Analisi Matematica per Bio-Informatici
Esercitazione 13 – a.a. 2007-2008

Dott. Simone Zuccher

28 Febbraio 2008

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Integrali definiti

Richiami utili sugli integrali definiti. Siano $f(x), g(x)$ limitate ed integrabili su $I \subseteq \mathbb{R}$ e $a, b, c \in I,\ a < b$. Allora:

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx.$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0.$
- $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$
- Se $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ con $a < b$, $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$
- $g(x) \geq 0 \Rightarrow \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \geq 0.$
- $\displaystyle\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$
- $\displaystyle m \leq \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right] \leq M$ con $\displaystyle m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ e $\displaystyle M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.
- $f(x)$ continua su $[a, b] \Rightarrow \exists c \in [a, b]: \quad \displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).$

- Integrazione per parti: $\displaystyle\int_a^b [f'(x) \cdot g(x)]\, dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b [f(x) \cdot g'(x)]\, dx.$

- Integrazione per sostituzione. Sia $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ derivabile con derivata continua. Allora: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} [f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)]\, dt$

- Teorema fondamentale del calcolo integrale. Sia $f(x)$ continua ed integrabile su $[a, b]$ e $c, x \in [a, b]$, allora la funzione $F(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\, dt$ è una primitiva di $f(x)$. Inoltre, $F(x)$ è derivabile e risulta $F'(x) = f(x)$.

- Formula fondamentale per il calcolo integrale. Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = F|_a^b = [F]_a^b = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$.

- Significato geometrico: l'integrale definito $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ di una funzione *non negativa* $f(x)$ rappresenta l'area compresa tra il grafico della funzione $y = f(x)$, l'asse x e le rette verticali $x = a$ e $x = b$.

- Area tra due curve $f(x)$ e $g(x)$. Se le curve hanno due o più punti di intersezione di ascissa $x_i, i = 1, \ldots, n, \quad n \geq 2$, allora

$$A = \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)|\, dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x) - g(x)|\, dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} |f(x) - g(x)|\, dx.$$

  Si noti che $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$ se $f(x) \geq g(x)$ oppure $|f(x) - g(x)| = g(x) - f(x)$ se $g(x) > f(x)$. Quindi, basta considerare per ciascun intervallo la differenza tra la funzione "maggiore" e quella "minore".

Esercizio 1.1 *Calcolare* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\, dx.$

Risoluzione. Essendo $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + c$, si ha $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0$. ∎

Esercizio 1.2 *Calcolare* $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\sin x)^2\, dx.$

Risoluzione. Essendo $\displaystyle\int (\sin x)^2\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$ (si vedano le esercitazioni precedenti), si ha $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\sin x)^2\, dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$. ∎

Esercizio 1.3 *Calcolare* $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx.$

Risoluzione. Essendo $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{2(x+1)^{3/2}}{3} - 2\sqrt{x+1} + c$ (si vedano le esercitazioni precedenti, integrali per sostituzione), si ha $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left[\frac{2(x+1)^{3/2}}{3} - 2\sqrt{x+1}\right]_0^3 = \left[\frac{2(4)^{3/2}}{3} - 2\sqrt{4}\right] - \left[\frac{2(1)^{3/2}}{3} - 2\sqrt{1}\right] = \frac{8}{3}$. ■

Esercizio 1.4 *Calcolare* $\int_0^3 |x-1|\,dx$.

Risoluzione. Essendo $|x-1| = x-1$ per $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ e $|x-1| = 1-x$ per $x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$, si ha $\int_0^3 |x-1|\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^3 (x-1)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^3 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$. ■

Esercizio 1.5 *Calcolare* $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$.

Risoluzione. Si può procedere separando il $|\sin x|$ nei due casi (come fatto nell'esercizio precedente), oppure osservare che $f(x) = |\sin x|$ è periodica di periodo π per cui: $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} |\sin x|\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} |\sin x|\,dx + \int_0^{\pi} |\sin x|\,dx = 2\int_0^{\pi} |\sin x|\,dx = 2\int_0^{\pi} \sin x\,dx$ $(\sin x \geq 0 \forall\ x \in [0,\pi]) = [-2\cos x]_0^{\pi} = -2\cos(\pi) + 2\cos(0) = 2 + 2 = 4$. ■

Esercizio 1.6 *Determinare l'area della regione di piano compresa tra la curva* $y = \log x$, *l'asse delle ascisse e la retta* $x = e$.

Risoluzione. $A = \int_1^e \log x\,dx = [x(\log x - 1)]_1^e = 1$. ■

Esercizio 1.7 *Determinare l'area della regione di piano compresa tra la parabola* $y = x^2$ *e la retta* $y = x$.

Risoluzione. Si noti che le due curve si intersecano in due punti $(0,0)$ e $(1,1)$ e che nell'intervallo $[0,1]$ si ha $x \geq x^2$. Quindi l'area in questione è $\int_0^1 |x^2 - x|\,dx = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. ■

Esercizio 1.8 *Determinare l'area della regione di piano compresa tra la parabola* $y = x^2$ *e la retta* $y = -2x + 3$.

Risoluzione. Le due curve si intersecano in $(-3,9)$ e $(1,1)$, inoltre nell'intervallo $[-3,1]$ si ha $-2x+3 \geq x^2$. Quindi l'area in questione è $\int_{-3}^{1}(-2x+3-x^2)\ dx = \left[-x^2+3x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{1} = \frac{32}{3}$. ■

Esercizio 1.9 *Determinare l'area della regione di piano compresa tra la parabola $y^2 = 4x$, la retta $2x+y-4=0$ e l'asse delle ascisse.*

Risoluzione. Si noti che la parabola ha asse di simmetria parallelo all'asse delle x e vertice nell'origine. Inoltre, le due curve si intersecano in $(1,2)$ e $(4,-4)$, e la retta $y=-2x+4$ interseca l'asse x in $x=2$. Vi sono pertanto due possibili regioni: $A_1 = \int_0^1 \sqrt{4x}\ dx + \int_1^2 (-2x+4)\ dx = \frac{4}{3}+1 = \frac{7}{3}$ e $A_2 = \int_0^2 [0-(-\sqrt{4x})]\ dx + \int_2^4 [(-2x+4)-(-\sqrt{4x})]\ dx = \frac{8}{3}\sqrt{2} + \frac{20-8\sqrt{2}}{3} = \frac{20}{3}$. ■

Esercizio 1.10 *Determinare l'area della regione di piano delimitata nell'ellisse di equazione* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Risoluzione. Ricavando $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, l'area in questione è data da
$A = 4\cdot \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ dx =$ (dopo aver posto $x = a\sin t$) $=$
$4\cdot\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2}\left[\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\right]\ dt = 4ab\int_0^{\pi/2}(\cos t)^2 dt = \left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} = 4ab\frac{\pi}{4} = \pi ab$. ■

2 Integrali impropri

Richiami utili sugli integrali impropri.

- Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora l'integrale improprio $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\ dx$ è convergente per $\alpha > 1$ e positivamente divergente per $\alpha \leq 1$.
- Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora l'integrale improprio $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\ dx$ è convergente per $\alpha < 1$ e positivamente divergente per $\alpha \geq 1$.
- Criterio del confronto. Siano $f(x), g(x)$ due funzioni definite su $[a,+\infty[$ e integrabili in ogni intervallo limitato $[a,b]$ con $a<b$; se $g(x)$ è integrabile su $[a,+\infty[$ ed esiste $x_0 \geq a$ tale che $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq x_0$, allora anche $f(x)$ è integrabile su $[a,+\infty[$.

- Se l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ è assolutamente convergente, allora l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ è convergente.
  L'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ si dice assolutamente convergente se l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} |f(x)|\ dx$ converge.

Esercizio 2.11 *Dopo averne discusso la convergenza, calcolare* $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\ dx$ *utilizzando la definizione.*

Risoluzione. Il problema si verifica in $x = 2$. Si osservi che $\frac{1}{\sqrt{2-x}} = \frac{1}{(2-x)^{1/2}}$, pertanto l'integrale improprio converge ($1/2 < 1$). Per calcolarne il valore si utilizza la definizione: $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\ dx = \lim_{t\to 2^-} \left[\int_1^t \frac{1}{\sqrt{2-x}}\ dx\right]$. Calcolando dapprima l'integrale indefinito $\int \frac{1}{\sqrt{2-x}}\ dx = \int (2-x)^{-1/2}\ dx = -2\sqrt{2-x} + c$, si ha $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\ dx = \lim_{t\to 2^-} \left[\int_1^t \frac{1}{\sqrt{2-x}}\ dx\right] = \lim_{t\to 2^-} \left[-2\sqrt{2-x}\right]_1^t = \lim_{t\to 2^-} \left[-2\sqrt{2-t}+2\right] = 2$. ∎

Esercizio 2.12 *Dopo averne discusso la convergenza, calcolare* $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ dx$ *utilizzando la definizione.*

Risoluzione. Il problema si verifica in $x = 2$. Si osservi che $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(2-x)(2+x)}} \sim \frac{1}{2(2-x)^{1/2}}$ per $x \to 2$, pertanto l'integrale improprio converge ($1/2 < 1$). Si ha quindi $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ dx = \lim_{t\to 2^-} \left[\int_0^t \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ dx\right] = \lim_{t\to 2^-} \left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^t = \lim_{t\to 2^-} \arcsin\frac{t}{2} = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. ∎

Esercizio 2.13 *Siano $a \in \mathbb{R}, a > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutere, al variare di α, la convergenza dell'integrale improprio*

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\ dx$$

.

Risoluzione. Se $\alpha \neq 1$ si ha $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\ dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\int_a^t \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\ dx\right] = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{(\log x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^t = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{(\log t)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{(\log a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]$. Pertanto l'integrale converge se $-\alpha+1 < 0$ ovvero per $\alpha > 1$, mentre diverge se $-\alpha+1 > 0$ ovvero per $\alpha < 1$.

Se $\alpha = 1$ si ha $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} [\log(\log x)\ dx]_a^t = \lim_{t\to+\infty} [\log(\log t) - \log(\log a)] = +\infty$.

In conclusione, l'integrale dato converge per $\alpha > 1$ e diverge positivamente per $\alpha \le 1$. ■

Esercizio 2.14 *Siano $a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutere, al variare di α, la convergenza dell'integrale improprio*

$$\int_0^a \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\,dx$$

Risoluzione. Si proceda come nell'esercizio precedente. ■

Esercizio 2.15 *Senza eseguire l'integrazione, si discuta la convergenza dell'integrale improprio*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x}\,dx$$

Risoluzione. $\displaystyle\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} \sim \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2x^{3/2}}$ per $x \to +\infty$, pertanto l'integrale converge. ■

Esercizio 2.16 *Senza eseguire l'integrazione, si discuta la convergenza dell'integrale improprio*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$$

Risoluzione. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \to 0$ e $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ per $x \to 1$, pertanto l'integrale converge. ■

Esercizio 2.17 *Senza eseguire l'integrazione, si discuta la convergenza dei seguenti integrali impropri:*

$$(a)\quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)dx \qquad\qquad (b)\quad \int_1^{+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

Risoluzione. (a) Essendo $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}}\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x^{3/2}}$ per $x \to +\infty$, l'integrale converge.

(b) Essendo $\displaystyle\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2 \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$, l'integrale converge. ■

Esercizio 2.18 *Senza eseguire l'integrazione, si discuta la convergenza dei seguenti integrali impropri:*

$$(a) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\, dx \qquad\qquad (b) \quad \int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}\, dx$$

Risoluzione. (a) Essendo $\dfrac{1}{\sqrt{\tan x}} \sim \dfrac{1}{x^{1/2}}$ per $x \to 0$, l'integrale converge.
(b) Essendo $\dfrac{1}{e^{\sqrt{x}}-1} \sim \dfrac{1}{x^{1/2}}$ per $x \to 0$, l'integrale converge. ■

Esercizio 2.19 *Determinare il più piccolo valore di $n \in \mathbb{N}$ affinché l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2+1})^n}\, dx$ converga.*

Risoluzione. Essendo $\dfrac{x}{(\sqrt{x^2+1})^n} \sim \dfrac{1}{x^{n-1}}$ per $x \to +\infty$, si ha convergenza per $n-1 > 1$, ovvero per $n > 2$. Quindi il minor $n \in \mathbb{N}$ affinché l'integrale improprio converga è $n = 3$. ■

Esercizio 2.20 *Discutere al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(2x+3)^{b+1}}\, dx$$

Risoluzione. Per $x \to 0^+$ si ha $\dfrac{1}{x^a(2x+3)^{b+1}} \sim \dfrac{1}{3^{b+1}x^a}$, quindi l'integrale converge per $a < 1$.
Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{1}{x^a(2x+3)^{b+1}} \sim \dfrac{1}{2^{b+1}x^{a+b+1}}$, pertanto l'integrale converge per $a+b+1 > 1$, ovvero $b > -a$.
Globalmente l'integrale converge per $a < 1 \wedge b > -a$. ■

Esercizio 2.21 *Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio*

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^a}{\sqrt{x^2-1}}\, dx$$

Risoluzione. Si noti che $\dfrac{(\log x)^a}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{(\log x)^a}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}$. Eseguendo la sostituzione $t = x-1 \Rightarrow x = 1+t$, si ha $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^a}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{(\log(1+t))^a}{\sqrt{t(t+2)}}\, dt.$

Per $t \to 0^+$ si ha $\dfrac{(\log(1+t))^a}{\sqrt{t(t+2)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2}t^{1/2-a}}$, quindi l'integrale converge per $1/2 - a < 1$, ovvero per $a > 3/2$.
Per $x \to +\infty$ si ha $\dfrac{(\log(1+t))^a}{\sqrt{t(t+2)}} \sim \dfrac{1}{t(\log t)^{-a}}$, pertanto l'integrale converge per $-a > 1 \Rightarrow a < -1$.
In conclusione, l'integrale dato *non converge*, essendo $a > 3/2 \wedge a < -1$ impossibile. ■

3 Funzione integrale

Esercizio 3.22 *Utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale ed il teorema per le derivate di funzioni composte, calcolare le derivate delle seguenti funzioni integrali:*

$$(a)\ F(x) = \int_0^x \sqrt{t}\, dt \qquad (b)\ F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\, dt \qquad (c)\ F(x) = \int_{2x}^{3x} (\cos t)^2\, dt$$

.

Risoluzione.
(*a*) $F'(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$.
(*b*) $F'(x) = e^{(\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^x$.
(*c*) $F(x) = \int_{2x}^{3x} (\cos t)^2\ dt = \int_{2x}^{x_0} (\cos t)^2\ dt + \int_{x_0}^{3x} (\cos t)^2\ dt = \int_{x_0}^{3x} (\cos t)^2\ dt - \int_{x_0}^{2x} (\cos t)^2\ dt$. Pertanto $F'(x) = [\cos(3x)]^2 \cdot (3x)' - [\cos(2x)]^2 \cdot (2x)' = 3\cos^2(3x) - 2\cos^2(2x)$. ■