziale con circolazione

Come visto in precedenza, un cilindro immerso in un campo di moto uniforme non produce alcuna forza, né verticale né orizzontale. Al fine di ottenere una forza netta verticale è necessario avere sulla parte superiore del cilindro una pressione minore di quella che si ha sulla parte inferiore. Il teorema di Bernoulli nel caso irrotazionale, stazionario e incomprimibile impone che la somma della pressione e del quadrato della velocità sia costante, ovvero che la pressione decresce laddove il modulo della velocità cresce e viceversa. Per ottenere una forza verso l'alto, quindi, sulla parte superiore del cilindro deve esserci una velocità maggiore che sulla parte inferiore, ovvero basta aggiungere un vortice. Il campo di moto di un cilindro portante in una corrente uniforme è dato dalla somma degli effetti di una corrente uniforme, di una doppietta e di un vortice (quest'ultimi nell'origine):

$$w = w_{\text{corrente uniforme}} + w_{\text{doppietta}} + w_{\text{vortice}} = U_{\infty} \left(z + \frac{R^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z.$$

Riscrivendo il tutto in coordinate polari si ottiene

$$\begin{aligned}
w &= U_\infty \left(r e^{i\theta} + \frac{R^2}{r} e^{-i\theta} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log r e^{i\theta} \\
&= U_\infty \left(r \cos \theta + i r \sin \theta + \frac{R^2}{r} \cos(-\theta) + i \frac{R^2}{r} \sin(-\theta) \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log r - i^2 \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\
&= U_\infty \left(r \cos \theta + i r \sin \theta + \frac{R^2}{r} \cos \theta - i \frac{R^2}{r} \sin \theta \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log r + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\
&= \left[U_\infty \left(r \cos \theta + \frac{R^2}{r} \cos \theta \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \right] + i \left[U_\infty \left(r \sin \theta - \frac{R^2}{r} \sin \theta \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \log r \right] \\
&= \left[U_\infty \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \right] + i \left[U_\infty \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \log r \right] \\
&= \phi + i\psi,
\end{aligned}$$

da cui

$$\phi = U_\infty \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad \text{e} \quad \psi = U_\infty \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \log r.$$

Le componenti della velocità si ottengono dal gradiente del potenziale ϕ :

$$\begin{aligned}
u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = U_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta, \\
u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r},
\end{aligned}$$

e si osserva che sulla superficie del cilindro, $r = R$, la velocità radiale è nulla (come dovrebbe essere, in quanto il cilindro costituisce una linea di corrente), mentre quella tangenziale dipende sia dall'angolo sia dalla circolazione:

$$u_r(R, \theta) = 0 \quad \text{e} \quad u_\theta(R, \theta) = -2U_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}.$$

Si osservi che, nel caso di cilindro non portante, il vettore velocità si annulla per $\sin \theta = 0$, ovvero $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, che corrispondono ai punti $z = \pm R$, detti punti di ristagno. Al contrario, la velocità raggiunge il massimo del modulo per $\sin \theta = \pm 1$, ovvero a $\theta = \pm \pi/2$, dove vale, in modulo, il doppio della velocità asintotica U_∞ .

Nel caso di circolazione non nulla (cilindro portante), invece, il punto di ristagno sul contorno del cilindro si trova annullando la velocità tangenziale,

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{\Gamma}{4\pi R U_\infty} \right)$$

che esiste solo se

$$\left| \frac{\Gamma}{4\pi R U_\infty} \right| \leq 1.$$

Se $\left| \frac{\Gamma}{4\pi R U_\infty} \right| > 1$ allora non c'è un punto di ristagno sul cilindro, ma esiste un punto nel campo di moto in cui il vettore velocità si annulla.

1.1 Calcolo delle forze e teorema di Kutta-Joukowski

Il teorema di Bernoulli, nella sua versione irrotazionale, assicura che

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_0,$$

dove V è il modulo della velocità e p_0 è il valore della costante nel punto in cui la velocità è nulla (pressione totale o pressione di ristagno). Per il calcolo della forze agenti sul cilindro basta risalire alla pressione sulla superficie del cilindro e quindi integrarla separando la direzione orizzontale da quella verticale. Per Bernoulli si ha

$$p(R, \theta) = p_0 - \frac{1}{2}\rho[V(R, \theta)]^2 = p_0 - \frac{1}{2}\rho([u_r(R, \theta)]^2 + [u_\theta(R, \theta)]^2) = p_0 - \frac{1}{2}\rho[u_\theta(R, \theta)]^2,$$

da cui

$$\begin{aligned} p(R, \theta) &= p_0 - \frac{1}{2}\rho \left(-2U_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 \\ &= p_0 - 2\rho U_\infty^2 \sin^2 \theta + \frac{\rho U_\infty \Gamma}{\pi R} \sin \theta - \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2. \end{aligned}$$

La forza orizzontale e verticale si trovano svolgendo gli integrali

$$F_x = - \int_0^{2\pi} p(R, \theta) R \cos \theta \, d\theta \quad \text{e} \quad F_y = - \int_0^{2\pi} p(R, \theta) R \sin \theta \, d\theta,$$

ma sfruttando il fatto che

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \, d\theta = 0,$$

e

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = \pi,$$

si ottiene

$$F_x = 0 \quad \text{e} \quad F_y = -\rho U_\infty \Gamma,$$

La presenza di un vortice di circolazione Γ in una corrente incomprimibile e irrotazionale genera una componente di velocità che produce una forza sulla superficie del cilindro. Questa forza ha direzione perpendicolare sia alla direzione della velocità uniforme U_∞ sia all'asse del cilindro, e la sua intensità è proporzionale a Γ e U_∞ . Questa forza è chiamata *portanza* se è diretta verso l'alto, il che accade quando il vortice circola in senso orario ($\Gamma < 0$), o *deportanza* se è diretta verso il basso, ovvero quando il vortice circola in senso antiorario ($\Gamma > 0$). La relazione trovata stabilisce quindi che la portanza per unità di lunghezza è proporzionale alla circolazione. Si tratta di un risultato noto come **teorema della portanza di Kutta-Joukowski**, che è molto importante per l'aerodinamica perché la sua validità può essere dimostrata anche nel caso di corpi cilindrici di sezione qualsiasi, come, ad esempio, i profili alari.

1.2 Profili alari

Per profilo alare si intende una sezione di un'ala. Evidentemente, lo scopo di un profilo alare è di generare una certa portanza per unità di lunghezza d'ala. Per ottenere la forma tipica di un profilo alare, basta “deformare” tramite trasformazioni conformi successive il cilindro portante immerso in una corrente uniforme in modo da fargli assumere la forma del profilo. I passi sono i seguenti:

1. La trasformazione $w = U_\infty \left(z_1 + \frac{R^2}{z_1} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z_1$ assicura il passaggio dal piano w al piano z_1 ovvero da linee di corrente orizzontali a linee di corrente simmetriche rispetto all'asse y_1 . Si osservi che il valore della circolazione Γ è incognito.
2. La trasformazione $z_2 = z_1 e^{-i\alpha}$ assicura il passaggio dal piano z_1 al piano z_2 dove la velocità asintotica forma un angolo di incidenza α rispetto alla retta perpendicolare all'asse di simmetria delle linee di corrente.
3. La trasformazione $z_3 = z_2 + m e^{i\delta}$ assicura il passaggio dal piano z_2 al piano z_3 dove il centro del cilindro non si trova più nell'origine ma in un punto a distanza m dall'origine in direzione δ .
4. La trasformazione $z = z_3 + \frac{b^2}{z_3}$ assicura il passaggio dal piano z_3 al piano fisico z dove non c'è più il cilindro ma un profilo alare posto ad un angolo di incidenza. Si osservi che in queste condizioni il punto di ristagno al bordo d'attacco si trova in una certa posizione che, in generale, non pone problemi; mentre non è detto che al bordo d'uscita fisico del profilo si trovi l'altro punto di ristagno. Dal punto di vista fisico questo è un problema in quanto i profili sono progettati in modo che il punto di ristagno sia esattamente al bordo d'uscita. Per spostare il secondo punto di ristagno c'è a disposizione il parametro libero Γ , che quindi viene fatto variare fino a quando il secondo punto di ristagno si trova al bordo d'uscita. In questo modo il valore della circolazione, inizialmente incognito, è univocamente determinato.

Procedendo analiticamente, basta ricordare che la velocità complessa è

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{dw}{dz_1} \frac{dz_1}{dz_2} \frac{dz_2}{dz_3} \frac{dz_3}{dz} \\ &= \left[U_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z_1^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z_1} \right] \frac{e^{-i\alpha}}{1 - \frac{b^2}{z_1^2}} \end{aligned}$$

e che deve annullarsi nel punto di ristagno, ovvero

$$U_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z_1^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z_1} = 0,$$

ma essendo $z_1 = -R e^{i(\alpha+\beta)}$, dove β è una caratteristica geometrica del profilo ($\beta = 0$ per la lamina piana), si ottiene

$$\Gamma = -4\pi R U_\infty \sin(\alpha + \beta)$$

da cui la portanza per unità di lunghezza dell'ala

$$L = \rho U_\infty \Gamma = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \cdot (4R) \cdot [2\pi \sin(\alpha + \beta)] = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 c C_L,$$

dove C_L indica il coefficiente di portanza e c la corda del profilo. Pertanto, essendo $c = 4R$ si ottiene

$$C_L = 2\pi \sin(\alpha + \beta) \approx 2\pi \tilde{\alpha},$$

dove l'angolo $\alpha + \beta = \tilde{\alpha}$ è l'angolo d'attacco rispetto al caso di portanza nulla e dove si è tenuto conto che per angoli piccoli il seno può essere confuso con il suo argomento (in radianti). Profili di questo tipo sono detti di Joukowsky e di osserva sperimentalmente che il loro coefficiente di portanza è proprio circa $2\pi \tilde{\alpha}$.

Esercizio 1.1 *Si disegnino le linee di corrente e le linee equipotenziali per il cilindro portante al variare di Γ fissati $R = U_\infty = 1$.*

Esercizio 1.2 *Ricordando che in coordinate polari piane*

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2},$$

scrivere uno script (in Octave o Matlab) che calcoli il campo di moto potenziale attorno ad un cilindro non portante di raggio R immerso in un flusso uniforme avente velocità asintotica parallela all'asse x e pari a U_∞ .