Analisi Matematica per Bio-Informatici
Esercitazione 08 – a.a. 2007-2008

Dott. Simone Zuccher

24 Gennaio 2008

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Proprietà delle funzioni derivabili

Richiami sulle applicazioni delle derivate utili ai fini degli esercizi.

- Teorema di Fermat. Se x_0 è un punto di minimo o di massimo per $f(x)$ e f è definita su $]a, b[$ e derivabile in $x_0 \in]a, b[$, allora $f'(x_0) = 0$.

- Teorema di Rolle. Sia $f(x)$ continua su $[a, b]$, derivabile su $]a, b[$ e $f(a) = f(b)$. Allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $f'(\xi) = 0$.
  Geometricamente il teorema assicura che, se sono verificate le ipotesi, esiste almeno un punto $\xi \in]a, b[$ a tangente orizzontale.

- Teorema di Cauchy. Siano $f(x)$ e $g(x)$ continue su $[a, b]$ e derivabili su $]a, b[$. Allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $g'(\xi)[f(b) - f(a)] = f'(\xi)[g(b) - g(a)]$.
  Se, inoltre, $g'(x) \neq 0\ \forall x \in]a, b[$ (il che implica $g(a) \neq g(b)$), allora
  $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

- Teorema di Lagrange (o del valor medio). Sia $f(x)$ continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$. Allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.
  Geometricamente il teorema assicura che, se sono verificate le ipotesi, esiste almeno un punto $\xi \in]a, b[$ in cui la tangente è parallela alla retta passante per i punti estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

- Sia $f(x)$ continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$, allora

  1. $f'(x) = 0\ \forall x \in]a, b[\Rightarrow f(x)$ costante su $[a, b]$.
  2. $f'(x) \geq 0\ \forall x \in]a, b[\Rightarrow f(x)$ crescente su $[a, b]$ (strettamente se $f'(x) > 0$).

3. $f'(x) \leq 0 \; \forall x \in]a,b[\Rightarrow f(x)$ decrescente su $[a,b]$ (strettamente se $f'(x) < 0$).

- Ricerca di massimi/minini. La condizione necessaria $f'(x_0) = 0$ fornisce l'insieme di possibili punti di massimo e/o minimo. L'analisi della monotonia di $f(x)$ nell'intorno di x_0 o l'uso delle derivate successive calcolate in x_0 (si veda più avanti) permette di determinare eventuali massimi o minimi.

Esercizio 1.1 *Si determinino gli intervalli in cui le seguenti funzioni sono crescenti.*

$f(x) = x^2 - 3x + 2$	$[x \geq 3/2]$	$f(x) = \log(x^2 + 1)$	$[x \geq 0]$
$f(x) = \log(x^2 - 1)$	$[x > 1]$	$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{2x}$	$[mai]$
$f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^3 + \dfrac{11}{2}x^2 - 6x + 2$	$[-1 \leq x \leq 2 \vee x \geq 3]$	$\dfrac{2x+1}{x+3}$	$[\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}]$

Risoluzione. Si calcoli la derivata e se ne studi la positività. ■

Esercizio 1.2 *Si determinino eventuali massimi e minimi relativi della funzione* $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 3$ *in* $\mathbb{R}$.

Risoluzione. Essendo $f'(x) = 2(6x^2 - 5x + 1)$ si ha $f'(x) = 0$ per $x_1 = 1/3$ e $x_2 = 1/2$. Dallo studio della monotonia di $f(x)$ si deduce che $f(x)$ è crescente per $x < 1/3$ e $x > 1/2$ e decrescente altrove. Pertanto, $x_1 = 1/3$ è punto di massimo e $x_2 = 1/2$ è punto di minimo. ■

Esercizio 1.3 *Si determinino eventuali massimi e minimi relativi della funzione* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 1$ *in* $\mathbb{R}$.

Risoluzione. Essendo $f'(x) = 3(x-2)^2$ si ha $f'(x) = 0$ per $x = 2$. Tuttavia, dallo studio della monotonia di $f(x)$ si deduce che $f(x)$ è sempre crescente e quindi $x = 0$ non è né punto di massimo né punto di minimo ma punto di flesso a tangente orizzontale. ■

Esercizio 1.4 *Si dica se il teorema di Rolle è applicabile nei seguenti casi sugli intervalli riportati e, se lo è, si determini/no il/i punto/i ξ previsto/i da tale teorema.*

1. $f(x) = -x^2 + 6x$ *sull'intervallo* $[2,4]$
2. $f(x) = x^3 - 3x$ *sull'intervallo* $[0,\sqrt{3}]$
3. $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$ *sull'intervallo* $[0,3]$

Risoluzione.

1. $\xi = 3$
2. $\xi = 1$. Perché $\xi = -1$ non è accettabile?
3. $\xi = 3/2$

■

Esercizio 1.5 *Si dica se il teorema di Lagrange (o del valor medio) è applicabile nei seguenti casi sugli intervalli riportati e, se lo è, si determini/no il/i punto/i ξ previsto/i da tale teorema.*

1. $f(x) = -x^2 + 4$ *sull'intervallo* $[-2, 1]$
2. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ *sull'intervallo* $[0, 2]$
3. $f(x) = \dfrac{x+3}{2x-5}$ *sull'intervallo* $[0, 2]$

Risoluzione.

1. $\xi = -1/2$
2. $\xi = (1 + \sqrt{7})/3$. Perché $\xi = (1 - \sqrt{7})/3$ non è accettabile?
3. $\xi = (5 - \sqrt{5})/2$.

■

Esercizio 1.6 *Utilizzando i teoremi sulle derivate, si dimostri che*

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Risoluzione. Si calcoli la derivata di $f(x) = \arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ e si noti che $f'(x)$ è identicamente nulla $\forall x \in \mathbb{R}$. Pertanto $f(x) = \arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ è costante e il valore di tale costante può essere facilmente determinato calcolando $f(0) = 0$. Quindi, $\arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \Rightarrow \arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$. ■

Esercizio 1.7 *Utilizzando i teoremi sulle derivate, si dimostri che*

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ -\pi/2 & x < 0 \end{cases}$$

Risoluzione. Si ragioni come sopra. ■

Esercizio 1.8 *Utilizzando i teoremi sulle derivate, si dimostri che per $x > -1$ si ha*

$$x \geq \log(1 + x)$$

Risoluzione. Posto $h(x) = x - \log(1+x)$, definita per $x > -1$, si ha $h'(x) = x/(x+1)$. Pertanto, $h(x)$ ha un minimo assoluto in $x = 0$ essendo $h'(0) = 0$, $h'(x) > 0$ per $x > 0$ e $h'(x) < 0$ per $-1 < x < 0$. Essendo inoltre $h(0) = 0$, si conclude che $h(x) \geq 0$ per $x > -1$, ovvero $x \geq \log(1 + x)$ per $x > -1$. ■

Esercizio 1.9 *Utilizzando i teoremi sulle derivate, si dimostrino le seguenti disuguaglianze*

1. $e^x \geq x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\dfrac{x^2+1}{8} \geq \dfrac{x^2}{(x+1)^2}, \quad x > 0$
3. $x \log_a x \geq (x - 1) \log_a e, \quad x > 0, a > 1 \wedge a \neq 1$

Risoluzione. Si proceda come nell'esercizio precedente. ■

Esercizio 1.10 *Verificare che la funzione $f(x) = \sin(e^x)$ soddisfa l'equazione*

$$f''(x) - f'(x) + e^{2x} f(x) = 0.$$

Risoluzione. Essendo $f'(x) = e^x \cos(e^x)$ e $f''(x) = e^x \cos(e^x) - e^{2x} \sin(e^x)$ basta sostituire e verificare l'identità. ■

2 Calcolo di limiti tramite i teoremi sulle derivate (Lagrange e de L'Hôpital)

Richiami sull'utilizzo del teorema di de L'Hôpital.

- Teorema di de L'Hôpital. Siano $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ due funzioni tali che:
    1. $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ (oppure $\pm\infty$)
    2. f, g derivabili su $]a, b[$ e $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a, b[$
    3. esista finito il limite $\lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

allora anche il rapporto $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ammette limite e si ha

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Il teorema di de L'Hôpital è applicabile anche nel caso di limite destro e/o sinistro e nel caso $x\to\pm\infty$.
- Il teorema di de L'Hôpital è applicabile anche nel caso in cui il limite di $f(x)$ non esista e $\lim_{x\to a}|g(x)|=+\infty$.
- Si noti che se $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=0\cdot\infty$ (ossia $f(x)\to 0$ e $g(x)\to\infty$) allora si hanno due possibilità:
    1. applicare de L'Hôpital al rapporto $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{h(x)}$, essendo $h(x)=1/g(x)$, ottenendo una forma di indecisione del tipo $0/0$
    2. applicare de L'Hôpital al rapporto $\lim_{x\to a}\dfrac{h(x)}{g(x)}$, essendo $h(x)=1/f(x)$, ottenendo una forma di indecisione del tipo ∞/∞

Esercizio 2.11 *Utilizzando il teorema di Lagrange si calcoli il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x^2+x+1)-\log(x^2+1)}{x}$$

Risoluzione. Si ottiene una forma indeterminata del tipo $0/0$. Si osservi che se si assume $f(x)=\log x$, $a=x^2+1$ e $b=x^2+x+1$, il limite può essere riscritto come

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x^2+x+1)-\log(x^2+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\lim_{x\to 0}f'(\xi)$$

con $\xi\in(a,b)$. Pertanto, quando $x\to 0$ si ha $a\to 1$ e $b\to 1$ e quindi $\xi\to 1$. Essendo $f'(x)=1/x$ si ha $f'(\xi)=1$ da cui il valore del limite dato. ■

Esercizio 2.12 *Utilizzando il teorema di de L'Hôpital si dimostrino le seguenti uguaglianze.*

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x}=0,\quad \forall a>1,\forall b>0$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^b}=0,\quad \forall a>1,\forall b>0$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^b\log_a x=0,\quad \forall a>1,\forall b>0$

Si noti che vale anche $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^b} = 0, \quad \forall a > 1, \forall b > 0, \forall \alpha > 0$

Risoluzione.

1. Posto $x^b/a^x = (x/a^{\frac{x}{b}})^b = (x/\alpha^x)^b$ essendo $\alpha = a^{\frac{1}{b}} > 1$, basta mostrare che il limite di x/α^x è zero. Utilizzando de L'Hôpital si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha^x \log \alpha} = 0$.

2. Applicando subito de L'Hôpital si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{x}\log_a e}{bx^{b-1}} = \frac{\log_a e}{bx^b} = 0$.

3. Si noti la forma di indecisione del tipo $0 \cdot \infty$. Riscrivendo $x^b \log_a x = \log_a x / x^{-b}$ ed applicando de L'Hôpital sia arriva subito alla soluzione.

■

Esercizio 2.13 *Utilizzando il teorema di de L'Hôpital si calcolino i seguenti limiti.*

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x}$	$[0]$	$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$	$[\alpha]$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$	$[+\infty]$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^3}{x}$	$[0]$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(2x+1)}{\log x}$	$[1]$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\log x}$	$[1/2]$

Risoluzione. Si applichi il teorema una o più volte. ■

Esercizio 2.14 *Utilizzando il teorema di de L'Hôpital si calcolino i seguenti limiti.*

$$1.\ \lim_{x\to 0^+} x^{10} \cdot e^{\frac{1}{x}} \qquad 2.\ \lim_{x\to 0^+} x^x \qquad 3.\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x}$$

Risoluzione.

1. Forma di indecisione $0 \cdot \infty$. Si noti che riscrivendo come $e^{1/x}/x^{-10}(\infty/\infty)$ oppure $x^{10}/e^{-1/x}(0/0)$ non si risolve la forma di indecisione. Se, invece, si pone $t = 1/x$, il limite diventa $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^{10}} = +\infty$.

2. $x^x = e^{x \log x}$, passando al limite si ottiene 1.

3. $\sqrt[x]{x} = e^{\frac{1}{x}\log x}$, passando al limite si ottiene 1.

■

Esercizio 2.15 *Utilizzando il teorema di de L'Hôpital si calcoli*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log\sin x}{\cos x}$$

Risoluzione. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin^2 x} = 0$ ■

Esercizio 2.16 *Utilizzando il teorema di de L'Hôpital si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\sqrt{1+x^2}}{1-\cos x}$$

Risoluzione. $\lim_{x\to 0} \frac{\log\sqrt{1+x^2}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\log(1+x^2)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{(1+x^2)\sin x} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2x\sin x + (1+x^2)\cos x} = 1.$ ■

Esercizio 2.17 *Utilizzando il teorema di de L'Hôpital calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} \qquad e \qquad \lim_{x\to 0^+} x\log x.$$

Risoluzione. Si noti che sono limiti nella forma $0\cdot\infty$. Dagli esempi generali visti in precedenza si sa già il risultato. Altrimenti, basta osservare che $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$ ■

Esercizio 2.18 *Utilizzando il teorema di de L'Hôpital si calcoli*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{\log(x+1)}\right)$$

Risoluzione. Derivando una volta si ha $\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)\log(x+1)-x}{x\log(x+1)} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{\log(x+1)+x/(x+1)}$. Derivando ulteriormente oppure dividendo numeratore e denominatore per $\log(x+1)$ si ottiene $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x}{\log(x+1)}} = \frac{1}{2}$, ove si è tenuto conto del limite notevole noto. ■

Esercizio 2.19 *Si calcoli il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x}$$

Risoluzione. Raccogliendo x al numeratore e al denominatore si ottiene banalmente $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} = 1$.

Attenzione: se si fosse applicato de L'Hôpital (il limite si presenta nella forma ∞/∞), si sarebbe ottenuto $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1-\sin x} = \nexists$. L'uguaglianza tra i due limiti rappresenta un nonsenso in quanto il limite del rapporto delle derivate non esiste e quindi il teorema di de L'Hôpital non è applicabile e nulla si può dire sul limite originale. Al contrario, la scrittura adottata porterebbe a concludere che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x} = \nexists$, che è falso. Pertanto, l'utilizzo dell'uguale (=) tra un passaggio e l'altro nell'applicazione di de L'Hôpital è prassi ma formalmente è consentito *solo dopo* aver verificato l'effettiva esistenza del limite del rapporto delle derivate. ■