Laboratorio di Dinamica dei Fluidi
Esercitazione 03 – a.a. 2008-2009

Dott. Simone Zuccher

04 Giugno 2009

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Moti a potenziale

Se il campo di moto è irrotazionale e il dominio è semplicemente connesso, allora la velocità è determinabile risolvendo il problema ellittico

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \phi &= 0 & (1.1)\\
\frac{\partial \phi}{\partial n|_S} &= b(\mathbf{r}|_S, t), & (1.2)
\end{aligned}
$$

dove S è la superficie (linea in 2D) sulla quale è definita la condizione al contorno (stazionaria o meno). Per semplicità consideriamo il caso stazionario. L'irrotazionalità del campo sul dominio semplicemente connesso implica che

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

mentre il fatto che il campo di velocità è a divergenza nulla (flusso incomprimibile — campo solenoidale), assicura che

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

In coordinate cilindriche le rispettive espressioni sono

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \qquad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta},$$

e

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \qquad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r},$$

dove u_r e u_θ sono rispettivamente la componente radiale e tangenziale della velocità.

Esercizio 1.3 *Scrivere uno script (in Octave o Matlab) che calcoli il campo di moto potenziale attorno ad un cilindro di raggio R immerso in un flusso uniforme avente velocità asintotica parallela all'asse x e pari a U_∞. Il dominio è semplicemente connesso? Meglio usare coordinate cilindriche (polari) o cartesiane?*

Esercizio 1.4 *Dalla soluzione numerica determinare le linee di corrente del campo di moto supponendo $\psi = 0$ sul bordo del cilindro.*

Esercizio 1.5 *Dall'andamento della velocità sul bordo del cilindro risalire alla pressione e da questa alla forza netta orizzontale e verticale. Quanto valgono queste due forze? A meno di errori numerici, quanto dovrebbero valere? Perché?*

Esercizio 1.6 *È possibile ottenere una portanza? In che modo?*

2 Trasformazioni conformi

Invece di risolvere il problema numericamente, vediamo come esistano delle tecniche analitiche che si adattano in modo naturale alla soluzione del problema di Laplace e che fanno uso di funzioni complesse di variabile complessa.

Consideriamo nel piano cartesiano il punto $P(x, y)$ ed associamo ad esso il numero complesso $z = x + \mathrm{i}y$. Una funzione complessa di variabile complessa è una funzione f che associa al numero complesso z il numero complesso w, ovvero

$$w = f(z), \qquad z, w \in \mathbb{C}.$$

Una funzione complessa di variabile complessa di dice *analitica* su una regione Ω del piano complesso z se, per ogni $z \in \Omega$ si ha che:

1. esiste, è unico ed è finito il valore $w = f(z)$,
2. $\dfrac{\partial w}{\partial z}$ esiste, ha un sol valore, e non è né zero né infinito.

Per esempio, $w = \dfrac{1}{z-a}$ è analitica in tutto il piano complesso tranne che in $z = a$ che, per questo motivo, è detto punto singolare. La funzione $w = \log z$ è analitica ovunque tranne che in $z = 0$ dove è infinita. La funzione $w = z^2$ è analitica ovunque tranne che in $z = 0$ dove $\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$.

Per semplicità utilizziamo per w la notazione

$$w = \phi + \mathrm{i}\psi.$$

Il fatto che la derivata $\dfrac{\partial w}{\partial z}$ sia ad un sol valore implica che essa abbia lo stesso valore quando la si calcola per due direzioni tra loro ortogonali (lo studente diligente lo dimostri). Pertanto consideriamo le direzioni ortogonali $z_1 = x$ e $z_2 = \mathrm{i}y$. Si ha

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta w}{\delta z} = \lim_{\delta x, \delta y \to 0} \frac{\delta\phi + \mathrm{i}\delta\psi}{\delta x + \mathrm{i}\delta y} = \lim_{\delta z_1 \to 0} \frac{\delta w}{\delta z_1} = \lim_{\delta z_2 \to 0} \frac{\delta w}{\delta z_2},$$

ma

$$\lim_{\delta z_1\to 0}\frac{\delta w}{\delta z_1}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta w}{\delta x}=\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial \phi}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial x}\qquad \text{e}$$

$$\lim_{\delta z_2\to 0}\frac{\delta w}{\delta z_2}=\lim_{\delta y\to 0}\frac{\delta w}{\mathrm{i}\delta y}=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{i}}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)=\frac{\partial \psi}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Affinché $\dfrac{\partial w}{\partial z}$ sia la stessa indipendentemente dalla direzione, quindi, deve essere

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{2.8}$$

Tali condizioni sono dette di *Cauchy-Riemmann* e sono condizioni sufficienti affinché la funzione $w=f(z)$ con $z,w\in\mathbb{C}$ sia analitica. Si osservi che, derivando la prima rispetto a x e la seconda rispetto a y e poi sommando si ottiene

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0\qquad\Leftrightarrow\qquad\nabla^2\phi=0,$$

mentre derivando la prima rispetto a y e la seconda rispetto a x e sottraendo si ottiene

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0\qquad\Leftrightarrow\qquad\nabla^2\psi=0.$$

Come osservato nella sezione precedente, per i flussi irrotazionali su un dominio semplicemente connesso il campo di velocità è univocamente definito dal potenziale ϕ, mentre per i flussi solenoidali basta la funzione di corrente ψ. Nel nostro caso il flusso è irrotazionale e solenoidale, per cui

$$u=\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

e

$$v=\frac{\partial \phi}{\partial y}=-\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

pertanto

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}(\phi+\mathrm{i}\psi)=\frac{\partial \phi}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial y}=u-\mathrm{i}v.$$

Quindi

$$\frac{\partial w}{\partial z}=|V|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha},\qquad V=\sqrt{u^2+v^2}\qquad\text{e}\qquad\alpha=\tan^{-1}\frac{v}{u},$$

ovvero $\dfrac{\partial w}{\partial z}$ permette di risalire sia alla direzione che al modulo della velocità $V=(u,v)$ nel piano (x,y). Per i motivi qui esposti, la funzione $w=\phi+\mathrm{i}\psi$ prende il nome di *potenziale complesso*.

2.1 Corrente uniforme

Se consideriamo una corrente uniforme con velocità asintotita U_∞ si ha

$$u = U_\infty, \qquad v = 0,$$

pertanto

$$u_r = U_\infty \cos\theta, \qquad u_\theta = -U_\infty \sin\theta$$

da cui

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U_\infty \cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad \psi = U_\infty r \sin\theta$$

e

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -U_\infty \sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad \phi = U_\infty r \cos\theta.$$

Introducendo il potenziale complesso $w = \phi + \mathrm{i}\psi$ si ha

$$w = U_\infty r\cos\theta + \mathrm{i}U_\infty r\sin\theta = U_\infty r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = U_\infty z,$$

essendo $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = x + \mathrm{i}y$ la variabile complessa che identifica il punto (x, y) del piano cartesiano.

Si osservi che

$$\frac{\partial w}{\partial z} = U_\infty = u - \mathrm{i}v \qquad \Rightarrow \qquad u = U_\infty, v = 0.$$

2.2 Sorgente e pozzo

La sorgente "emette" fluido con portata costante Q e quindi ha solo componente radiale, mentre la componente tangenziale è nulla. Nel caso piano il flusso attraverso una linea chiusa, che per semplicità assumiamo essere una circonferenza con centro nel punto dove si trova la sorgente e raggio r, è

$$Q = u_r 2\pi r \qquad \Rightarrow \qquad u_r = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{m}{r}.$$

Pertanto,

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{m}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \psi = m\theta$$

e

$$u_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{m}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \phi = m\log r,$$

ovvero, introducendo il potenziale complesso,

$$w = \phi + \mathrm{i}\psi = m\log r + \mathrm{i}m\theta = m(\log r + \log \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = m\log r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = m\log z.$$

Nel caso in cui la sorgente si trovi nel punto $a \in \mathbb{C}$, l'espressione del potenziale complesso è

$$w = m\log(z - a).$$

Il pozzo è semplicemente una sorgente al contrario, ovvero "assorbe" fluido con portata Q. Pertanto, basta cambiare il segno ottenendo

$$w = -m \log(z - a).$$

Si osservi che le linee di corrente sono rette passanti dal punto a con coefficiente angolare pari a $\tan\theta$; nel caso di una sorgente esse sono uscenti dal punto a, nel caso di un pozzo sono entranti.

2.3 Doppietta

Supponiamo di mettere una sorgente nel punto $z_1 = x + \mathrm{i}y = -p, p \in \mathbb{R}$ di intensità m ed un pozzo di intensità $-m$ in $z_2 = x + \mathrm{i}y = p, p \in \mathbb{R}$ e di esaminare quanto succede nel limite $p \to 0$, ovvero a distanza $r \to \infty$. Se indichiamo con r^+ e θ^+ rispettivamente il modulo e l'argomento del numero complesso $z - z_1$ (vettore che unisce il punto generico z al punto dove si trova la sorgente), con r^- e θ^- rispettivamente il modulo e l'argomento del numero complesso $z - z_2$ (vettore che unisce il punto generico z al punto dove si trova il pozzo), con $\Delta\theta = \theta^- - \theta^+$, per il teorema dei seni applicato al triangolo di vertici z, z_1 e z_2 si ha

$$\frac{2p}{\sin\Delta\theta} = \frac{r^+}{\sin\theta^-} = \frac{r^-}{\sin\theta^+} \approx \frac{r}{\sin\theta},$$

dove si è tenuto conto del fatto che abbastanza lontano da z_1 e z_2, essendo questi due punti molto vicini, si ha che $r \approx r^+ \approx r^-$ e $\theta \approx \theta^+ \approx \theta^-$. Inoltre, essendo $\theta^+ \approx \theta^-$ si ha $\Delta\theta \approx 0$ per cui $\sin\Delta\theta \approx \Delta\theta$ pertanto nel limite della doppietta si ha

$$\frac{2p}{\sin\Delta\theta} \approx \frac{r}{\sin\theta} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\theta = \frac{2p\sin\theta}{r}.$$

Per la sovrapposizione degli effetti (le equazioni sono lineari), nel punto z si ha

$$\psi = \psi^+ + \psi^- = m\theta^+ - m\theta^- = -m\Delta\theta = -m\frac{2p\sin\theta}{r} = -\frac{\mu\sin\theta}{r},$$

dove $\mu = 2mp$, ψ^+ è la funzione di corrente associata alla sorgente e ψ^- quella associata al pozzo. Da

$$\psi = -\frac{\mu\sin\theta}{r}$$

ed osservando che

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r}$$

si ottiene

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{\mu\cos\theta}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad \phi = \frac{\mu\cos\theta}{r}.$$

In conclusione,

$$w = \phi + \mathrm{i}\psi = \frac{\mu\cos\theta}{r} - \mathrm{i}\frac{\mu\sin\theta}{r} = \frac{\mu}{r}(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)\frac{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta} = \frac{\mu}{r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)} = \frac{\mu}{z}.$$

Si osservi che le linee a ψ costante (linee di corrente) sono circonferenze passanti per l'origine e aventi il centro sull'asse y, mentre le linee equipotenziali (ϕ costante) sono circonfenze passanti per l'origine e aventi il centro sull'asse x. Come nei casi precedenti, se la doppietta non è centrata nell'origine ma in a, si ha

$$w = \frac{\mu}{z-a}.$$

2.4 Vortice

Un vortice nell'origine produce un campo di velocità con componente radiale nulla e componente tangenziale costante tale per cui la sua circolazione lungo una linea chiusa orientata in verso antiorario come per l'angolo θ, per semplicità una circonferenza con centro nell'origine e raggio r, è

$$\Gamma = 2\pi r u_\theta,$$

da cui

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Pertanto

$$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Gamma}{2\pi r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad \Rightarrow \qquad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\log r,$$

e

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \qquad \Rightarrow \qquad \phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta.$$

Il potenziale complesso è quindi

$$w = \phi + \mathrm{i}\psi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta - \mathrm{i}\frac{\Gamma}{2\pi}\log r = -\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}(\mathrm{i}\theta + \log r) = -\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}(\log \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \log r) = -\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\log z.$$

Per un vortice con centro in a si ha

$$w = -\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\log(z-a).$$

2.5 Moto attorno ad un cilindro non portante

Consideriamo un cilindro di raggio R immerso in una corrente uniforme con velocità asintotica U_∞. Vogliamo determinarne il campo di moto sotto l'ipotesi di flusso incomprimibile, non viscoso e irrotazionale. Per quanto visto in precedenza, una doppietta non introduce massa in quando la portata fornita dalla sorgente viene assorbita completamente dal pozzo. Tuttavia, l'andamento delle linee di corrente causate da una doppietta suggerisce che essa provoca un "allargamento" delle linee di corrente di un flusso uniforme nel quale essa è immersa, ovvero provoca un effetto simile a quello che ci si aspetterebbe da un cilindro immerso in una corrente uniforme. Guidati da questa intuizione, vediamo se è possibile ottenere il campo di moto potenziale attorno al cilindro sovrapponendo una doppietta con centro nell'origine al moto uniforme. Si ha

$$w = w_{\text{corrente uniforme}} + w_{\text{doppietta}} = U_\infty z + \frac{\mu}{z} = U_\infty\left(z + \frac{\mu/U_\infty}{z}\right),$$

e riscrivendo w in coordinate cartesiane si ottiene

$$\begin{aligned}
w &= U_\infty \left(x + \mathrm{i}y + \frac{\mu/U_\infty}{x+\mathrm{i}y} \right) \\
&= U_\infty \left(x + \mathrm{i}y + \frac{\mu/U_\infty}{x+\mathrm{i}y} \frac{(x-\mathrm{i}y)}{(x-\mathrm{i}y)} \right) \\
&= U_\infty \left(x + \mathrm{i}y + \frac{\mu/U_\infty}{x^2+y^2} (x-\mathrm{i}y) \right) \\
&= U_\infty \left[x \left(1 + \frac{\mu/U_\infty}{x^2+y^2} \right) + \mathrm{i}y \left(1 - \frac{\mu/U_\infty}{x^2+y^2} \right) \right] \\
&= \phi + \mathrm{i}\psi.
\end{aligned}$$

Pertanto,

$$\psi = U_\infty y \left(1 - \frac{\mu/U_\infty}{x^2+y^2} \right),$$

ma si osservi che sul contorno del cilindro ψ è costante. Essendo il tutto definitio a meno di una costante arbitraria, richiediamo per semplicità $\psi = 0$ sulla superficie del cilindro, identificata dall'equazione $x^2 + y^2 = R^2$. Pertanto,

$$\psi|_{x^2+y^2=R} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 1 - \frac{\mu/U_\infty}{R^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mu/U_\infty = R^2 \qquad \Rightarrow \qquad \mu = U_\infty R^2,$$

ovvero il potenziale complesso che permette di ricostruire il campo di moto attorno ad un cilindro non portante di raggio R è

$$w = U_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right).$$

Esercizio 2.9 *Determinare le linee di corrente del campo di moto e confrontarle con i risultati ottenuti per via numerica.*

Esercizio 2.10 *Dall'andamento della velocità sul bordo del cilindro risalire alla pressione e da questa alla forza netta orizzontale e verticale agenti sul cilindro e confrontarle con i risultati del codice numerico. Quali considerazioni si possono trarre?*

Esercizio 2.11 *Come si potrebbe ottenere una forza netta verso l'alto (portanza)? Al fine di ottenerla, come va modificato il potenziale complesso?*