Analisi Matematica per Bio-Informatici
Esercitazione 11 – a.a. 2007-2008

Dott. Simone Zuccher

14 Febbraio 2008

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Integrali indefiniti immediati (o quasi)

Richiami utili per il calcolo degli integrali

- Proprietà:
  1. $\int f(x)\ dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$, ovvero le primitive di una funzione $f(x)$ differiscono tutte per una costante.
  2. $\int [f(x) \pm g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$
  3. $\int kf(x)\ dx = k \int g(x)\ dx$
- Integrali immediati, o quasi, vedi tabella 1, pagina 2

Esercizio 1.1 *Calcolare i seguenti integrali.*

$$\int \cot x\ dx \qquad [\log|\sin x| + c] \qquad\qquad \int \tan x\ dx \qquad [-\log|\cos x| + c]$$

$$\int \sin(ax)\ dx \qquad \left[-\frac{1}{a}\cos(ax) + c\right] \qquad\qquad \int \cos(ax)\ dx \qquad \left[\frac{1}{a}\sin(ax) + c\right]$$

$$\int \sqrt{x}\ dx \qquad \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c\right] \qquad\qquad \int \frac{1}{\sqrt{x+a}}\ dx \qquad [2\sqrt{x+a} + c]$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a+x^2}}\ dx \qquad [\sqrt{a+x^2} + c] \qquad\qquad \int \frac{x}{\sqrt{a-x^2}}\ dx \qquad [-\sqrt{a-x^2} + c]$$

Risoluzione. Si applichino le conoscenze relative agli integrali immediati ed altri integrali notevoli (vedi tabella 1, pagina 2). ∎

Integrali fondamentali		Altri integrali notevoli	
$\int x^\alpha\, dx$	$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \neq -1$	$\int f'(x)\cdot[f(x)]^\alpha\, dx$	$= \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \neq -1$
$\int \frac{1}{x}\, dx$	$= \log\lvert x\rvert + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$	$= \log\lvert f(x)\rvert + c$
$\int a^x\, dx$	$= \frac{a^x}{\log a} + c,\ a > 0 \wedge a \neq 1$	$\int f'(x)\cdot a^{f(x)}\, dx$	$= \frac{a^{f(x)}}{\log a} + c,\ a > 0 \wedge a \neq 1$
$\int e^x\, dx$	$= e^x + c$	$\int f'(x)\cdot e^{f(x)}\, dx$	$= e^{f(x)} + c$
$\int \sin x\, dx$	$= -\cos x + c$	$\int f'(x)\cdot\sin[f(x)]\, dx$	$= -\cos[f(x)] + c$
$\int \cos x\, dx$	$= \sin x + c$	$\int f'(x)\cdot\cos[f(x)]\, dx$	$= \sin[f(x)] + c$
$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\, dx$	$= \tan x + c$	$\int \frac{f'(x)}{[\cos f(x)]^2}\, dx$	$= \tan[f(x)] + c$
$\int \frac{1}{(\sin x)^2}\, dx$	$= -\cot x + c$	$\int \frac{f'(x)}{[\sin f(x)]^2}\, dx$	$= -\cot[f(x)] + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$	$= \arcsin x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\, dx$	$= \arcsin[f(x)] + c$
$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx$	$= \arctan x + c$	$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\, dx$	$= \arctan[f(x)] + c$

Tabella 1: Tabella degli integrali notevoli

Esercizio 1.2 *Dimostrare, sotto l'ipotesi* $a > 0$, *le seguenti uguaglianze.*

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \arcsin\frac{x}{a} + c \qquad \int \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$$

Risoluzione. Si applichino le conoscenze relative agli integrali immediati ed altri integrali notevoli (vedi tabella 1, pagina 2). ■

Esercizio 1.3 *Calcolare i seguenti integrali.*

$\displaystyle\int \frac{1}{(5x+3)^6}\,dx$	$\displaystyle\left[-\frac{1}{25(5x+3)^5}+c\right]$	$\displaystyle\int \sqrt{x+2}\,dx$	$\left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}+c\right]$
$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx$	$\displaystyle\left[-\frac{1}{3}\sqrt{2-3x^2}+c\right]$	$\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$	$[-\arcsin\frac{1}{x}+c]$
$\displaystyle\int \sin^5 x\cos x\,dx$	$\displaystyle\left[\frac{1}{6}\sin^6 x+c\right]$	$\displaystyle\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\displaystyle\left[\frac{1}{3}(\arcsin x)^3+c\right]$
$\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\,dx$	$[\log\lvert\arctan x\rvert+c]$	$\displaystyle\int \frac{1}{(\arcsin x\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$[\log\lvert\arcsin x\rvert+c]$
$\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx$	$[\log\lvert\log x\rvert+c]$	$\displaystyle\int \frac{(\log x)^n}{x}\,dx,\ n\neq -1$	$\displaystyle\left[\frac{(\log x)^{n+1}}{n+1}+c\right]$
$\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{1+(\sin x)^2}\,dx$	$[\log(1+(\sin x)^2)+c]$	$\displaystyle\int 3xe^{x^2}\,dx$	$\displaystyle\left[\frac{3}{2}e^{x^2}+c\right]$

Risoluzione. Si applichino le conoscenze relative agli integrali immediati ed altri integrali notevoli (vedi tabella 1, pagina 2). ■

2 Integrali che richiedono alcune manipolazioni della funzione integranda

Negli esercizi che seguono sarà necessario manipolare la funzione integranda in modo da ricondursi ad integrali immediati (o quasi) visti precedentemente.

Esercizio 2.4 *Tenendo conto delle uguaglianze goniometriche note, calcolare i seguenti integrali.*

$$1.\quad \int \sin^2 x\,dx \qquad\qquad 2.\quad \int \cos^2 x\,dx$$

Risoluzione. Dalla formula di duplicazione del coseno $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ si ha

1. $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos(2x)}{2}$, quindi $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx - \int \frac{\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{\sin(2x)}{4} + c.$

2. Osservando che $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$, si ottiene $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}\, dx + \int \frac{\cos(2x)}{2}\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{\sin(2x)}{4} + c.$

■

Esercizio 2.5 *Tenendo conto delle uguaglianze goniometriche note, calcolare i seguenti integrali.*

$$1. \quad \int \frac{1}{\sin x}\, dx \qquad\qquad 2. \quad \int \frac{1}{\cos x}\, dx$$

Risoluzione. Dalla formula di duplicazione del seno $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ si ottiene $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, da cui

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\, dx = \int \frac{1}{2}\frac{1}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\, dx = \int \frac{\left(\tan\frac{x}{2}\right)'}{\tan\frac{x}{2}}\, dx = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c.$
   Si dimostri, per esercizio ed utilizzando gli stessi passaggi, che in generale vale la seguente
   $$\int \frac{1}{\sin(x+a)}\, dx = \log\left|\tan\left(\frac{x+a}{2}\right)\right| + c \tag{2.6}$$
2. Utilizzando la (2.6), dopo aver osservato che $\cos x = \sin(x + \pi/2)$, si ottiene $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}\, dx = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$

■

Esercizio 2.7 *Tenendo conto delle uguaglianze goniometriche note, calcolare i seguenti integrali.*

$$1. \quad \int \frac{1}{\sin x \cos x}\, dx \qquad\qquad 2. \quad \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$$

Risoluzione.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x \cos x}\, dx = \int \frac{1}{\tan x \cos^2 x}\, dx = \log|\tan x| + c$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2}\, dx = \int \frac{1}{[(\sin(2x))/2]^2}\, dx = 2\int \frac{(2x)'}{[\sin(2x)]^2}\, dx = -2\cot(2x) + c$

■

Esercizio 2.8 *Dimostrare le seguenti uguaglianze.*

1. $$\int \frac{hx+k}{mx+n}\,dx = \frac{h}{m}x + \frac{km-hn}{m^2}\log|mx+n| + c$$

2. $$\int \frac{hx+k}{mx^2+n}\,dx = \frac{h}{2m}\log|mx^2+n| + \frac{k}{\sqrt{mn}}\arctan\left(\sqrt{\frac{m}{n}}x\right) + c, \quad m\cdot n > 0$$

Risoluzione.

1. $$\int \frac{hx+k}{mx+n}\,dx = \frac{1}{m}\int \frac{hmx+mk}{mx+n}\,dx = \frac{1}{m}\int \frac{hmx+mk+hn-hn}{mx+n}\,dx =$$
$$\frac{1}{m}\int \frac{h(mx+n)+km-hn}{mx+n}\,dx = \frac{h}{m}\int 1\,dx + \frac{km-hn}{m^2}\int \frac{m}{mx+n}\,dx =$$
$$\frac{h}{m}x + \frac{km-hn}{m^2}\log|mx+n| + c$$

2. $$\int \frac{hx+k}{mx^2+n}\,dx = h\int \frac{x}{mx^2+n}\,dx + k\int \frac{1}{mx^2+n}\,dx =$$
$$\frac{h}{2m}\int \frac{2mx}{mx^2+n}\,dx + \frac{k}{n}\frac{1}{\sqrt{m/n}}\int \frac{\sqrt{m/n}}{(\sqrt{m/n}x)^2+1}\,dx =$$
$$\frac{h}{2m}\log|mx^2+n| + \frac{k}{\sqrt{mn}}\arctan\left(\sqrt{\frac{m}{n}}x\right) + c$$

■

Esercizio 2.9 *Calcolare* $\displaystyle\int \frac{3x+2}{4x+5}\,dx.$

Risoluzione. Eseguendo gli stessi passaggi del primo esempio dell'esercizio precedente, si ottiene $\displaystyle\int \frac{3x+2}{4x+5}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{12x+8}{4x+5}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{12x+8+15-15}{4x+5}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{12x+15-7}{4x+5}\,dx = \frac{3}{4}\int 1\,dx - \frac{7}{4}\int \frac{1}{4x+5}\,dx = \frac{3}{4}x - \frac{7}{16}\log|4x+5| + c.$
Alternativamente, bastava sostituire $h=3, k=2, m=4, n=5$ nella formula risolutiva vista nell'esempio 1 dell'esercizio 2.8. ■

Esercizio 2.10 *Calcolare* $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2+2}\,dx.$

Risoluzione. Eseguendo gli stessi passaggi del secondo esempio dell'esercizio 2.8, si ottiene $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{2}x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\frac{3}{2}x\right) + c.$
Alternativamente, bastava sostituire $h=0, k=1, m=3, n=2$ nella formula risolutiva vista nell'esempio 2 dell'esercizio 2.8. ■

Esercizio 2.11 *Dimostrare, nel caso $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la seguente uguaglianza*

$$\int \frac{hx+k}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{h}{2a}\log|ax^2+bx+c| + \frac{2ak-bh}{a\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) + c$$

Risoluzione. $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c} = h\dfrac{x+k/h}{ax^2+bx+c} = \dfrac{h}{2a}\cdot\dfrac{2ax+2ak/h}{ax^2+bx+c} = \dfrac{h}{2a}\cdot\dfrac{2ax+2ak/h+b-b}{ax^2+bx+c} = \dfrac{h}{2a}\cdot\left[\dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \dfrac{2ak/h-b}{ax^2+bx+c}\right]$.

Quindi, $\displaystyle\int \frac{hx+k}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{h}{2a}\cdot\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + \int \frac{h}{2a}\cdot\frac{2ak/h-b}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{h}{2a}\log|ax^2+bx+c| + \int \frac{h}{2a}\cdot\frac{2ak/h-b}{ax^2+bx+c}\,dx$.

Per integrare la seconda parte, si osservi che $\dfrac{h}{2a}\cdot\dfrac{2ak/h-b}{ax^2+bx+c} = \dfrac{2ak-bh}{2}\cdot\dfrac{1}{a^2x^2+abx+ac} = \dfrac{2ak-bh}{2}\cdot\dfrac{1}{(ax+\frac{b}{2})^2+ac-\frac{b^2}{4}} = \dfrac{2ak-bh}{2}\cdot\dfrac{1}{(ax+\frac{b}{2})^2+\frac{4ac-b^2}{4}} = \dfrac{2ak-bh}{2}\cdot\dfrac{1/(\frac{4ac-b^2}{4})}{\frac{4}{4ac-b^2}(ax+\frac{b}{2})^2+1} = \dfrac{2ak-bh}{2}\cdot\dfrac{4}{4ac-b^2}\cdot\dfrac{1}{(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}})^2+1} = \dfrac{2ak-bh}{2}\cdot\dfrac{4}{4ac-b^2}\cdot\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\cdot\dfrac{\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}}{(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}})^2+1} = \dfrac{2ak-bh}{a\sqrt{4ac-b^2}}\cdot\dfrac{\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}}{(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}})^2+1}$.

Pertanto, $\displaystyle\int \frac{h}{2a}\cdot\frac{2ak/h-b}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ak-bh}{a\sqrt{4ac-b^2}}\int \frac{\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}}{(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}})^2+1}\,dx = \frac{2ak-bh}{a\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)+c$. Sommando i due contributi si ottiene l'uguaglianza data. Si noti che il risultato del secondo integrale dell'esercizio 2.8 si ottiene immediatamente dalla formula precedente ponendo $a = m, b = 0, c = n$. ■

Esercizio 2.12 *Calcolare* $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+x+1}\,dx$.

Risoluzione. Eseguendo gli stessi passaggi dell'esercizio precedente, si ottiene $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+x+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4/3}{x^2+x+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1+4/3-1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1+1/3}{x^2+x+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{3}{2}\log|x^2+x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}\,dx = \frac{3}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c =.$

Alternativamente, bastava sostituire $h = 3, k = 2, a = 1, b = 1, c = 1$ nella formula risolutiva vista nell'esercizio 2.11. ■

3 Integrali per parti

Richiami utili al calcolo di integrali per parti.

- L'integrazione per parti utilizza l'uguaglianza

$$\int [f'(x) \cdot g(x)]\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int [f(x) \cdot g'(x)]\, dx$$

- Schema riassuntivo per la scelta di $f'(x)$ e $g(x)$ nel caso si abbia l'integrale del loro prodotto: vedi tabella 2. Si noti che $1 = x^0$ rientra nel caso x^n.

$f'(x)$		$g(x)$
$\sin x$	se moltiplicato per	x^n
$\cos x$	se moltiplicato per	x^n
e^x	se moltiplicato per	x^n
x^n	se moltiplicato per	$\log x$
x^n	se moltiplicato per	$\arcsin x$
x^n	se moltiplicato per	$\arccos x$
x^n	se moltiplicato per	$\arctan x$
x^n	se moltiplicato per	$\operatorname{arccot} x$

Tabella 2: Scelta di $f'(x)$ e $g(x)$ nell'integrazione per parti $\int [f'(x) \cdot g(x)]\, dx$

Esercizio 3.13 *Calcolare* $\int x \cos x\, dx$.

Risoluzione. Scegliendo, secondo la tabella 2, pagina 7, $f'(x) = \cos x$ e $g(x) = x$, si ha $f(x) = \int \cos x\, dx = \sin x$ e $g'(x) = 1$, quindi $\int x \cos x\, dx = x \cdot \sin x - \int \sin x\, dx = x \cdot \sin x + \cos x + c$. ∎

Esercizio 3.14 *Calcolare* $\int x \log x\, dx$.

Risoluzione. Scegliendo, secondo la tabella 2, pagina 7, $f'(x) = x$ e $g(x) = \log x$, si ha $f(x) = x^2/2$ e $g'(x) = 1/x$, quindi $\int x \log x\ dx = \frac{x^2}{2} \cdot \log x - \frac{1}{2} \int x\ dx = \frac{x^2}{2}\left(\log x - \frac{1}{2}\right) + c$. ∎

Esercizio 3.15 *Calcolare* $\int \log x\, dx$.

Risoluzione. Scegliendo, secondo la tabella 2, pagina 7, $f'(x) = 1$ e $g(x) = \log x$, si ha $f(x) = x$ e $g'(x) = 1/x$, quindi $\int \log x\, dx = x \cdot \log x - \int 1\, dx = x\,(\log x - 1) + c$. ∎

Esercizio 3.16 *Calcolare* $\int \arctan x \, dx$.

Risoluzione. Scegliendo, secondo la tabella 2, pagina 7, $f'(x) = 1$ e $g(x) = \arctan x$, si ha $f(x) = x$ e $g'(x) = 1/(1+x^2)$, quindi $\int \arctan x \, dx = x \cdot \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c$. ■

Esercizio 3.17 *Calcolare* $\int x^2 e^x \, dx$.

Risoluzione. Scegliendo, secondo la tabella 2, pagina 7, $f'(x) = e^x$ e $g(x) = x^2$, si ha $f(x) = e^x$ e $g'(x) = 2x$, quindi $\int x^2 e^x \, dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \, dx = x^2 \cdot e^x - 2\left(x \cdot e^x - \int e^x \, dx\right) + c = e^x(x^2 - 2x + 2) + c$. ■

Esercizio 3.18 *Calcolare* $\int (\log x)^2 \, dx$.

Risoluzione. Scegliendo, secondo la tabella 2, pagina 7, $f'(x) = 1$ e $g(x) = (\log x)^2$, si ha $f(x) = x$ e $g'(x) = \frac{2}{x}\log x$, quindi $\int (\log x)^2 \, dx = x \cdot (\log x)^2 - 2\int \log x \, dx = x\left[(\log x)^2 - 2\log x + 2\right] + c$. ■

Esercizio 3.19 *Calcolare, per parti,* $\int (\sin x)^2 \, dx$.

Risoluzione. Scegliendo $f'(x) = \sin x$ e $g(x) = \sin x$, si ha $f(x) = -\cos x$ e $g'(x) = \cos x$, quindi $\int (\sin x)^2 \, dx = -\sin x \cdot \cos x + \int (\cos x)^2 \, dx = -\sin x \cdot \cos x + \int [1 - (\sin x)^2] \, dx = -\sin x \cdot \cos x + \int 1 \, dx - \int \sin x)^2 \, dx$, ovvero $\int (\sin x)^2 \, dx = -\sin x \cdot \cos x + x - \int \sin x)^2 \, dx$, da cui $\int (\sin x)^2 \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + c$ (si confronti questo risultato con l'esercizio 2.4). ■

Esercizio 3.20 *Calcolare, per parti,* $\int \frac{x}{(\sin x)^2} \, dx$.

Risoluzione. Scegliendo $f'(x) = \frac{1}{(\sin x)^2}$ e $g(x) = x$, si ha $f(x) = -\cot x$ e $g'(x) = 1$, quindi $\int \frac{x}{(\sin x)^2} \, dx = -x \cdot \cot x + \log|\sin x| + c$. ■