Analisi Matematica per Bio-Informatici
Esercitazione 12 – a.a. 2007-2008

Dott. Simone Zuccher

21 Febbraio 2008

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Integrali indefiniti di funzioni razionali fratte

Richiami utili per l'integrazione di funzioni razionali fratte.

- Chiamiamo *funzione razionale fratta* una funzione che è il rapporto di due polinomi $P_m(x)$ e $Q_n(x)$, rispettivamente di grado m ed n, ossia una funzione del tipo

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{p_m x^m + p_{m-1}x^{m-1} + \cdots + p_1 x + p_0}{q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0}, \qquad m, n \in \mathbb{N}.$$

- Se $m \geq n$, ossia se il grado del numeratore è maggiore o uguale a quello del denominatore, allora si può eseguire la divisione ottenendo

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = H_{m-n}(x) + \frac{R_l(x)}{Q_n(x)}, \qquad m, n, l \in \mathbb{N} \wedge l < n$$

  dove $H_{m-n}(x)$ è il quoziente (di grado $m-n$) e $R(x)$ il resto (di cui a priori si sa solo che ha grado inferiore al divisore $Q_n(x)$, ossia $l < n$).

  Essendo $H(x)$ un polinomio, il suo integrale è immediato. Al contrario, l'integrale di $\dfrac{R_l(x)}{Q_n(x)}$ (con $l < n$) non lo è, e viene qui di seguito discusso nel dettaglio.

- $\displaystyle\int \frac{R_l(x)}{Q_n(x)}\,dx, \quad l < n$. Ci sono due casi:

  1. $R_l(x) = k \cdot Q_n'(x)$, ovvero il numeratore è direttamente proporzionale alla derivata del denominatore. In questo caso l'integrale è immediato e vale $\displaystyle\int \frac{R_l(x)}{Q_n(x)}\,dx = \int \frac{k \cdot Q_n'(x)}{Q_n(x)}\,dx = k \log|Q_n(x)| + c.$

2. Più in generale, il rapporto di due polinomi $\dfrac{R_l(x)}{Q_n(x)}$ $(l < n)$ può sempre essere riscritto come

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{11}}{x+B_1} + \frac{A_{12}}{(x+B_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1\gamma_1}}{(x+B_1)^{\gamma_1}} + \\ & \frac{A_{21}}{x+B_2} + \frac{A_{22}}{(x+B_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2\gamma_2}}{(x+B_2)^{\gamma_2}} + \\ & \cdots + \\ & \frac{A_{k1}}{x+B_k} + \frac{A_{k2}}{(x+B_k)^2} + \cdots + \frac{A_{k\gamma_k}}{(x+B_k)^{\gamma_k}} + \\ & \frac{C_{11}x+D_{11}}{x^2+E_1x+F_1} + \frac{C_{12}x+D_{12}}{(x^2+E_1x+F_1)^2} + \cdots + \frac{C_{1\mu_1}x+D_{1\mu_1}}{(x^2+E_1x+F_1)^{\mu_1}} + \\ & \frac{C_{21}x+D_{21}}{x^2+E_2x+F_2} + \frac{C_{22}x+D_{22}}{(x^2+E_2x+F_2)^2} + \cdots + \frac{C_{2\mu_2}x+D_{2\mu_2}}{(x^2+E_2x+F_2)^{\mu_2}} + \\ & \cdots + \\ & \frac{C_{h1}x+D_{h1}}{x^2+E_hx+F_h} + \frac{C_{h2}x+D_{h2}}{(x^2+E_hx+F_h)^2} + \cdots + \frac{C_{h\mu_h}x+D_{h\mu_h}}{(x^2+E_hx+F_h)^{\mu_h}},\end{aligned}$$

dove il generico trinomio $x^2 + E_hx + F_h$ è *non scomponibile*, ovvero tale per cui $\Delta = E_h^2 - 4F_h < 0$.
L'integrale originario si riduce pertanto alla somma di integrali immediati del tipo

(a) $\displaystyle\int \frac{A_{1\gamma_2}}{(x+B_1)^{\gamma_2}}\,dx = \frac{A_{1\gamma_2}}{1-\gamma_2}(x+B_1)^{1-\gamma_2} + c$ e

(b) $\displaystyle\int \frac{C_{h\mu_h}x + D_{h\mu_h}}{(x^2+E_hx+F_h)^{\mu_h}}\,dx$. Per risolvere quest'ultimo, si ricordi la formula:

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{a}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{b-ap/2}{b^{2n-1}} I_n\left(\frac{x+p/2}{b}\right) + c,$$

essendo la funzione $I_n(t)$ ottenuta ricorsivamente da $I_1(t) = \arctan(t)$ e $I_{n+1}(t) = \dfrac{t}{2n(t^2+1)^n} + \dfrac{2n-1}{2n} I_n(t)$.

Esercizio 1.1 *Calcolare* $\displaystyle\int \frac{2x^2+5x+5}{x^3+4x^2+x-6}\,dx$.

Risoluzione. Procediamo dapprima alla scomposizione dell'integranda:
$\dfrac{2x^2+5x+5}{x^3+4x^2+x-6} = \dfrac{2x^2+5x+5}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{x+3} = \cdots =$
$\dfrac{x^2(A+B+C) + x(5A+2B+C) + (6A-3B-2C)}{(x-1)(x+2)(x+3)}$. Imponendo l'uguaglianza tra i coefficienti del numeratore della prima e quelli dell'ultima frazione si ha:

$$\begin{cases} A+B+C &= 2 \\ 5A+2B+C &= 5 \\ 6A-3B-2C &= 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= 1 \\ B &= -1 \\ C &= 2 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{2x^2+5x+5}{x^3+4x^2+x-6} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+3}.$$

L'integrale iniziale si riduce pertanto a $\displaystyle\int \frac{2x^2+5x+5}{x^3+4x^2+x-6}\,dx = \int \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+3}\right] dx =$
$\displaystyle\log|x-1| - \log|x+2| + 2\log|x+3| + c = \log\frac{|x-1|(x+3)^2}{|x+2|} + c.$ ■

Esercizio 1.2 *Calcolare* $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^3-1}\,dx.$

Risoluzione. Procediamo dapprima alla scomposizione dell'integranda:
$\displaystyle\frac{x+5}{x^3-1} = \frac{x+5}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \cdots = \frac{x^2(A+B)+x(A-B+C)+(A-C)}{(x-1)(x^2+x+1)}.$
Imponendo l'uguaglianza tra i coefficienti del numeratore della prima e quelli dell'ultima frazione si ha:

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ A-B+C &= 1 \\ A-C &= 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= 2 \\ B &= -2 \\ C &= -3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+5}{x^3-1} = \frac{2}{x-1} - \frac{2x+3}{x^2+x+1}$$

L'integrale iniziale si riduce pertanto a $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^3-1}\,dx = \int \left[\frac{2}{x-1} - \frac{2x+3}{x^2+x+1}\right] dx =$
$\displaystyle 2\log|x-1| - \left[\log|x^2+x+1| + \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right] + c =$
$\displaystyle\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c.$ ■

Esercizio 1.3 *Calcolare* $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2+x+1)}\,dx.$

Risoluzione. Procediamo dapprima alla scomposizione dell'integranda:
$\displaystyle\frac{1}{x^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$ Svolgendo al solito modo, si ottiene:

$$\begin{cases} A &= -1 \\ B &= 1 \\ C &= 1 \\ D &= 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2(x^2+x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2+x+1}$$

L'integrale iniziale si riduce pertanto a $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2+x+1)}\,dx = \int \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2+x+1}\right] dx =$
$\displaystyle -\log|x| - \frac{1}{x} + \left[\frac{1}{2}\log|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right] + c =$
$\displaystyle -\frac{1}{x} + \log\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c.$ ■

Esercizio 1.4 *Calcolare* $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x^4+2x^2+1)}\,dx.$

Risoluzione. Procediamo dapprima alla scomposizione dell'integranda: $\dfrac{1}{(x+1)(x^4+2x^2+1)} = \dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} + \dfrac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$. Svolgendo al solito modo, si ottiene:

$$\begin{cases} A &= 1/4 \\ B &= -1/4 \\ C &= 1/4 \\ D &= -1/2 \\ E &= 1/2 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{(x+1)(x^4+2x^2+1)} = \frac{1}{4(x+1)} + \frac{-x+1}{4(x^2+1)} + \frac{-x+1}{2(x^2+1)^2}$$

L'integrale iniziale si riduce pertanto a $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x^4+2x^2+1)}\,dx =$ $\displaystyle\int \left[\frac{1}{4(x+1)} + \frac{-x+1}{4(x^2+1)} + \frac{-x+1}{2(x^2+1)^2}\right] dx =$,ovvero:
$\displaystyle\int \frac{1}{4(x+1)}\,dx = \frac{1}{4}\log|x+1|$,
$\displaystyle\int \frac{-x+1}{4(x^2+1)}\,dx = -\frac{1}{8}\log|x^2+1| + \frac{1}{4}\arctan x$.
Per il calcolo di $\displaystyle\int \frac{-x+1}{2(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{-x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$ si utilizza la formula

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{a}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{b-ap/2}{b^{2n-1}} I_n\left(\frac{x+p/2}{b}\right) + c,$$

essendo la funzione $I_n(t)$ ottenuta ricorsivamente da $I_1(t) = \arctan(t)$ e $I_{n+1}(t) = \dfrac{t}{2n(t^2+1)^n} + \dfrac{2n-1}{2n} I_n(t)$. Nel nostro caso si ha $a = -1, b = 1, p = 0, q = 1$ e quindi $t = x$, da cui $\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{-x+1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{2}I_2(x)$, essendo $I_1(x) = \arctan x$ e $I_2(x) = \dfrac{x}{2(x^2+1)} + \dfrac{1}{2}\arctan x$.
In conclusione, $\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{-x+1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{2}\left[\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x\right]$ per cui $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x^4+2x^2+1)}\,dx = \frac{1}{4}\log|x+1| - \frac{1}{8}\log|x^2+1| + \frac{1}{4}\arctan x + \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{x}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4}\arctan x + c = \frac{1}{4}\log\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x+1}{4(x^2+1)} + c.$ ■

Esercizio 1.5 *Calcolare* $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+4x+5)^3}\,dx$.

Risoluzione. Si noti che $\Delta = 16 - 20 < 0$; utilizziamo pertanto la formula

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{a}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{b-ap/2}{b^{2n-1}} I_n\left(\frac{x+p/2}{b}\right) + c,$$

essendo la funzione $I_n(t)$ ottenuta ricorsivamente da $I_1(t) = \arctan(t)$ e $I_{n+1}(t) = \dfrac{t}{2n(t^2+1)^n} + \dfrac{2n-1}{2n} I_n(t)$. Nel nostro caso si ha $a = 0, b = 1, p = 4, q = 1$ e quindi

$t = (x + p/2)/b = x + 2$, da cui
$I_1(x + 2) = \arctan(x + 2)$,
$I_2(x + 2) = \dfrac{x + 2}{2((x + 2)^2 + 1)} + \dfrac{1}{2}\arctan(x + 2)$,
$I_3(x + 2) = \dfrac{x + 2}{4((x + 2)^2 + 1)^2} + \dfrac{3}{4}\left[\dfrac{x + 2}{2((x + 2)^2 + 1)} + \dfrac{1}{2}\arctan(x + 2)\right]$. In conclusione,
$\displaystyle\int \frac{1}{(x^2 + 4x + 5)^3}\,dx = \frac{x + 2}{4((x + 2)^2 + 1)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{x + 2}{2((x + 2)^2 + 1)} + \frac{1}{2}\arctan(x + 2)\right] + c.$ ■

2 Integrali indefiniti per sostituzione

Richiami utili per l'integrazione tramite sostituzione.

- L'integrale $\int f(x)\,dx$ viene riscritto utilizzando la sostituzione $x = \varphi(t)$, dopo aver osservato che $dx = D[\varphi(t)]\,dt$. Quindi

$$\int f(x)\,dx = \int [f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)]\,dt$$

- Nel caso di integrali *definiti* (si veda più avanti), la sostituzione va applicata anche agli estremi di integrazione:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta [f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)]\,dt, \quad \text{essendo} \quad a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta).$$

- Sostituzioni consigliate. Sia $R(\theta_1(x), \theta_1(x), \ldots, \theta_n(x))$ una funzione razionale delle funzioni $\theta_i(x), i = 1 \ldots n$, allora si consigliano le sostituzioni riportate in tabella 1.

Esercizio 2.6 *Calcolare* $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

Risoluzione. Eseguendo la sostituzione $x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t\,dt$ si ha $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \left[\sqrt{a^2 - a^2(\sin t)^2} \cdot (a\cos t)\right]\,dt = a^2 \int (\cos t)^2\,dt = \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t) + c.$ Essendo $x = a\sin t \Rightarrow t = \arcsin(x/a)$ e $\cos t = \sqrt{1 - x^2/a^2} = \sqrt{a^2 - x^2}/a$, e quindi $\displaystyle = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} + c = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}.$ ■

Esercizio 2.7 *Calcolare* $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Risoluzione. Eseguendo la sostituzione $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$ si ha $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = -2\cos t + c = -2\cos\sqrt{x} + c.$ ■

Integrale	Sostituzione consigliata
$\int R(a^x)\ dx$	$a^x = t$
$\int R(\log_a x)\ dx$	$\log_a x = t$
$\int R(\sin x, \cos x)\ dx$	$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$
$\int R((\sin x)^2, (\cos x)^2, \sin x \cdot \cos x, \tan x, \cot x)\ dx$	$\tan x = t$
si noti che : $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\tan x = t \Rightarrow (\sin x)^2 = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad (\cos x)^2 = \frac{1}{1+t^2}$	

Tabella 1: Sostituzione consigliata per integrali di funzioni razionali di alcune funzioni trascendenti.

Esercizio 2.8 *Calcolare* $\int \arctan\sqrt{x}\ dx$*.*

Risoluzione. Eseguendo la sostituzione $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\ dt$ si ha $\int \arctan\sqrt{x}\ dx = t^2 \arctan t - t + \arctan t + c = x \arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + c$. ■

Esercizio 2.9 *Calcolare* $\int \sqrt{2^x - 1}\ dx$*.*

Risoluzione. Eseguendo la sostituzione $2^x - 1 = t^2 \Rightarrow x = \log_2(1+t^2) \Rightarrow dx = \frac{2t}{(1+t^2)\log 2}\ dt$ si ha $\int \sqrt{2^x-1}\ dx = \int \left[t \cdot \frac{2t}{(1+t^2)\log 2}\right]\ dt = \frac{2}{\log 2}\int \frac{t^2}{1+t^2}\ dt = \frac{2}{\log 2}\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\ dt = \cdots = \frac{2}{\log 2}(t - \arctan t) + c = \frac{2}{\log 2}\left[\sqrt{2^x-1} - \arctan\sqrt{2^x-1}\right] + c$. ■

Esercizio 2.10 *Calcolare* $\int \cos(\log x)\ dx$ *e* $\int \sin(\log x)\ dx$*.*

Risoluzione. Eseguendo la sostituzione $\log x = t \Rightarrow x = e^t$ ed integrando per parti si ha

$$\int \cos(\log x)\, dx = \frac{x}{2}[\sin(\log x) + \cos(\log x)] + c \text{ e}$$
$$\int \sin(\log x)\, dx = \frac{x}{2}[\sin(\log x) - \cos(\log x)] + c. \quad \blacksquare$$

Esercizio 2.11 *Calcolare gli integrali*

$$(a) \int \frac{1}{1+e^x}\, dx \qquad (b) \int \frac{1}{1-e^{2x}}\, dx \qquad (c) \int \frac{1}{e^{2x}-3e^x+2}\, dx \qquad (d) \int \frac{e^x}{3e^{2x}-e^x+2}\, dx$$

Risoluzione. Eseguendo la sostituzione $e^x = t$ ed utilizzando le tecniche di integrazione già note, si ha rispettivamente $(a)\quad x - \log(1+e^x) + c$, $(b)\quad x - \frac{1}{2}\log|1-e^{2x}| + c$, $(c)\ \frac{1}{2}x - \log|e^x - 1| + \frac{1}{2}\log|e^x-2| + c$, $(d)\ \frac{2}{\sqrt{23}}\arctan\frac{6e^x-1}{\sqrt{23}} + c.$ $\blacksquare$

Esercizio 2.12 *Calcolare* $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\, dx.$

Risoluzione. Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sin x$ si ha $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\, dx$. Eseguendo quindi la sostituzione $t = \cos x$ si ottiene $\displaystyle\frac{1}{2}[\log(1-\cos x) - \log(1+\cos x)] + c$. Si confronti questo risultato con l'esercizio 2.2 dell'esercitazione 11. Alternativamente, utilizzando le sostituzioni consigliate dalla tabella 1, basta porre $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$, da cui $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ e $x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \dfrac{2}{1+t^2}\, dt$, ovvero
$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \log|t| + c = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c \quad \blacksquare$$

Esercizio 2.13 *Calcolare* $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx.$

Risoluzione. Eseguendo la sostituzione $x+1 = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t\, dt$ si ha
$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx = \int \frac{t^2-1}{t} 2t\, dt = \frac{2t^3}{3} - 2t + c = \frac{2(x+1)^{3/2}}{3} - 2\sqrt{x+1} + c. \quad \blacksquare$$