# Analisi Matematica per Bio-Informatici
# Esercitazione 07 – a.a. 2007-2008

Dott. Simone Zuccher

17 Gennaio 2008

**Nota**. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

## 1 Derivate

Richiami sulle derivate utili ai fini degli esercizi.

- Definizione. Chiamiamo derivata di $f$ in $x$, e la indichiamo con $f'(x)$, il limite, *se esiste finito*, del rapporto incrementale, ovvero

$$f'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

  Nel caso si considerino separatemente il limite da destra e da sinistra, si avranno la derivata destra $f'_+(x)$ e la derivata sinistra $f'_-(x)$.

- Punti di non derivabilità. Se il limite del rapporto incrementale è infinito o non esiste, allora la funzione $f$ non è derivabile in $x$. Si hanno tre casi.

  1. Punti di flesso a tangente verticale: $f'(x) = \pm\infty$ (derivata destra e sinistra coincidono ma sono entrambe $+\infty$ oppure $-\infty$)
  2. Punti di cuspide: $f'_+(x) = +\infty$ e $f'_-(x) = -\infty$ oppure $f'_+(x) = -\infty$ e $f'_-(x) = +\infty$ (derivata destra e sinistra sono opposte ed infinite)
  3. Punti angolosi: $f'_+(x) \neq f'_-(x)$ (derivata destra e sinistra sono diverse, una delle due può anche essere $+\infty$ oppure $-\infty$).

- Regole di derivazione

  1. $D[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$
  2. $D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, da cui: $D[kf(x)] = kf'(x), k \in \mathbb{R}$
  3. $D\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, da cui: $D\left[\dfrac{1}{f(x)}\right] = -\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}$

4. $D[f(g(h(x)))] = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$
5. $D[f^{-1}(y)] = \dfrac{1}{f'(x)}$, essendo $y = f(x)$ e $f'(x) \neq 0$
6. $D[f(x)^{g(x)}] = f(x)^{g(x)} \left[ g'(x) \log f(x) + g(x) \dfrac{f'(x)}{f(x)} \right]$

- Derivate fondamentali ed altre notevoli ricavate utilizzando quelle fondamentali e le regole di derivazione

derivate fondamentali

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $k, k \in \mathbb{R}$ | $0$ |
| $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ |
| $a^x$ | $a^x \log a$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\log_a x$ | $\dfrac{1}{x} \log_a e = \dfrac{1}{x \log a}$ |
| $\log x$ | $\dfrac{1}{x}$ |
| $\log \lvert x \rvert$ | $\dfrac{1}{x}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |

altre derivate notevoli

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $\tan x$ | $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\cot x$ | $-(1 + \cot^2 x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ |
| $\arcsin x$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos x$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arctan x$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ |
| $\operatorname{arccot} x$ | $-\dfrac{1}{1+x^2}$ |

**Nota**. Si osservi che, in generale, per le funzioni sopra riportate, il dominio di $f'(x)$ coincide con quello di $f(x)$ ($D = D'$). Questo non è vero per $f(x) = x^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$, essendo $f'(x) = +\infty$ in $x = 0$, e per $f(x) = \arcsin x$ oppure $f(x) = \arccos x$, essendo $f'(x)$ infinita in $x = \pm 1$.

**Esercizio 1.1** *Utilizzando la definizione di derivata, si calcolino $D[1/x]$ e $D[\sqrt{x}]$.*

***Risoluzione.*** Si scriva il rapporto incrementale $[f(x+h) - f(x)]/h$ e se ne calcoli il limite per $h \to 0$. ■

**Esercizio 1.2** *Utilizzando la definizione di derivata, dire se la funzione $f(x) = |x - a|, a \in \mathbb{R}$, è derivabile in $x = a$.*

***Risoluzione.*** Si scriva il rapporto incrementale $[f(a+h)-f(a)]/h = |h|/h$ e se ne calcolino i limiti da destra e da sinistra, ossia per $h \to 0^{\pm}$. Siccome tali limiti non coincidono, la funzione $f$ non è derivabile in $x=a$. $\blacksquare$

**Esercizio 1.3** *Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Cosa si può dire di $D[|f(x)|]$?*

***Risoluzione.*** Applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, si ottiene facilmente che nei punti $x$ tali che $f(x)\neq 0$ si ha $D[|f(x)|] = \operatorname{sgn} f(x)\cdot f'(x)$. Tuttavia, nei punti in cui $f(x)=0$ la derivata $D[|f(x)|]$ diventa

$$D[|f(x)|] = \lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)|}{h},$$

che esiste solo se il limite da destra e da sinistra coincidono, ovvero se derivata destra e sinistra sono uguali. Evidentemente, a causa del valore assoluto, questo accade solo se $f'(x)=0$ e quindi per $f'(x)\neq 0 \wedge f(x)=0$ $D[|f(x)|]$ non esiste. Il risultato si può riassumere come

$$D[|f(x)|] = \begin{cases} \operatorname{sgn} f(x)\cdot f'(x) & \text{nei punti in cui } f(x)\neq 0 \\ 0 & \text{nei punti in cui } f(x)=0 \wedge f'(x)=0 \\ \nexists & \text{nei punti in cui } f(x)=0 \wedge f'(x)\neq 0 \end{cases}$$

Tipicamente, i punti tali che $f(x)=0 \wedge f'(x)\neq 0$ sono punti angolosi per la funzione $|f(x)|$. $\blacksquare$

**Esercizio 1.4** *In base al noto teorema, una funzione derivabile è continua. Esibire un esempio di funzione continua ma non derivabile.*

***Risoluzione.*** Basta prendere una funzione continua in $x=c$ ma tale che $f'_-(c)\neq f'_+(c)$. Per esempio $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x\geq 1 \\ x^2+1 & \text{se } x<1 \end{cases}$ $\blacksquare$

**Esercizio 1.5** *Data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \textit{se } x\leq c \\ ax+b & \textit{se } x>c \end{cases}$$

*determinare $a$ e $b$ in modo che $f(x)$ sia derivabile.*

***Risoluzione.*** Si noti che $f(x)$ è certamente derivabile per $x>c$ e per $x<c$. Per quanto riguarda $x=c$, applicando la definizione di derivata e osservando che $f(c)=c^2$, si ottengono le seguenti espressioni per le derivate sinistra e destra:

$$f'_-(c) = \lim_{h\to 0}\frac{(c+h)^2-c^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2c+h = 2c$$

$$f'_+(c) = \lim_{h\to 0}\frac{a(c+h)+b-c^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{ah+(ac+b-c^2)}{h}$$

Si noti che $f'_-(c)$ è certamente finita, ma affinché lo sia anche $f'_+(c)$ è necessario che $ac + b - c^2 = 0$, che implica $f'_+(c) = a$. Per garantire la derivabilità in $x = c$, però, è necessario anche che $f'_+(c) = f'_-(c)$, ossia $2c = a$. Riassumendo, deve essere $c^2 = ac + b$ e $a = 2c$, da cui $a = 2c$ e $b = -c^2$.

**Osservazione** Molti studenti fanno l'**errore** di calcolare la derivata come

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq c \\ a & \text{se } x > c \end{cases}$$

ed imporre $f'_+(c) = f'_-(c) \Leftrightarrow 2c = a$. Questo modo è *sbagliato* perchè non tiene conto della definizione di derivata. Infatti, scelti per esempio $a = 1, c = 2, b = 3$ (che soddisfano la condizione $2c = a$), si ottiene la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ x + 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

che non è derivabile in quanto la definizione del limite del rapporto incrementale porta a $f'_+(2) = +\infty$. Per evitare questo, bisogna imporre la continutà della funzione in $x = c$. ■

**Esercizio 1.6** *Determinare eventuali punti di non derivabilità della funzione* $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

***Risoluzione.*** Essendo $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x = \pm 1$ sono punti del dominio di $f(x)$ che però non appartengono al dominio di $f'(x)$ ($D' \subset D$). Pertanto $f(x)$, pur essendo definita in $x = \pm 1$, non è ivi derivabile. ■

**Esercizio 1.7** *Data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \textit{se } x \neq 0 \\ 0 & \textit{se } x = 0 \end{cases},$$

*stabilire se è continua, derivabile, e se la derivata è continua.*

***Risoluzione.*** È immediato verificare che $f(x)$ è continua. Per $x \neq 0$ la funzione è derivabile e risulta $f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$. Per $x = 0$ è necessario applicare la definizione, quindi

$$\lim_{h \to 0} \frac{(0 + h) \sin \left( \dfrac{1}{0 + h} \right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \sin \dfrac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \sin \frac{1}{h} = \nexists.$$

Quindi,

$$f'(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \nexists & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Si noti che $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left( \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \right) = \nexists$, pertanto $f'(x)$ non è continua in $x = 0$. ■

**Esercizio 1.8** *Data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases},$$

*stabilire se è continua, derivabile, e se la derivata è continua.*

***Risoluzione.*** È immediato verificare che $f(x)$ è continua. Per $x \neq 0$ la funzione è derivabile e risulta $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. Per $x = 0$ è necessario applicare la definizione, quindi

$$\lim_{h \to 0} \frac{(0+h)^2 \sin \left( \dfrac{1}{0+h} \right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \dfrac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

Quindi,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Si noti che $\lim\limits_{x \to 0} \left( 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} \right) = \nexists$, pertanto $f'(x)$ non è continua in $x = 0$. ■

**Esercizio 1.9** *Discutere la continuità, derivabilità e continuità della derivata prima della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \dfrac{1}{x} & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases}$$

*essendo* $\alpha \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

***Risoluzione.*** Si proceda come nei due esercizi precedenti, discutendo inoltre la continuità della derivata. ■

**Esercizio 1.10** *Utilizzando i teoremi sulle derivate (regole di derivazione), calcolare le derivate delle seguenti funzioni.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x^3+4x+1$ | $[3x^2+4]$ | $\sqrt{x}$ | $[\frac{1}{2\sqrt{x}}]$ |
| $\frac{x^3+2x+1}{x^2+1}$ | $[\frac{x^4+x^2-2x+2}{(x^2+1)^2}]$ | $\frac{1}{\cos x}$ | $[\frac{\sin x}{\cos^2 x}]$ |
| $e^{x^2+x}$ | $[(2x+1)e^{x^2+x}]$ | $\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ | $[\frac{1}{x^2-1}]$ |
| $x^x$ | $[x^x(\log x+1)]$ | $\log(\log x)$ | $[\frac{1}{x\log x}]$ |
| $\sqrt{x}^{\sqrt{x}}$ | $[\frac{\sqrt{x}^{\sqrt{x}-1}(\log x+2)}{4}]$ | $\log(\log\log(x))$ | $[\frac{1}{x\log x\log(\log x)}]$ |
| $(x^3+4)^{\cos x}$ | $[(x^3+4)^{\cos x}\left(\frac{3x^2\cos x}{x^3+4}-\sin x\log(x^3+4)\right)]$ | $e^{e^x}$ | $[e^{e^x+x}]$ |
| $\sin x^{\cos x}$ | $[\sin x^{\cos x-1}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\log(\sin x)\right)]$ | $x\arcsin x$ | $[\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}]$ |
| $\arccos(1-2x)$ | $[\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}]$ | $\frac{1}{2}\arccos(1-x^2)$ | $[\frac{x}{\lvert x\rvert\sqrt{2-x^2}}]$ |
| $\arctan(\sin x)$ | $[\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}]$ | $\arctan\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ | $[\frac{\cos x(2-\cos^2 x)}{\cos^4 x-\cos^2 x+1}]$ |

**Esercizio 1.11** *Si determini l'equazione della tangente al grafico delle seguenti funzioni nei punti indicati a fianco.*

1. $f(x)=5x^2+3x; \quad x_0=1$
2. $f(x)=\arctan\frac{2-\cos x}{1+\cos x}; \quad x_0=\frac{\pi}{3}$
3. $f(x)=\sqrt[3]{(x+2)^2}; \quad x_0=-2$

***Risoluzione.***

1. $y=13x-5$
2. $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{(9-4\sqrt{3})\pi}{36}$
3. $x+2=0$

$\blacksquare$

**Esercizio 1.12** *Determinare l'espressione della derivata n-esima delle seguenti funzioni.*

1. $f(x)=e^x$

2. $f(x) = 3^x$

3. $f(x) = e^{-x}$

4. $f(x) = \log x$

5. $f(x) = \sin x$

6. $f(x) = \cos x$

7. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}, \quad ad \neq bc$

***Risoluzione.***

1. $e^x$
2. $3^x (\log 3)^n$
3. $(-1)^n e^{-x}$
4. $(-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{x^n}$
5. $\sin(x + n\pi/2)$
6. $\cos(x + n\pi/2)$
7. $(-1)^{n-1} c^{n-1} n! \dfrac{(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$

∎