Analisi Matematica per Bio-Informatici
Esercitazione 03 – a.a. 2007-2008

Dott. Simone Zuccher

16 Novembre 2007

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Funzioni e loro grafico

Definizioni ed osservazioni utili per gli esercizi:

- Dominio. Determinare il *dominio* o *insieme di definizione* o *campo di esistenza* di una funzione significa trovare tutti i valori della variabile indipendente x per i quali l'espressione analitica di $f(x)$ ha significato. Questo equivale ad un sistema in cui sono riportate tutte le condizioni che devono verificarsi simultaneamente.
  Le funzioni per le quali il dominio non è tutto $\mathbb{R}$ sono:
  1. $\sqrt[2n]{\varphi(x)} \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$
  2. $[\varphi(x)]^\alpha, \alpha \notin \mathbb{N} \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$
  3. $\dfrac{1}{\varphi(x)} \Rightarrow \varphi(x) \neq 0$
  4. $\log_a \varphi(x), a > 0, a \neq 1 \Rightarrow \varphi(x) > 0$
  5. $\tan \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
  6. $\cot \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
  7. $\arcsin \varphi(x) \Rightarrow -1 \leq \varphi(x) \leq 1$
  8. $\arccos \varphi(x) \Rightarrow -1 \leq \varphi(x) \leq 1$

  Funzioni per le quali il dominio è tutto $\mathbb{R}$ sono i polinomi, le potenze con esponente naturale ($[\varphi(x)]^n, n \in \mathbb{N}$), le esponenziali ($a^{\varphi(x)}$), le radici con indice dispari ($\sqrt[2n+1]{\varphi(x)}$), seno e coseno ($\sin \varphi(x)$, $\cos \varphi(x)$) e arcotangente ($\arctan \varphi(x)$).

- Grafico. Sia $f : D \to C$ una funzione reale di variabile reale con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $C \subseteq \mathbb{R}$. Chiamiamo *grafico* di f l'insieme delle coppie ordinate $(x, f(x)) \in D \times C$.

- Un sottoinsieme del piano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è il grafico di una funzione se ogni retta verticale lo interseca al massimo in un punto (vedi definizione di funzione).
- Simmetrie e/o periodicità. Eventuali simmetrie e/o periodicità sono utili in modo da studiare la funzione su un intervallo più piccolo rispetto al dominio.
  1. Funzione *pari*: $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in D$, ovvero il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse delle y.
  2. Funzione *dispari*: $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in D$, ovvero il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine degli assi.
  3. Funzione *periodica*: $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in D, T \in \mathbb{R}$, ossia il grafico di f si ripete uguale dopo un intervallo delle x pari a T.
- Crescenza.decrescenza.
  1. Un funzione di dice *crescente* su un intervallo $[a,b] \in D$ se $\forall x_1, x_2 \in [a,b], x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
  2. Un funzione di dice *decrescente* su un intervallo $[a,b] \in D$ se $\forall x_1, x_2 \in [a,b], x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- Concavità.
  1. Si dice che un funzione f volge la *concavità verso l'alto* su un intervallo $[a,b] \in D$ se il segmento congiungente il grafico di due punti qualsiasi $P_1(x_1, f(x_1))$ e $P_2(x_2, f(x_2))$, con $x_1, x_2 \in [a,b]$, sta tutto al di sopra del corrispondente arco di grafico.
  2. Si dice che un funzione f volge la *concavità verso il basso* su un intervallo $[a,b] \in D$ se il segmento congiungente il grafico di due punti qualsiasi $P_1(x_1, f(x_1))$ e $P_2(x_2, f(x_2))$, con $x_1, x_2 \in [a,b]$, sta tutto al di sotto del corrispondente arco di grafico.
- Massimi/minimi.
  1. Si dice *massimo* della funzione f il numero M tale che $M = f(x_M) \geq f(x); \forall x \in D$. Il punto $x = x_M$ si dice *punto di massimo.* Se la condizione $M = f(x_M) \geq f(x)$ è verificata solo localmente, ossia per $x \in [x_M - \delta, x_M + \delta]$ (essndo $\delta > 0$) allora $x = x_M$ è un punto di *massimo relativo.*
  2. Si dice *minimo* della funzione f il numero m tale che $m = f(x_m) \leq f(x); \forall x \in D$. Il punto $x = x_m$ si dice *punto di minimo.* Se la condizione $m = f(x_m) \leq f(x)$ è verificata solo localmente, ossia per $x \in [x_m - \delta, x_m + \delta]$ (essndo $\delta > 0$) allora $x = x_m$ è un punto di *minimo relativo.*
- Operazioni algebriche tra funzioni (somma, differenza, prodotto e rapporto). Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni definite rispettivamente su D_f e D_g, allora la loro somma $f(x) + g(x)$, differenza $f(x) - g(x)$ e prodotto $f(x)g(x)$ sono definite su $D = D_f \cap D_g$; il loro rapporto $f(x)/g(x)$, invece, è definito su $D \setminus A$ dove $D = D_f \cap D_g$ e $A = \{x \in D : g(x) = 0\}$.

- Funzioni definite a tratti. Si dice che f è *definita a tratti* se il suo dominio è suddiviso nell'unione di sottoinsiemi in ciascuno dei quali il valore di $f(x)$ è assegnato mediante una diversa espressione analitica.
  Per esempio, sono funzioni definite a tratti le seguenti:

$$f(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se} \quad x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{se} \quad x < -1 \end{cases}$$

$$f(x) = [x] \quad \text{(funzione parte intera di } x\text{)}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x+1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

- Grafico di una funzione noti $a \in \mathbb{R}$ e il grafico della funzione $f(x)$:

  1. $y = -f(x)$. Basta "ribaltare" il grafico di f rispetto all'asse delle x.
  2. $y = f(x) + a$. Basta traslare il grafico di f verso l'alto di $|a|$ se $a > 0$ o verso il basso di $|a|$ se $a < 0$.
  3. $y = af(x)$. Basta "dilatare" verticalmente il grafico di f se $|a| > 1$ o "contrarlo" (sempre verticalmente) se $|a| < 1$. Durante tale operazione è necessario fare attenzione al segno di a: se $a > 0$ la funzione va solo "dilatata" o "contratta", altrimenti va cambiato anche il segno ("ribaltamento" rispetto all'asse x).
  4. $y = f(-x)$. Basta "ribaltare" il grafico di f rispetto all'asse delle y.
  5. $y = f(x+a)$. Basta traslare il grafico di f orizzontalmente di $|a|$ verso sinistra se $a > 0$, verso destra se $a < 0$.
  6. $y = f(ax)$. Basta "contrarre" orizzontalmente il grafico di f se $|a| > 1$ o "dilatarlo" (sempre orizzontalmente) se $|a| < 1$. Durante tale operazione è necessario fare attenzione al segno di a: se $a > 0$ la funzione va solo "contratta" o "dilatata", altrimenti va anche "ribaltata" rispetto all'asse y.
  7. $y = f^{-1}(x)$ (funzione inversa). Se $f(x)$ è biunivoca (iniettiva e suriettiva) basta tracciare il simmetrico del grafico di f rispetto alla retta $y = x$ (bisettrice del primo e quarto quadrante). Se f non è biunivoca, bisogna restringere f ad un dominio sul quale sia biunivoca e poi procedere come sopra.
  8. $y = |f(x)|$. Dalla definizione di valore assoluto segue che le parti positive del grafico di f rimangono tali mentre le parti negative vanno "ribaltate" rispetto all'asse x, ovvero rese positive.
  9. $y = f(|x|)$. Questa funzione è evidentemente pari, per cui basta "ribaltare" rispetto all'asse y il grafico di f corrispondente a $x \geq 0$.

Esercizio 1.1 *Determinare il dominio di* $f(x) = \sqrt{x(1-x^2)}$.

Risoluzione. Deve essere $x(1-x^2) \geq 0 \Rightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [0, 1]$. ■

Esercizio 1.2 *Determinare il dominio di* $f(x) = \sqrt{\log x}$.

Risoluzione. Deve essere $\begin{cases} \log x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [1, +\infty[$. ■

Esercizio 1.3 *Determinare il dominio di* $f(x) = \log\left[(\log x - 1)^{\pi}\right]$.

Risoluzione. Deve essere $\begin{cases} \log x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in]e, +\infty[$. ■

Esercizio 1.4 *Determinare il dominio di* $f(x) = \sqrt{\dfrac{\log^2 x - 4}{\log x + 1}}$.

Risoluzione. Deve essere $\begin{cases} \dfrac{\log^2 x - 4}{\log x + 1} \geq 0 \\ \log x + 1 \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}[\cup [e^2, +\infty[$. ■

Esercizio 1.5 *Determinare il dominio di* $f(x) = \arcsin[\log(x-1) - \log x)]$.

Risoluzione. Deve essere $\begin{cases} -1 \leq \log(x-1) - \log x \leq 1 \\ x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [\frac{e}{e-1}, +\infty[$. ■

Esercizio 1.6 *Dopo aver determinato il dominio di ciascuna delle seguenti funzioni (elementari), tracciare il grafico di* $f(x)$ *e di* $f^{-1}(x)$ *restringendo, se necessario nel caso della funzione inversa, il dominio.*

1. $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$; *si discuta l'andamento all'aumentare di* n.
2. $f(x) = x^m,\ m \in \mathbb{Z}, m < 0$.
3. $f(x) = x^{\frac{m}{n}},\ n, m \in \mathbb{Z}$.
4. $f(x) = x^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *ovvero per* α *irrazionale.*
5. $f(x) = a^x,\ 0 < a < 1$.
6. $f(x) = a^x,\ a > 1$.
7. $f(x) = \log_a x,\ 0 < a < 1$.
8. $f(x) = \log_a x,\ a > 1$.
9. $f(x) = \sin x$.
10. $f(x) = \cos x$.

11. $f(x) = \tan x$.

12. $f(x) = \arcsin x$.

13. $f(x) = \arccos x$.

14. $f(x) = \arctan x$.

15. $f(x) = H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$ *(gradino di Heaviside)*

16. $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$ *(segno di x)*

17. $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x < 0 \\ x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$ *(valore assoluto di x)*

18. $f(x) = [x]$ *(parte intera di x).*

19. $f(x) = (x) = x - [x]$ *(mantissa di x).*

Risoluzione.

1. $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$: $D = \mathbb{R}$. Si noti che al crescere di n, nonostante tutti i grafici passino per il punto $(1, 1)$ e per il punto $(-1, 1)$ nel caso di n pari oppure per il punto $(-1, -1)$ se n è dispari, i grafici risultano sempre più "schiacciati" vicino all'origine e sempre più "esplosivi" per $x > 1$. La funzione inversa esiste solo per n dispari. Per n pari la funzione inversa esiste solo se f è ristretta, per esempio, agli $x > 0$.

2. $f(x) = x^m,\ m \in \mathbb{Z}, m < 0$. $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. La funzione inversa esiste solo per m dispari. Per m pari la funzione inversa esiste solo se f è ristretta, per esempio, agli $x > 0$.

3. $f(x) = x^{\frac{m}{n}},\ n, m \in \mathbb{Z}$.
   Se $\frac{m}{n} > 0$ e n dispari, allora $D = \mathbb{R}$.
   Se $\frac{m}{n} > 0$ e n pari, allora $D = [0, +\infty)$.
   Se $\frac{m}{n} < 0$ e n dispari, allora $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
   Se $\frac{m}{n} < 0$ e n pari, allora $D = (0, +\infty)$.
   Per l'inversa, nei vari casi, si ragioni come sopra.

4. $f(x) = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, α irrazionale. $D = [0, +\infty)$. L'inversa esiste sempre.

5. $f(x) = a^x,\ 0 < a < 1$. $D = \mathbb{R}$, l'inversa ha come dominio $D = (0, +\infty)$ ed è $\log_a x$.

6. $f(x) = a^x,\ a > 1$. $D = \mathbb{R}$, l'inversa ha come dominio $D = (0, +\infty)$ ed è $\log_a x$.

7. $f(x) = \log_a x,\ 0 < a < 1$. $D = (0, +\infty)$, l'inversa ha come dominio $\mathbb{R}$ ed è a^x.

8. $f(x) = \log_a x,\ a > 1$. $D = (0, +\infty)$, l'inversa ha come dominio $\mathbb{R}$ ed è a^x.

9. $\sin x$. $D = \mathbb{R}$, l'inversa ha come dominio $[-1, 1]$ ed è $\arcsin x$.

10. $\cos x$. $D = \mathbb{R}$, l'inversa ha come dominio $[-1, 1]$ ed è $\arccos x$.

11. $\tan x$. $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$, l'inversa ha come dominio $\mathbb{R}$ ed è $\arctan x$.

12. $\arcsin x$. $D = [-1, 1]$, l'inversa ha come dominio $\mathbb{R}$ ed è $\sin x$.

13. $\arccos x$. $D = [-1, 1]$, l'inversa ha come dominio $\mathbb{R}$ ed è $\cos x$.

14. $\arctan x$. $D = \mathbb{R}$, l'inversa ha come dominio $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$ ed è $\tan x$.

15. $f(x) = H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$ (gradino di Heaviside) $D = \mathbb{R}$, l'inversa non esiste.

16. $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$ (segno di x) $D = \mathbb{R}$, l'inversa non esiste.

17. $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x < 0 \\ x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$ (valore assoluto di x) $D = \mathbb{R}$, l'inversa va ritretta a $x > 0$ oppure a $x < 0$.

18. $f(x) = [x]$ (parte intera di x). $D = \mathbb{R}$, l'inversa non esiste.

19. $f(x) = (x) = x - [x]$ (mantissa di x). $D = \mathbb{R}$, l'inversa è la funzione stessa per $x \in [0, 1)$.

■

Esercizio 1.7 *Dopo averne determinato il dominio, tracciare il grafico delle seguenti funzioni:*

$$1. f(x) = |x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{se} \quad x \geq -1 \\ -(x + 1) & \text{se} \quad x < -1 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x + 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{se } x \geq 0 \\ \log x + 1 & \text{altrove} \end{cases}$$

Risoluzione. Si ragioni utilizzando il grafico delle funzioni elementari viste in precedenza. Per la 3 si osservi che il dominio è $x > 0$. ■

Esercizio 1.8 *Data la funzione $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ (funzione omografica), disegnare il grafico di $y = f(x)$, $y = f(x - 2)$, $y = f(|x|)$ e $y = |f(|x|)|$.*

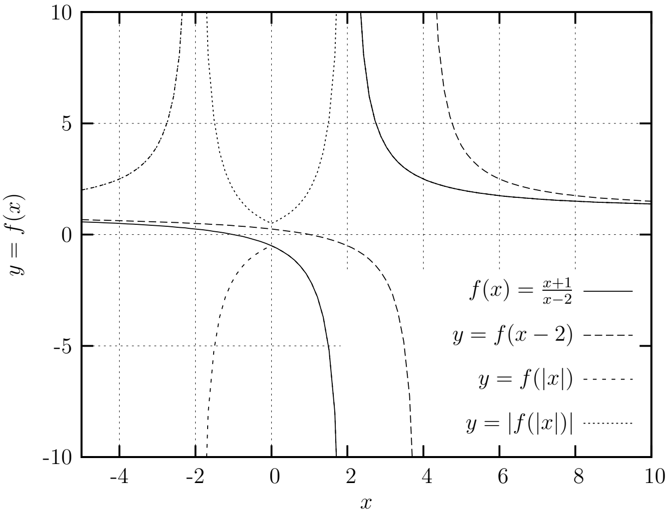

Figura 1: Grafici di $y = f(x)$, $y = f(x-2)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(|x|)|$ con $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

Risoluzione. Si veda la figura 1. Si noti che la funzione omografica è un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti con centro in $(2,1)$. Pertanto, gli asintoti sono $x = 2$ e $y = 1$. Dal grafico di $f(x)$ è immediato ricavare gli altri grafici, come riportato in figura 1. ∎

Esercizio 1.9 *Dal grafico di $f(x)$ riportata in figura 2, dedurre il grafico di $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = |f(x)|$, $y = f(x) + 1$, $y = 2f(x)$, $y = f(x-1)$, $y = f(2x)$.*

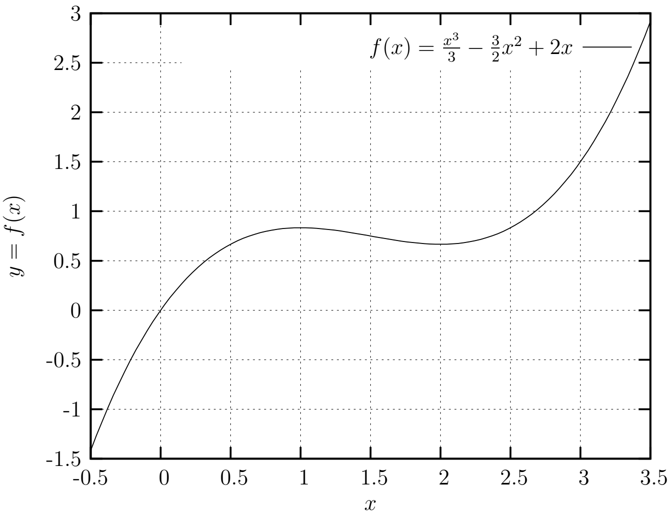

Figura 2: Grafico di $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x$.

Risoluzione. Si veda la figura 3. ∎

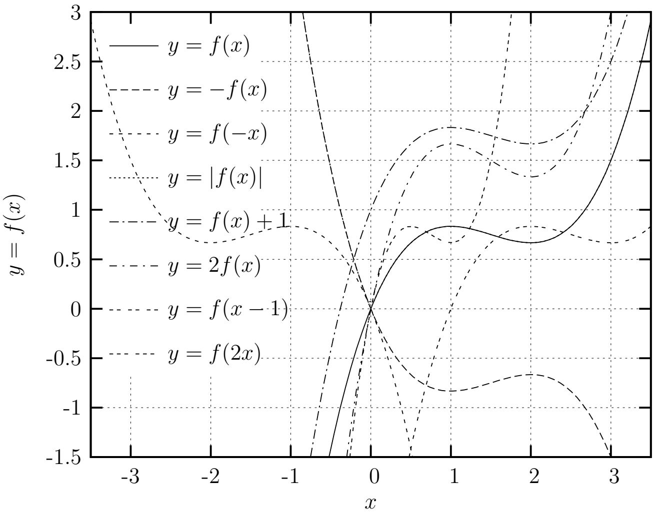

Figura 3: Grafici di $y = f(x)$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = |f(x)|$, $y = f(x) + 1$, $y = 2f(x)$, $y = f(x-1)$, $y = f(2x)$ con $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x$.

Esercizio 1.10 *Determinare eventuali simmetrie (funzione pari o dispari) e/o periodicità delle seguenti funzioni:*

1. $f(x) = x^3$
2. $f(x) = x^2 - 1$
3. $f(x) = |x|^5 - x^2 + 1$
4. $f(x) = x^3 - 1$
5. $f(x) = \sin x$
6. $f(x) = \cos x$
7. $f(x) = \tan x$
8. $f(x) = |7e^{ix}|$

Risoluzione.

1. $f(x) = x^3$: dispari.
2. $f(x) = x^2 - 1$: pari.
3. $f(x) = |x|^5 - x^2 + 1$: pari.
4. $f(x) = x^3 - 1$: né pari né dispari.

5. $f(x) = \sin x$: dispari, $T = 2\pi$.
6. $f(x) = \cos x$: pari, $T = 2\pi$.
7. $f(x) = \tan x$: dispari, $T = \pi$.
8. $f(x) = |7e^{ix}|$: pari, $T = 2\pi$.

■

Esercizio 1.11 *Per le funzioni $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ (figura 1) e $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x$ (figura 2) determinare, dall'analisi del loro grafico, gli intervalli di crescenza/decrescenza, massimi/minimi e gli intervalli su i quali risultano con concavità verso l'alto/basso.*

Risoluzione. Dalla figura 1 si ha che $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ è sempre decrescente e, pertanto, priva di massimi o minimi, con concavità rivolta verso il basso per $x < 2$ e verso l'alto per $x > 2$. La funzione è illimitata sia inferiormente che superiormente.
Dalla figura 2 si ha che $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x$ è crescente per $x < 1$ e per $x > 2$, mentre è decrescente per $1 < x < 2$. Pertanto, la funzione ha un massimo relativo in $x = 1$ e un minimo relativo in $x = 2$, ma è illimitata sia inferiormente che superiormente. La concavità è verso il basso per $x < 3/2$, verso l'alto per $x > 3/2$. ■

Esercizio 1.12 *Siano f, g le funzioni radice cubica e la funzione che aggiunge 1, ovvero $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g(x) = x + 1$. Determinare $f \circ g$ e $g \circ f$ verificando se la composizione è possibile (ovvero se i domini non sono incompatibili).*

Risoluzione. $f \circ g = f(g(x)) = \sqrt[3]{x+1}$ e $g \circ f = g(f(x)) = \sqrt[3]{x} + 1$. I domini non hanno problemi di compatibilità. ■

Esercizio 1.13 *Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 2k - 3}$ ha come dominio $\mathbb{R}$.*

Risoluzione. Deve essere $x^2 + x + 2k - 3 \neq 0$, ovvero l'equazione di secondo grado non deve avere radici reali, i.e. $\Delta < 0 \Rightarrow k > \dfrac{13}{8}$. ■