Analisi Matematica per Bio-Informatici
Esercitazione 10 – a.a. 2007-2008

Dott. Simone Zuccher

07 Febbraio 2008

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Determinazione di eventuali asintoti di una funzione

Richiami utili per la determinazione degli asintoti.

- Asintoti orizzontali.
  1. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$, allora la retta $y = l_1$ si dice asintoto orizzontale destro per $f(x)$.
  2. Se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$, allora la retta $y = l_2$ si dice asintoto orizzontale sinistro per $f(x)$.
  3. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = l$, allora la retta $y = l$ si dice asintoto orizzontale per $f(x)$.
- Asintoti verticali.
  Se una funzione ammette limite (o semplicemente limite destro, oppure limite sinistro) infinito per $x \to x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, allora la retta $x = x_0$ si dice asintoto verticale per $f(x)$ (anche in questo caso si può distinguere tra asintoto da destra e da sinistra nel caso uno dei due limiti sia infinito e l'altro o non lo sia o non esista). In pratica, basta che sia verificata una delle seguenti condizioni $\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = +\infty$ oppure $-\infty$ oppure ∞.
- Asintoto obliquo.
  Se $f(x) \sim mx + q$ per $x \to +\infty$ (oppure per $x \to -\infty$), allora la retta $y = mx + q$ si dice asintoto obliquo per $f(x)$ (anche qui si può distinguere tra asintoto destro e sinistro nel caso siano diversi tra loro). Questa condizione si può riscrivere come $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$ (rispettivamente $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$).

Praticamente, m e q vengono determinati come segue, purchè entrambi i limiti esistano finiti:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$$

Esercizio 1.1 *Determinare eventuali asintoti di* $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ *e* $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$.

Risoluzione. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Asintoto orizzontale $y = 1$, asintoto verticale $x = -1$.
$f(x) = \sqrt{x^2+1}$. Asintoto obliquo $y = x$ per $x \to +\infty$, e altro asintoto obliquo $y = -x$ per $x \to -\infty$.
$f(x) = x + \sqrt[3]{x}$. Non ammette asintoti. Infatti, $f(x) \sim x$ per $x \to +\infty$, ma $[f(x) - x] \to +\infty$ per $x \to +\infty$. ■

2 Grafico qualitativo di una funzione

Schema generale per lo studio di una funzione.

1. Determinazione del dominio D di $f(x)$.

2. Eventuali simmetrie e/o periodicità in modo da studiare la funzione eventualmente su un intervallo più piccolo rispetto al dominio.
   Funzione pari: $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in D$
   Funzione dispari: $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in D$
   Funzione periodica: $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in D, T \in \mathbb{R}$.

3. Intersezioni con gli assi.

4. Segno di $f(x)$ (da evitare nei casi complicati).

5. Calcolo dei limiti agli estremi del dominio (agli estremi di tutti gli intervalli di cui il dominio è l'unione) e determniazione di eventuali asintoti.

6. Calcolo della derivata prima e studio del segno di $f'(x)$ per determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$ ed eventuali punti di massimo e minimo per $f(x)$.

7. Calcolo della derivata seconda e studio del segno di $f''(x)$ per determinare gli intervalli in cui $f(x)$ è concava o convessa ed eventuali punti di flesso per $f(x)$.

Esercizio 2.2 *Studiare la funzione* $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$ *e tracciarne un grafico approssimativo.*

Risoluzione.

1. Dominio: $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \in]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$.

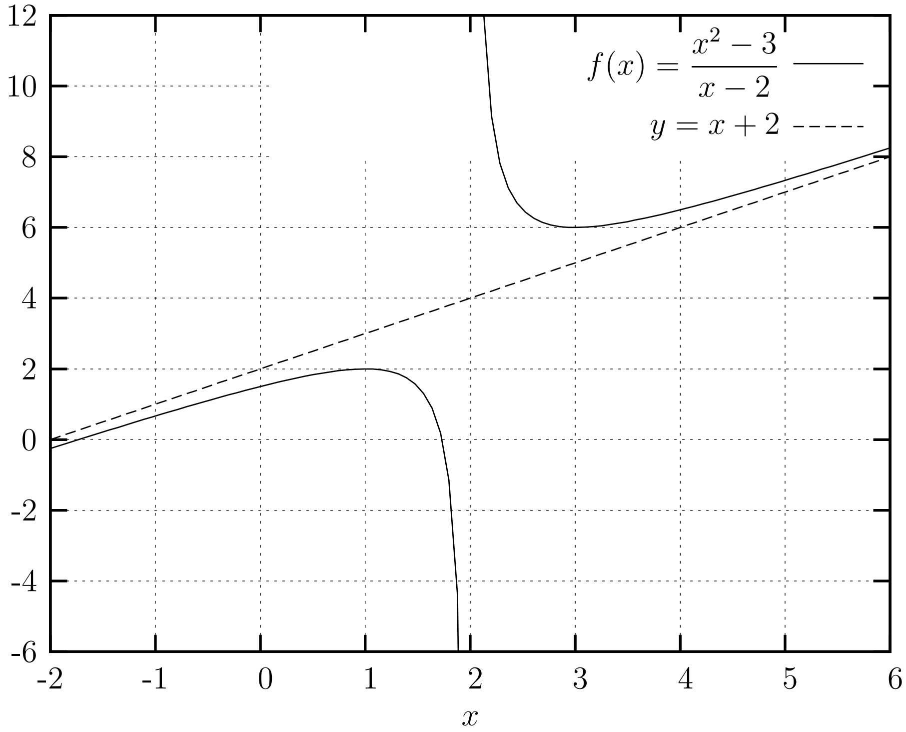

Figura 1: Grafico di $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$ e del suo asintoto obliquo $y = x + 2$ (esercizio 2.2)

2. Né simmetrie né periodicità.

3. Intersezioni con gli assi. $x = 0 \Rightarrow y = 3/2$. $y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

4. Segno: $f(x)$ non negativa per $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cup]2, +\infty[$.

5. Limiti, nell'ordine:
$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-3}{x-2} = -\infty$; $\lim_{x\to2^-} \dfrac{x^2-3}{x-2} = -\infty$ $\lim_{x\to2^+} \dfrac{x^2-3}{x-2} = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3}{x-2} = +\infty$.
Pertanto, $f(x)$ ammette un asintoto verticale di equazione $x = 2$ e non ammette certamente asintoto orizzontale. Potrebbe ammettere asintoto obliquo: verifichiamo. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-3}{x^2-2x} = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\dfrac{x^2-3}{x-2} - x\right] = 2$.
Quindi $f(x)$ ammette asintoto obliquo di equazione $y = x + 2$.

6. Derivata prima $f'(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$. Essa ha lo stesso dominio di $f(x)$ e quindi la funzione è derivabile in ogni punto del suo dominio. $f'(x)$ si annulla per $x = 1 \vee x = 3$, che sono quindi punti stazionari. $f'(x)$ è non negativa per $x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$, pertanto $f(x)$ è ivi crescente. $f'(x)$ è non positiva per $x \in [1, 2[\cup]2, 3]$, pertanto $f(x)$ è ivi decrescente. Dal segno di $f'(x)$ si deduce che $x = 1$ è un punto di minimo relativo $(1, 2)$, mentre $x = 3$ è un punto di massimo relativo $(3, 6)$.

7. Derivata seconda $f''(x) = \dfrac{2}{(x-2)^3}$. Siccome $f''(x) \neq 0$, non esistono punti di flesso. Dallo studio del segno di $f''(x)$ si deduce che $f''(x) > 0$ per $x \in]2, +\infty[$ pertanto $f(x)$ è ivi convessa, mentre è concava altrove.

In figura 1 è riportato il grafico di $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$ e del suo asintoto obliquo $y = x + 2$.
■

Esercizio 2.3 *Studiare la funzione* $f(x) = \sqrt{x^2 - \dfrac{8}{x}}$ *e tracciarne un grafico approssimativo.*

Risoluzione.

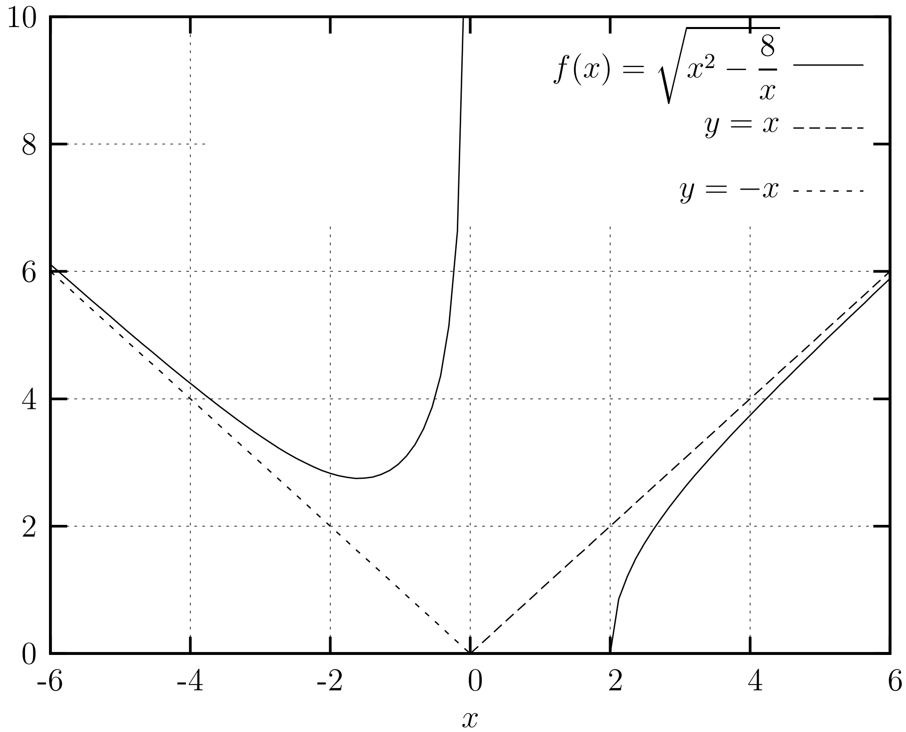

Figura 2: Grafico di $f(x) = \sqrt{x^2 - \dfrac{8}{x}}$ e dei sui asintoti obliqui $y = \pm x$ (esercizio 2.3)

1. Dominio: $x^2 - \dfrac{8}{x} \geq 0 \Rightarrow x \in]-\infty, 0[\cup [2, +\infty[$.

2. Né simmetrie né periodicità.

3. Intersezioni con gli assi. $x = 0$ è escluso dal dominio e quindi non si può calcolare. $y = 0 \Rightarrow x = 2$.

4. Segno: $f(x)$ è sempre non negativa.

5. Limiti, nell'ordine:
$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-\frac{8}{x}}=+\infty$; $\lim_{x\to0^-}\sqrt{x^2-\frac{8}{x}}=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-\frac{8}{x}}=+\infty$. Si noti che non si sono fatti né il limite per $x\to0^+$, non essendo ammesso dal dominio, né il limite per $x\to2^+$, essendo $f(2)=0$. Dall'analisi dei limiti si deduce che $f(x)$ ammette un asintoto verticale (sinistro) di equazione $x=0$ e non ammette certamente asintoto orizzontale. Potrebbe ammettere asintoto obliquo: verifichiamo. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\sqrt{x^2-\frac{8}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|}{x}\sqrt{1-\frac{8}{x^3}}=\pm1$, $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)\mp x]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-8/x}{\sqrt{x^2-8/x}\pm x}\right]=0$. Quindi $f(x)$ ammette asintoto obliquo destro di equazione $y=x$ e asintoto obliquo sinistro di equazione $y=-x$.

6. Derivata prima $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-\frac{8}{x}}}\left(x+\frac{4}{x^2}\right)=\frac{x^3+4}{x^2\sqrt{\frac{x^3-8}{x}}}=\frac{x^3+4}{\sqrt{x^3(x^3-8)}}$. Si noti che essa *non ha lo stesso dominio di* $f(x)$. Infatti, per $x=2$ si annulla il denominatore di $f'(x)$. Essendo $\lim_{x\to2^+}f'(x)=+\infty$, $f(x)$ non è derivabile in $x=2$. $f'(x)$ si annulla per $x=-\sqrt[3]{4}$, che è quindi un punto stazionario. $f'(x)$ è non negativa per $x\in[-\sqrt[3]{4},0[\cup]2,+\infty[$, pertanto $f(x)$ è ivi crescente. $f'(x)$ è non popsitiva per $x\in]-\infty,-\sqrt[3]{4}]$, pertanto $f(x)$ è ivi decrescente. Dal segno di $f'(x)$ si deduce che $x=-\sqrt[3]{4}$ è un punto di minimo relativo, mentre dal grafico si può dedurre che $x=2$ è il minimo assoluto.

7. Derivata seconda $f''(x)=-\frac{24(x^3-2)}{x^4\sqrt{(x^2-8/x)^3}}$. Siccome $f''(x)\neq0$ (non essendo $x=\sqrt[3]{2}$ nel dominio), non esistono punti di flesso. Dallo studio del segno di $f''(x)$ si deduce che $f''(x)>0$ per $x\in]-\infty,0[$ pertanto $f(x)$ è ivi convessa, mentre è concava per $x\in]2,+\infty[$.

In figura 2 è riportato il grafico di $f(x)=\sqrt{x^2-\frac{8}{x}}$ e dei sui asintoti obliqui $y=\pm x$. ■

Esercizio 2.4 *Studiare la funzione* $f(x)=\sqrt[3]{x^2(x-1)}$ *e tracciarne un grafico approssimativo.*

Risoluzione.

1. Dominio: $D=\mathbb{R}$, essendo l'indice della radice dispari.

2. Né simmetrie né periodicità.

3. Intersezioni con gli assi. $x=0\Rightarrow y=0$; $y=0\Rightarrow x=0\vee x=1$.

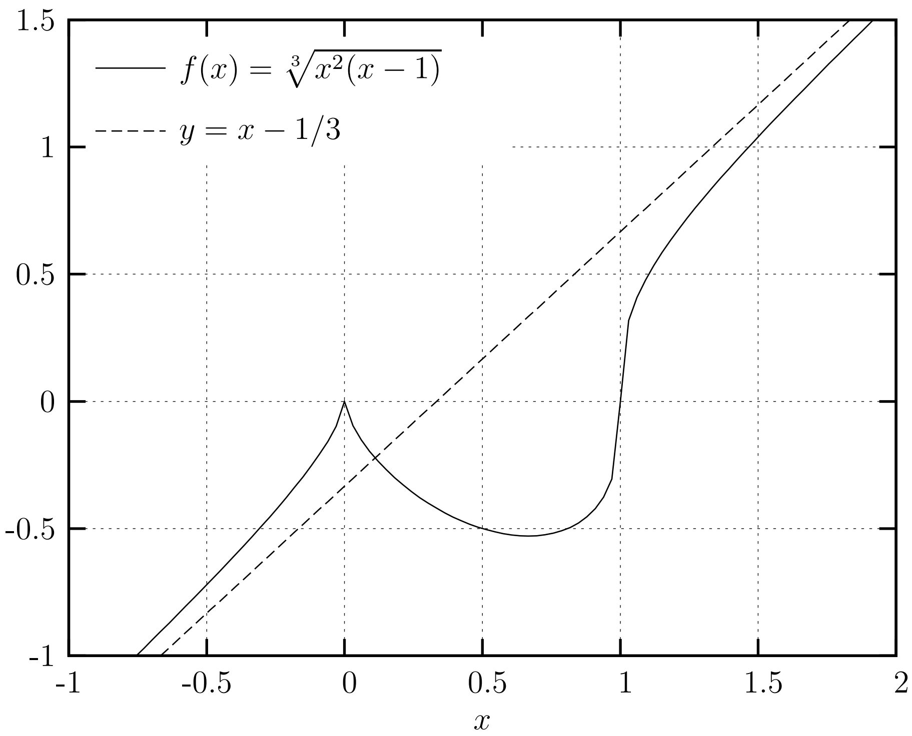

Figura 3: Grafico di $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$ e del suo asintoto obliquo $y = x - 1/3$ (esercizio 2.4)

4. Segno: $f(x)$ è non negativa quando $(x-1) \geq 0$, ovvero per $x \in [1, +\infty[$.

5. Limiti, nell'ordine:
$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2(x-1)} = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2(x-1)} = +\infty$. Dall'analisi dei limiti si deduce che $f(x)$ non ammette né asintoto verticale né orizzontale. Potrebbe ammettere asintoto obliquo: verifichiamo. $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} \sqrt[3]{x^2(x-1)} = 1$, $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x] = -1/3$. Quindi $f(x)$ ammette asintoto obliquo di equazione $y = x - 1/3$.

6. Derivata prima $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 2x}{3\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}} = \dfrac{3x-2}{3\sqrt[3]{x(x-1)^2}}$. Si noti che essa *non ha lo stesso dominio di* $f(x)$. Infatti, per $x = 0 \vee x = 1$ si annulla il denominatore di $f'(x)$ e pertanto $f(x)$ non è derivabile in tali punti. Essendo $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$, e $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty$, si deduce che $x = 0$ è un punto di cuspide per $f(x)$ mentre $x = 1$ è un punto di flesso a tangente verticale. $f'(x)$ si annulla per $x = 2/3$, che è quindi un punto stazionario. $f'(x)$ è non negativa per $x \in]-\infty, 0[\cup [2/3, 1[\cup]1, +\infty[$, pertanto $f(x)$ è ivi crescente. $f'(x)$ è non positiva per $x \in]0, 2/3]$, pertanto $f(x)$ è ivi decrescente. Dal segno di $f'(x)$ si deduce che $x = 2/3$ è un punto di minimo relativo. Inoltre, essendo $f'(x) > 0$ nell'intorno

di $x = 1$, si deduce che in $x = 1$ la funzione ha un flesso *ascendente* a tangente verticale. Non essendo $f(x)$ limitata inferiormente né superiormente, non esistono né minimi né massimi assoluti.

7. Derivata seconda $f''(x) = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4(x-1)^5}}$. Si noti che il dominio di $f''(x)$ è lo stesso di quello di $f'(x)$ e che $f''(x) \neq 0$, quindi non ci sono altri flessi oltre a quello già visto in $x = 1$ (punto di non derivabilità sia per la derivata prima che per la seconda). Dallo studio del segno di $f''(x)$ si deduce che $f''(x) > 0$ per $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$ pertanto $f(x)$ è ivi convessa, mentre è concava per $x \in]1, +\infty[$.

In figura 3 è riportato il grafico di $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$ e del suo asintoto obliquo $y = x - 1/3$. ■

Esercizio 2.5 *Studiare la funzione* $f(x) = \dfrac{\log x}{1 + \log x}$ *e tracciarne un grafico approssimativo.*

Risoluzione.

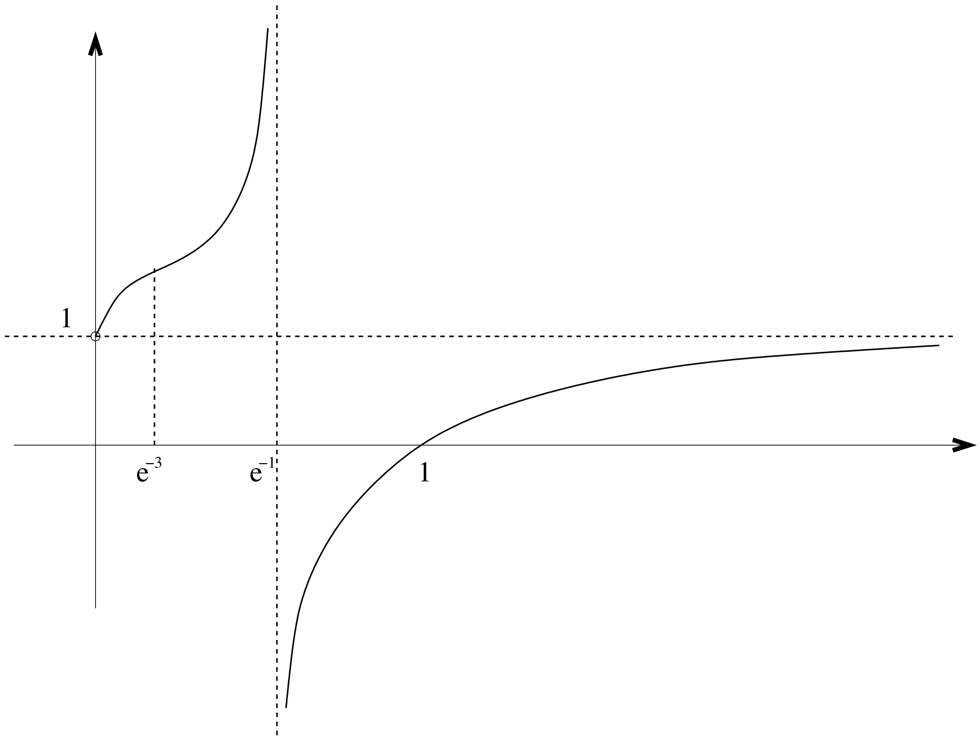

Figura 4: Grafico di $f(x) = \dfrac{\log x}{1 + \log x}$ e dei suoi asintoti orizzontale $y = 1$ e verticale $x = 1/e$ (esercizio 2.5)

1. Dominio: $x > 0 \wedge (1 + \log x) \neq 0 \Rightarrow x \in]0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, +\infty[$.

2. Né simmetrie né periodicità.

3. Intersezioni con gli assi. $x = 0$ è escluso dal dominio e quindi non si può calcolare. $y = 0 \Rightarrow x = 1$.

4. Segno: $f(x)$ è non negativa per $x \in]0, 1/e[\cup [1, +\infty[$.

5. Limiti, nell'ordine:
$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{1 + \log x} = 1^+$; $\lim_{x \to (1/e)^-} \frac{\log x}{1 + \log x} = +\infty$; $\lim_{x \to (1/e)^+} \frac{\log x}{1 + \log x} = -\infty$;
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{1 + \log x} = 1$. Dall'analisi dei limiti si deduce che $f(x)$ ammette la retta $y = 1$ come asintoto orizzontale (destro) e la retta $x = \frac{1}{e}$ come asintoto verticale. $f(x)$ non ammette asintoti obliqui.

6. Derivata prima $f'(x) = \frac{1}{x(1 + \log x)^2}$. Nonostante essa abbia lo stesso dominio di $f(x)$, $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$ e quindi per $x \to 0^+$ la funzione tende a 1^+ con tangente verticale (positiva). $f'(x)$ non si annulla mai, quindi non ci sono punti stazionari (eventuali massimi o minimi) ma è sempre positiva, quindi $f(x)$ è sempre crescente per $x \in]0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, +\infty[$.

7. Derivata seconda $f''(x) = -\frac{\log x + 3}{x^2(1 + \log x)^3}$. $f''(x) = 0$ per $x = 1/e^3$, che risulta pertanto punto di flesso. Dallo studio del segno di $f''(x)$ si deduce che $f''(x) > 0$ per $x \in]1/e^3, 1/e[$ pertanto $f(x)$ è ivi convessa, mentre è concava per $x \in]0, 1/e^3[\cup]1/e, +\infty[$.

In figura 4 è riportato il grafico di $f(x) = \frac{\log x}{1 + \log x}$ e dei suoi asintoti orizzontale $y = 1$ e verticale $x = 1/e$. ■

Esercizio 2.6 *Studiare la funzione $f(x) = \sin x - x \cos x$ e tracciarne un grafico approssimativo.*

Risoluzione. È una funzione dispari, definita su tutto $\mathbb{R}$, non periodica, quindi basta studiarla per $x \geq 0$. $x = 0 \Rightarrow y = 0$, ma la soluzione di $f(x) = 0$ implica $\sin x - x \cos x = 0$ ovvero, posto $x \neq \pi/2 + k\pi$ si può tentare di risolvere $\tan x = x$, che non è banale. Lasciando quindi perdere il segno e le intersezioni con $y = 0$, studiamo la derivata prima. $f'(x) = x \sin x$. Limitatamente a $x > 0$, si ha $f'(x) > 0$ quando $\sin x > 0$, ovvero per $x \in]2k\pi, (2k + 1)\pi[, k = 0, 1, 2, \ldots$. La derivata prima si annulla in $x = 0$, $x = 2k\pi, k = 1, 2, 3, \ldots$ e $x = (2k + 1)\pi, k = 0, 1, 2, \ldots$. I punti $x = 2k\pi, k = 1, 2, 3, \ldots$ $(f(2k\pi) = -2k\pi)$ sono punti di minimo relativo. I punti $x = (2k + 1)\pi, k = 0, 1, 2, \ldots$ $(f((2k+1)\pi) = (2k+1)\pi)$ sono punti di massimo relativo. La derivata seconda $f''(x) = \sin x + x \cos x$ si annulla in corrispondenza delle soluzioni dell'equazione $x + \tan x = 0$, una delle quali è $x = 0$, punto di flesso a tangente orizzontale. In figura 5 è riportato il grafico di $f(x) = \sin x - x \cos x$. ■

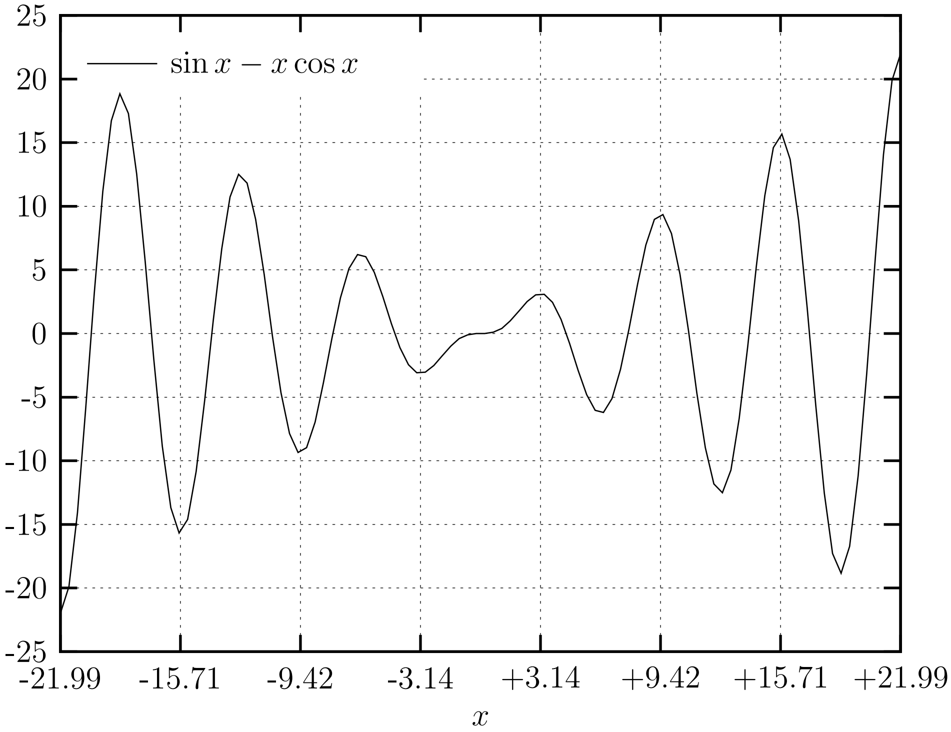

Figura 5: Grafico di $f(x) = \sin x - x \cos x$ (esercizio 2.6)

3 Esistenza delle radici di un'equazione

Esercizio 3.7 *Determinare il numero delle soluzioni reali dell'equazione* $x^9(x-4)^9 = \alpha$.

Risoluzione. Studiamo la funzione $f(x) = x^9(x-4)^9$. Si verifica che $f'(x)$ si annulla per $x = 2$, è positiva per $x > 2$ e negativa per $x < 2$. Quindi $f(x)$ è strettamente decrescente per $x \in]-\infty, 2]$, strettamente crescente per $x \in [2, -\infty[$ ed ha un minimo assoluto in $x = 2 \Rightarrow f(2) = -2^{18}$ (si veda la figura 6). In conclusione, quindi, l'equazione $x^9(x-4)^9 = \alpha$ ammette due soluzioni (distinte) se $\alpha > -2^{18}$, una soluzione se $\alpha = -2^{18}$, nessuna soluzione se $\alpha < -2^{18}$.

Alternativamente, si poteva considerare l'equazione $x(x-4) = \alpha^{1/9}$, che è di secondo grado e ammette soluzioni $x = 2 \pm \sqrt{4 + \alpha^{1/9}}$, purché sia $\alpha \geq -4^9 = -2^{18}$ (da cui le stesse conclusioni ottenute nel primo modo). ∎

Esercizio 3.8 *Determinare il numero delle soluzioni reali dell'equazione* $x^{10}(x-2)^{10} = \alpha$.

Risoluzione. Procedendo come nell'esercizio precedente, si ottiene: nessuna soluzione per $\alpha < 0$, due soluzioni per $\alpha = 0$, quattro soluzioni per $0 < \alpha < 1$, tre soluzioni per $\alpha = 1$ e due soluzioni per $\alpha > 1$. ∎

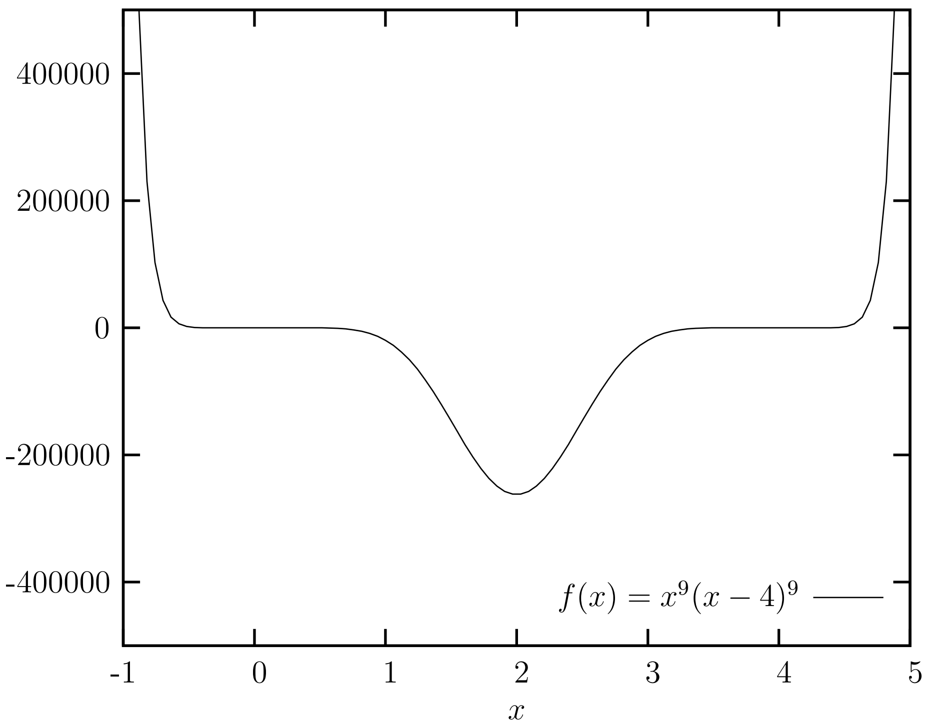

Figura 6: Grafico di $f(x) = x^9(x-4)^9$ (esercizio 3.7)

Esercizio 3.9 *Determinare il numero ed il segno delle radici reali dell'equazione* $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$.

Risoluzione. Si noti che i limiti per $x \to \pm\infty$ di $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ sono rispettivamente $\pm\infty$ e pertanto esiteranno $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Quindi, in base al teorema di esistenza degli zeri ($f(x)$ è continua su $[a, b]$, intervallo chiuso e limitato), $f(x)$ ammette almeno una radice compresa tra a e b. Essendo $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$. Ne segue che $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ ammette una sola radice. Per stabilirne il segno, basta osservare che $f(0) = -20 < 0$ e quindi $f(x)$ si annulla per $x > 0$. L'unica radice è pertanto positiva. ■

Esercizio 3.10 *Determinare il numero ed il segno delle radici reali dell'equazione* $x^4 + x^2 = ax + b$ *al variare di* $a, b \in \mathbb{R}, b \geq 0$.
Risoluzione. Si proceda pensando all'intersezione tra le funzioni $f(x) = x^4 + x^2$ e $g(x) = ax + b$. ■