Analisi Matematica per Bio-Informatici
Esercitazione 05 – a.a. 2007-2008

Dott. Simone Zuccher

29 Novembre 2007

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Limiti di successioni

Richiami utili per il calcolo/verifica dei limiti di successioni.

- Per la verifica di limite di successione si utilizzano le stesse tecniche della verifica del limite di funzione con la semplificazione che si ha sempre $n \to +\infty$ e quindi si tratterà di trovare un $\bar{x}$ tale che $\forall n > \bar{x}$ si abbia...
- Per il calcolo di limite di successione si utilizzano le stesse tecniche di calcolo del limite di funzione, ai quali si rimanda per una trattazione completa dei vari casi. Negli esercizi riportati di seguito ci si riconduce all'utilizzo dei limiti notevoli per successioni e alle tecniche classiche.
- Principali limiti notevoli di successioni:

  1. $\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a > 1 \\ 1 & \text{se} \quad a = 1 \\ 0 & \text{se} \quad -1 < a < 1 \\ \nexists & \text{se} \quad a \le -1 \end{cases}$
  2. $\lim_{n\to+\infty} n^b = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad b > 0 \\ 1 & \text{se} \quad b = 0 \\ 0 & \text{se} \quad b < 0 \end{cases}$
  3. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1 \qquad a > 0$
  4. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = \lim_{n\to+\infty} n^{b/n} = 1 \qquad \forall b \in \mathbb{R}$
  5. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^b} = 0 \qquad b > 0$

6. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \qquad a > 1, b > 0$

7. $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad a > 1, \quad n! := n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots 2\cdot 1, \quad 0! := 1, \quad 1! := 1$

8. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

9. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

Esercizio 1.1 *Si verifichi, tramite la definizione di limite, che*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2}$$

Risoluzione. Scelto $\epsilon > 0$ si ottiene $\bar{x} = 5/(4\epsilon) - 5/2$ tale che $\forall n > \bar{x}$ si ha $\left|\frac{n}{2n+5} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$. ∎

Esercizio 1.2 *Si verifichi, tramite la definizione di limite, che*

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 - 1 = +\infty$$

Risoluzione. Scelto $M > 0$ si ottiene $\bar{x} = \sqrt{M+1}$ tale che $\forall n > \bar{x}$ si ha $n^2 - 1 > M$. ∎

Esercizio 1.3 *Si verifichi, tramite la definizione di limite, che*

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - n^2 = -\infty$$

Risoluzione. Scelto $M > 0$ si ottiene $\bar{x} = \sqrt{M+1}$ tale che $\forall n > \bar{x}$ si ha $1 - n^2 < -M$. ∎

Esercizio 1.4 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} e^n + 2^n - 3^n$$

Risoluzione. $e^n + 2^n - 3^n = 3^n\left(\frac{e^n}{3^n} + \frac{2^n}{3^n} - 1\right) = 3^n\left[\left(\frac{e}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right]$, da cui il limite $-\infty$. ∎

Esercizio 1.5 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\sqrt{\pi}}$$

Risoluzione. $+\infty$. ■

Esercizio 1.6 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-e}$$

Risoluzione. 0. ■

Esercizio 1.7 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\pi}}$$

Risoluzione. 1. ■

Esercizio 1.8 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\pi n^e}$$

Risoluzione. 1. ■

Esercizio 1.9 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}$$

Risoluzione. -1. ■

Esercizio 1.10 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$$

Risoluzione. 1. ■

Esercizio 1.11 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n+1)}{(\log n)^2}$$

Risoluzione. Ricordando che $n+1 = n(1+\frac{1}{n})$, si ha $\log(n+1) = \log n + \log(1+\frac{1}{n})$ da cui il limite 0. ■

Esercizio 1.12 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-\log n}{n! - n^n}$$

Risoluzione. Raccogliendo n al numeratore e n^n al denominatore, si ottiene il limite 0. ■

Esercizio 1.13 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3^{(n+1)/2}}$$

Risoluzione. Dopo aver osservato che $\dfrac{2^n}{3^{(n+1)/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ si ha $+\infty$. ■

Esercizio 1.14 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$$

Risoluzione. Dopo aver osservato che $\sqrt[n]{2^n+3^n} = \sqrt[n]{3^n}\,\sqrt[n]{1+(2/3)^n}$ si ha 3. ■

Esercizio 1.15 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{3758} - n!}{e^n - n^{123}}$$

Risoluzione. Raccogliendo $n!$ al numeratore e e^n al denominatore, si ottiene il limite $-\infty$. ■

Esercizio 1.16 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n\cdot 3^{n+1} + n^5 + 1)\cdot n!}{(3^n + 2^n)\cdot (n+1)!}$$

Risoluzione. 3. ■

Esercizio 1.17 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\log n)^3}{n}$$

Risoluzione. 0. ■

Esercizio 1.18 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n-2} - 2^{\sqrt{n^2-1}}$$

Risoluzione. Dopo aver raccolto $2^{n-2}(1 - 2^{\sqrt{n^2-1}-(n-2)})$ e notato che $[\sqrt{n^2-1} - (n-2)] \to 2$ per $n \to +\infty$, si ottiene $-\infty$. ■

Esercizio 1.19 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1}$$

Risoluzione. Dopo aver osservato che $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1} = \left[\left(\frac{n-1}{n-1} + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{\frac{n+1}{n-1}}$, si ottiene il limite e. ■

Esercizio 1.20 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^{n}$$

Risoluzione. e^2. ■

Esercizio 1.21 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-1} - 2n^{-2}}{3n^{-3} - 4n^{-4}}$$

Risoluzione. $+\infty$. ■

Esercizio 1.22 *Determinare, al variare di $\alpha > 0$ il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(e + \frac{1}{n^\alpha})^{n^2}}{e^{n^2}}$$

Risoluzione. $\alpha = 2 \Rightarrow e^{1/e}$, $\alpha > 2 \Rightarrow e^0 = 1$, $0 < \alpha < 2 \Rightarrow +\infty$. ■

Esercizio 1.23 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{\sin x}$$

Risoluzione. n. $\blacksquare$

Esercizio 1.24 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x}$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$.

Risoluzione.

n pari. $y = x - \pi \Rightarrow \lim_{x\to\pi} \dfrac{\sin(nx)}{\sin x} = \lim_{y\to 0} \dfrac{\sin(ny + n\pi)}{\sin(y+\pi)} = \lim_{y\to 0} \dfrac{\sin(ny)}{-\sin y} = -n.$

n dispari. $\lim_{y\to 0} \dfrac{\sin(ny + n\pi)}{\sin(y+\pi)} = n.$ $\blacksquare$

Esercizio 1.25 *Si calcoli, se esiste, il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} [1 + (-1)^n] \left(\frac{n+1}{n}\right)^n + [1 - (-1)^n] \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Risoluzione. Si noti che per n pari si ottiene $\lim_{n\to+\infty} 2\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = 2e$ mentre per n dispari si ha $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{2}{e}$.

Essendo i due limiti (su due restrizioni) diversi tra loro, la successione non ammette limite. $\blacksquare$

Esercizio 1.26 *Dimostrare che il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} \cos x$$

non esiste, esibendo due successioni $\{a_n\}, \{b_n\} \to +\infty$ *tali che* $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(b_n)$.

Risoluzione. Per esempio se si scelgono $a_n = \pi/2 + 2n\pi$ e $b_n = 2n\pi$ si ottiene $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = 0$ e $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = 1$. $\blacksquare$

2 Ordine di infinito e di infinitesimo

Richiami di teoria utili per gli esercizi:

- $f(x)$ si dice *infinitesimo* per $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.
- $f(x)$ si dice *infinito* per $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} f(x) = (\pm)\infty$.
- Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni *infinitesime* per $x \to x_0$. Allora il limite del loro rapporto può dare una delle seguenti possibilità:
  1. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ $\Rightarrow$ f è infinitesimo di ordine superiore rispetto a g
  2. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0, l \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f è infinitesimo dello stesso ordine rispetto a g
  3. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = (\pm)\infty$ $\Rightarrow$ f è infinitesimo di ordine inferiore rispetto a g
  4. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \nexists$ $\Rightarrow$ f e g non sono confrontabili
- Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni *infinite* per $x \to x_0$. Allora il limite del loro rapporto può dare una delle seguenti possibilità:
  1. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ $\Rightarrow$ f è infinito di ordine inferiore rispetto a g
  2. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0, l \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f è infinito dello stesso ordine rispetto a g
  3. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = (\pm)\infty$ $\Rightarrow$ f è infinito di ordine superiore rispetto a g
  4. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \nexists$ $\Rightarrow$ f e g non sono confrontabili
- Il simbolo $o(\cdot)$ (“o piccolo di ...”). Diremo (impropriamente) che $f(x) = o(g(x))$ se $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, ovvero $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0$.
- Il simbolo $O(\cdot)$ (“o grande di ...”). Diremo (impropriamente) che $f(x) = O(g(x))$ se il rapporto $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è definitivamente limitato per $x \to x_0$.

- Il simbolo $\sim$ ("asintotico a ..."). Diremo che $f(x) \sim g(x)$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, ovvero $f(x)$ è un infinitesimo o infinito dello stesso ordine rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0$.

Esercizio 2.27 *Si verifichi che*

- $\sin x \sim x$ *per* $x \to 0$
- $\tan x \sim x$ *per* $x \to 0$
- $\log(1+x) \sim x$ *per* $x \to 0$
- $e^x - 1 \sim x$ *per* $x \to 0$
- $e^{-x^2} - 1 \sim -x^2$ *per* $x \to 0$
- $\log(1 - \sin x) \sim -x$ *per* $x \to 0$
- $\sqrt{x^2 - 1} \sim x$ *per* $x \to +\infty$
- $\sqrt{x^2 - 1} + x \sim 2x$ *per* $x \to +\infty$
- $\log x + x \sim x$ *per* $x \to +\infty$
- $x^2 + x + \sqrt{x} \sim x^2$ *per* $x \to +\infty$
- $x^2 + x + \sqrt{x} \sim \sqrt{x}$ *per* $x \to 0$

Risoluzione. Si calcolino i limiti come da definizione. ■

Esercizio 2.28 *Utilizzando il simbolo di uguaglianza asintotica* $\sim$ *determinare*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3n - \log n + (-1)^n + \frac{1}{n}}{n^2 + 10 \sin n - \frac{1}{\log n}}$$

Risoluzione. 0. ■

Esercizio 2.29 *Utilizzando il simbolo di uguaglianza asintotica* $\sim$ *determinare*

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x) \sin^2 x}{x^3 \log(1+x)}$$

Risoluzione. Per $x \to 0$ si ha $(1 - \cos x) \sim x^2/2$, $\sin^2 x \sim x^2$ e $\log(1+x) \sim x$, da cui $\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x) \sin^2 x}{x^3 \log(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2/2 \cdot x^2}{x^3 \cdot x} = \frac{1}{2}$ ■

Esercizio 2.30 *Determinare l'ordine di infinitesimo $a > 0$ per $x \to 0$, rispetto all'infinitesimo campione x, di $f(x) = x^2 + 2\sin(3x^3) + 1 - e^{-x^2}$ e la funzione $g(x) = kx^a$ tale che $f(x) \sim g(x)$ (parte principale di $f(x)$).*

Risoluzione. $\sin(3x^3) \sim 3x^3$ e $1 - e^{-x^2} \sim x^2$, quindi $x^2 + 2\sin(3x^3) + 1 - e^{-x^2} \sim x^2 + 6x^3 + x^2 = 2x^2 + o(x^3) \sim 2x^2$. Pertanto la parte principale è $2x^2$ e l'ordine è 2. ■

3 Funzioni continue

Richiami di teoria utili per gli esercizi:

- Definizione di continuità nel punto x_0: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Continuità da sinistra nel punto x_0: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- Continuità da destra nel punto x_0: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- Una funzione si dice continua su un intervallo $[a; b]$ se è continua in ogni punto dell'intervallo $]a; b[$, continua da sinistra in $x = a$ e continua da destra in $x = b$.
- Discontinuità di prima specie: limite destro e sinistro finiti ma diversi tra loro. Salto $S = \left| \lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x) \right|$.
- Discontinuità di seconda specie: almeno uno dei due limiti (destro o sinistro) o è infinito o non esiste.
- Discontinuità di terza specie (o eliminabile): il limite destro e sinistro coincidono e sono finiti (il limite esiste finito), ma $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$.
  In tal caso la esiste un prolungamento per continuità $g(x)$ della $f(x)$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

Esercizio 3.31 *Si verifichi la continuità o meno della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x\cos(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Risoluzione. $f(x)$ è continua perchè $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$. ■

Esercizio 3.32 *Si verifichi la continuità o meno della funzione*

$$f(x) = \frac{1}{2 - e^{1/x}}$$

Risoluzione. $x = 0$: discontinuità di prima specie essendo $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1/2$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ (salto $S = 1/2$).
$x = 1/\log 2$: discontinuità di seconda specie essendo $\lim_{x \to (1/\log 2)^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to (1/\log 2)^+} f(x) = +\infty$. ■

Esercizio 3.33 *Determinare per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 1 \\ 3 - ax^2 & x > 1 \end{cases}$$

è continua in $x = 1$.

Risoluzione. $a = 1$. ■

Esercizio 3.34 *Determinare per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1 + ax)}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

è continua in $x = 0$.

Risoluzione. $a = 2$. ■

Esercizio 3.35 *Studiare la continuità della funzione*

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$$

.

Risoluzione. Discontinuità eliminabile in $x = 2$. Il prolungamento è

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} & x \neq 2 \\ \\ -1 & x = 2 \end{cases}$$

■

Esercizio 3.36 *Dire quante soluzioni ammette l'equazione $e^x + x^3 = 0$ e determinare un intervallo ragionevole in cui esse sono localizzate.*

Risoluzione. $e^x = -x^3$, una sola soluzione, $x_0 \in [-1; 0]$. ■