Analisi Matematica per Bio-Informatici
Esercitazione 06 – a.a. 2007-2008

Dott. Simone Zuccher

06 Dicembre 2007

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Serie numeriche

Richiami sulle serie utili ai fini degli esercizi.

- Chiamiamo (con abuso di notazione) serie di termine generale x_n l'espressione $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{h=0}^{n} x_h$. La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ si dice:
  - convergente se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{h=0}^{n} x_h = l \in \mathbb{R}$
  - divergente positivamente se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{h=0}^{n} x_h = +\infty$
  - divergente negativamente se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{h=0}^{n} x_h = -\infty$
  - indeterminata se $\displaystyle\nexists \lim_{n\to+\infty} \sum_{h=0}^{n} x_h$
- Studiare il carattere di una serie significa determinare se essa è convergente, divergente o indeterminata, ossia uno dei quattro casi precedenti.
- Condizione *necessaria* affiché una serie converga è che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. Si noti che tale condizione, in generale, non è sufficiente a garantire la convergenza (per esempio la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$ non è convergente).

- Serie geometrica di ragione $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Si ha

  (a) $|x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, ossia la serie è convergente

  (b) $x \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = +\infty$, ossia la serie è positivamente divergente

  (c) $x \leq -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ è indeterminata

- La serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è positivamente divergente.

- Criteri di convergenza per serie a **termini positivi**. Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ si dice a termini positivi se $x_n \geq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

  (a) Criterio del **confronto**. Siano x_n e y_n due serie a termini positivi e tali che $x_n \leq y_n \ \ \forall n > \bar{n} \in \mathbb{N}$. Allora:

  1. $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ convergente $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ convergente
  2. $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ divergente $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ divergente

  Corollario. È immediato verificare che se $x_n \sim y_n$ per $n \to +\infty$ allora le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ hanno lo stesso carattere.

  (b) Criterio della **radice**. Sia x_n una serie a termini positivi. Allora:

  1. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = l < 1 \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ convergente
  2. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = l > 1 \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ divergente
  3. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1 \quad \Rightarrow$ non si può dire nulla

  (c) Criterio del **rapporto**. Sia x_n una serie a termini positivi. Allora:

1. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = l < 1 \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ convergente
2. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = l > 1 \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ divergente
3. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1 \quad \Rightarrow$ non si può dire nulla

(d) Criterio di **condensazione**. Sia x_n una serie a termini positivi con x_n decrescente. Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ è convergente se e solo se $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x_{2^n}$ è convergente.

- Dal criterio di condensazione (o, in modo più articolato, utilizzando il criterio del confronto per serie a termini positivi), si verifica immediatamente che
  1. $\lambda > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\lambda}$ convergente
  2. $\lambda \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\lambda}$ positivamente divergente

- Criteri di convergenza per serie a **termini di segno variabile**.

  (a) **Convergenza assoluta**. Ogni serie assolutamente convergente è convergente. (Nota: una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ si dice assolutamente convergente se la serie dei valori assoluti $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$ è convergente)

  (b) Criterio di **Leibniz**. Se $\{x_n\}$ è una successione reale a termini positivi decrescente e infinitesima ($\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$), allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x_n$ è convergente e si ha che $|s_n - S| \leq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, essendo s_n l'n-esimo termine della successione delle somme parziali $s_n = \sum_{h=0}^{n} (-1)^h x_h$.

Esercizio 1.1 *Utilizzando il criterio del confronto, si dimostri che per la serie* $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ *si ha*

$$\begin{array}{llll}
\alpha > 1 & \forall\beta & \Rightarrow & \textit{serie convergente} \\
\alpha = 1 & \beta > 1 & \Rightarrow & \textit{serie convergente} \\
\alpha = 1 & \beta \leq 1 & \Rightarrow & \textit{serie positivamente divergente} \\
\alpha < 1 & \forall\beta & \Rightarrow & \textit{serie positivamente divergente}
\end{array}$$

Risoluzione. Sia $\alpha < 1$. Scelto $\epsilon > 0$ in modo che $\alpha+\epsilon < 1$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$ si ha $(\log n)^\beta / n^\epsilon \to 0$ per $n \to +\infty$ e quindi si avrà definitivamente $(\log n)^\beta < n^\epsilon$, che implica

$$\frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} > \frac{1}{n^{\alpha+\epsilon}}.$$

Siccome $1/n^{\alpha+\epsilon}$ diverge, per il criterio del confronto la serie data diverge.
Sia $\alpha > 1$. Scelto $\epsilon > 0$ in modo che $\alpha - \epsilon > 1$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$ si ha $(\log n)^\beta n^\epsilon \to +\infty$ per $n \to +\infty$ e quindi si avrà definitivamente $(\log n)^\beta > n^{-\epsilon}$, che implica

$$\frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} < \frac{1}{n^{\alpha-\epsilon}}.$$

Siccome $1/n^{\alpha-\epsilon}$ converge, la serie data converge.
Sia $\alpha = 1$. Utilizzando il criterio di condensazione si ha $2^n x_{2^n} = 2^n \dfrac{1}{2^n (\log 2^n)^\beta} = \dfrac{1}{n^\beta (\log 2)^\beta}$, ovvero la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} 2^n x_{2^n} = \frac{1}{(\log 2)^\beta} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\beta}$ converge solo nel caso $\beta > 1$ mentre diverge per $\beta \leq 1$. ∎

Esercizio 1.2 *Calcolare la somma delle seguenti serie*

$$a) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \qquad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} \qquad c) \sum_{n=2}^{+\infty} e\pi^{-n} \qquad d) \sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^{-n} \qquad e) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-5)^n}{\pi^n}$$

$$f) \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-2} \qquad g) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi + e^n}{e^{n+2}} \qquad h) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi + e^n}{\pi^{n+2}}$$

Risoluzione. *a)* 2 *b)* 1 *c)* $\dfrac{e}{\pi(\pi-1)}$ *d)* $+\infty$ *e)* indeterminata *f)* $\dfrac{\pi}{\pi+e}$
g) $+\infty$ *h)* dopo aver osservato che $\dfrac{\pi + e^n}{\pi^{n+2}} = \dfrac{1}{\pi^{n+1}} + \dfrac{1}{\pi^2}\left(\dfrac{e}{\pi}\right)^n$ si proceda come nei casi precedenti. ∎

Esercizio 1.3 *Calcolare la somma delle seguenti serie (telescopiche)*

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} \qquad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \qquad c) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \qquad d) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)}$$

Risoluzione. *a)* 3/4, infatti $\dfrac{1}{n(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\right]$

b) 1/2. Nel caso la successione $\{x_n\}$ tenda a x per $n \to +\infty$, si ha che $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n - x_{n+1} = x_1 - x$. Essendo $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2(2n-1)} - \dfrac{1}{2(2n+1)} = x_n - x_{n+1}$, si arriva

facilmente al risultato.
c) 1/4, infatti $\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2} = x_n - x_{n+1}$
d) $-1/3$, infatti $\dfrac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)} = \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} = x_n - x_{n+1}$ ■

Esercizio 1.4 *Determinare il carattere delle seguenti serie (a termini positivi)*

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+2007} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2007n+2006} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2007^n}{n!} \qquad d)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{2007}}{2007^n}$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n} \qquad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^3}{n^3(3n)!} \qquad g)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \qquad h)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \qquad i)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\cos n}{n^2}$$

Risoluzione. *a)* $x_n \to 0$ però $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+2007} = \sum_{n=2008}^{+\infty}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{2007}\frac{1}{n}$, ma $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ diverge positivamente per cui la serie data diverge. Si può anche notare che $\dfrac{1}{n+2007} \sim \dfrac{1}{n}$, da cui la divergenza.
b) $x_n \to 0$ ma la serie diverge essendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2007n+2006} = \frac{1}{2007}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+2006/2007} > \frac{1}{2007}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2007}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}$ e quindi diverge. Alternativamente, tramite in confronto asintotico, bastava notare che $\dfrac{1}{2007n+2006} \sim \dfrac{1}{2007n}$.
c) $x_n \to 0$, converge per il criterio del rapporto.
d) $x_n \to 0$, converge per il criterio del rapporto (o della radice).
e) $x_n \to 0$, converge per il criterio del rapporto, essendo $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}/x_n = 1/e < 1$.
f) $x_n \to 0$, converge per il criterio del rapporto, essendo $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}/x_n = 1/27 < 1$.
g) $x_n \to +\infty$ quindi diverge positivamente. Si sarebbe arrivati allo stesso risultato applicando il criterio del rapporto, ottenendo $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}/x_n = 4 > 1$.
h) $x_n \to 0$ converge per il criterio della radice, essendo $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1/e < 1$.
i) $x_n \to 0$ e $0 < \dfrac{1-\cos n}{n^2} < \dfrac{2}{n^2}$ quindi converge per il criterio del confronto. ■

Esercizio 1.5 *Discutere la convergenza semplice o assoluta delle seguenti serie (a termini non necessariamente positivi)*

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\pi/2+n\pi)}{n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^2} \qquad d)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{3n!+n}{2n!+n^{2007}} \qquad f)\ \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n\log n} \qquad g)\ \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(\log n)^{2007}}$$

Risoluzione. *a)* $x_n \to 0$, convergenza semplice (non converge assolutamente).
b) $x_n \to 0$, convergenza semplice (non converge assolutamente).
c) $x_n \to 0$, convergenza assoluta (si noti che non è a segni alternati).
d) $x_n \to 0$, convergenza assoluta.
e) $x_n \not\to 0$.
f) $x_n \to 0$, convergenza semplice (ma bisogna dimostrare che $\frac{1}{n\log n}$ è decrescente, ovvero che $n\log n$ è crescente), però non converge assolutamente.
g) $x_n \to 0$, convergenza semplice (non converge assolutamente). ∎

Esercizio 1.6 *Determinare la convergenza delle seguenti serie*

$$a)\ \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin n+1/n+\pi}{n^2\log n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\cos n\sin(1/n^2) \qquad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sin(1/n)$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}\arctan n}{n^2+\cos n} \qquad e)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n \qquad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

Risoluzione. *a)* $x_n \to 0$, converge (essendo $1/n+\pi-1 < \sin n+1/n+\pi < 1/n+\pi+1$, da cui...).
b) $x_n \to 0$, converge assolutamente essendo $\sin(1/n^2) \sim 1/n^2$.
c) $x_n \to 0$, non converge assolutamente (essendo $\sin(1/n) \sim 1/n$), ma converge semplicemente.
d) $x_n \to 0$, converge essendo $(\sqrt{n}\arctan n)/(n^2+\cos n) \sim \pi/2/n^{3/2}$.
e) $x_n \to 0$, converge (criterio della radice).
f) $x_n \to 0$, non converge essendo $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \sim 1/(2\sqrt{n})$. ∎

Esercizio 1.7 *Si discuta al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *il comportamento della serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)^\alpha}{n^2+\sqrt[4]{n}}$.

Risoluzione. Converge se $\alpha < 1$, diverge positivamente se $\alpha \geq 1$ (si noti che $\dfrac{(n+1)^\alpha}{n^2+\sqrt[4]{n}} \sim \dfrac{1}{n^{2-\alpha}}$). ∎

Esercizio 1.8 *Si discuta al variare di* $x \in \mathbb{R}$ *il comportamento della serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Risoluzione. Applicando il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti si ottiene $\lim_{n\to+\infty}|x_{n+1}|/|x_n| = \lim_{n\to+\infty}|x|/(n+1) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e, pertanto, la serie è sempre assolutamente convergente. Si noti che $\exp(x) = e^x = \lim_{t\to+\infty}(1+x/t)^t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$. ∎

Esercizio 1.9 *Si discuta al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \pi^{\frac{-xn^3}{x^2+n^2}}$.

Risoluzione. Applicando il criterio della radice si ottiene $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \pi^{-x}$, quindi la serie è convergente per $x > 0$ e divergente per $x < 0$. Per $x = 0$ la serie evidentemente diverge. ■

Esercizio 1.10 *Si discuta al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie* $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2x-1)^n}{n \log n}$.

Risoluzione. Applicando il criterio della radice alla serie dei valori assoluti si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|2x-1|}{\sqrt[n]{n \log n}} = |2x-1|$. Quindi, se $|2x-1| < 1$, ossia $0 < x < 1$ la serie converge assolutamente. Se $2x - 1 > 1$, ossia $x > 1$ la serie diverge essendo la serie a termini positivi e $x_n \not\to 0$. Se $2x - 1 < -1$, ossia $x < 0$ la serie è a termini alternati ma essendo $x_n \not\to 0$ essa non converge. Se $|2x-1| = 1$, ossia $x = 0 \vee x = 1$, non si può concludere nulla e bisogna riesaminare la serie iniziale. Per $x = 0$ si ha convergenza (Leibniz), se $x = 1$ divergenza positiva (confronto asintotico).
Quindi, la serie data converge solo per $x \in [0; 1[$. ■

Esercizio 1.11 *Si discuta al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x+1)^n \frac{n+1}{n^2+1}.$$

Risoluzione. Applicando il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti si ottiene $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_{n+1}|/|x_n| = |x+1|$, quindi la serie è assolutamente convergente per $|x+1| < 1$. Se $x+1 > 1$, ossia $x > 0$ allora diverge ($x_n \not\to 0$), mentre se $x+1 < -1$, ossia $x < -2$ la serie non converge essendo a termini non positivi e $x_n \not\to 0$. Se $x = 0$ la serie (a termini positivi) diverge (confronto asintotico) mentre se $x = -2$ converge per Leibniz. ■

Esercizio 1.12 *Si discuta al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n n!}{n^n}$.

Risoluzione. Applicando il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti si ottiene $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_{n+1}|/|x_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} |x|/(1+1/n)^n = |x|/e$. Quindi si ha convergenza se $|x| < e$. Se $x > e$ la serie è a termini positivi e quindi il criterio del rapporto assicura la divergenza a $+\infty$. Se $x < -e$ la serie è di segno alternato ma siccome $x_n \not\to 0$ allora si ha non convergenza. Se $|x| = e$ allora $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_{n+1}|/|x_n| = |x|/(1+1/n)^n = 1^+$, essendo $(1+1/n)^n$ una successione crescente, e quindi il termine generale non è infinitesimo. Pertanto, se $x = e$ si ha divergenza, se $x = -e$ si ha non convergenza. ■

Esercizio 1.13 *Data la serie alternata* $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}$*, si verifichi che converge e determinare la sua somma con un errore minore di* $1/10$.

Risoluzione. Applicando Leibniz, essendo la successione $\{1/(2n-1)\}$ positiva e decrescente, la serie converge. Grazie alla stima dell'errore, si ha che $|S - s_n| \leq |a_{n+1}| = \dfrac{1}{2n+1}$, da cui $1/(2n+1) < 1/10 \Rightarrow n > 9/2$. Prendendo $n = 5$ la somma risulta $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 = 0.835\ldots$, che differisce da S di meno di $1/10$. ■