Analisi Matematica per Bio-Informatici
Esercitazione 02 – a.a. 2007-2008

Dott. Simone Zuccher

08 Novembre 2007

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Binomio di Newton (teoria)

- Si chiama *fattoriale* del numero naturale $n \in \mathbb{N}$ il numero naturale $n!$ definito da $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Inoltre, per definizione, si pone $0! = 1$.
- Dalla definizione segue che $(n+1)! = n!(n+1),\ \forall n \in \mathbb{N}$.
- Definiamo *coefficiente binomiale* il numero

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad n, k \in \mathbb{N},\ k \leq n.$$

- Si dimostra che, con $n, k \in \mathbb{N}$, si ha:

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}; \quad \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}, \quad k \leq n; \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \quad 1 \leq k \leq n;$$

- Teorema (Formula del binomio di Newton):

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

  Dimostrazione (per induzione).
  Per $n = 0$ si ha $(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$, per cui la formula è certamente verificata per $n = 0$.

Supponendo che la formula sia valida per un certo $n \in \mathbb{N}$, dimostriamo che è valida per $n+1$. Infatti:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = \\
&x(x+y)^n + y(x+y)^n = \\
&x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} + y\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = \\
&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} = \\
&\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^{k} y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} = \\
&\binom{n}{n}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]x^k y^{n+1-k} + \binom{n}{0}y^{n+1} = \\
&\binom{n+1}{0}y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1} = \\
&\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}
\end{aligned}$$

2 Funzioni

Definizioni utili per gli esercizi:

- Funzione: legge che associa ad ogni elemento di X *un solo* elemento di Y. Scriveremo $f : X \to Y$ oppure $y = f(x)$, con $x \in X \wedge y \in Y$. X si chiama dominio e Y codominio.

- Immagine: siano $f : X \to Y$ e $A \subseteq X$. Si definisce immagine di A mediante f, e si indica con $f(A)$, il sottoinsieme $B \subseteq Y$ definito da $B = f(A) = \{y \in Y : (\exists x \in A : y = f(x))\}$

- Funzione iniettiva: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ oppure, equivalentemente, $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$. Quindi $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

- Funzione suriettiva: $f(X) = Y$, ovvero $\forall y \in Y \;\; \exists x \in X : y = f(x)$.

- Funzione biiettiva: se è iniettiva e suriettiva.

- Funzione inversa: data una funzione iniettiva $y = f(x)$, esiste una ed una sola applicazione da $f(X)$ in X, e la si indica con f^{-1}, che ad ogni $y \in f(X)$ associa $x \in X : f(x) = y$.
  Tale definizione si può anche riformulare nel modo seguente (totalmente equivalente): data una funzione biiettiva $y = f(x)$, con $x \in X$ e $y \in Y$, si definisce funzione inversa di f e la si indica con f^{-1} la funzione che associa ad ogni elemento $y \in Y$ *il solo* elemento $x \in X : f(x) = y$.

- Funzione composta: date $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, si definisce funzione composta $h : X \to Z$ la funzione $h(x) = g(f(x))$, ovvero $h = g \circ f$.

Esercizio 2.1 *Si dimostri che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x/2 - 1$ è biiettiva e si determini la funzione inversa.*

Risoluzione. Bisogna dimostrare che $f(x)$ è sia iniettiva che suriettiva.
Iniettiva: $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1/2 - 1 \neq x_2/2 - 1 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$.
Suriettiva: $y = f(x)$ può assumere tutti i valori di $\mathbb{R}$ e si può sempre determinare il corrispondente $x \in \mathbb{R}$, ossia $\forall y \in Y \;\; \exists x \in X : y = f(x)$.
Funzione inversa: $x = 2y + 2$. ■

Esercizio 2.2 *Si dimostri che $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(x) = x + 23$ è iniettiva ma non suriettiva, mentre $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ è biiettiva.*

Risoluzione.

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
  Iniettiva: $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 + 23 \neq x_2 + 23 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$.
  Non suriettiva: da $f(x) = x + 23$, affinché possa esistere $x \in \mathbb{N} : f(x) = y$, ossia $x + 23 = y$ ammetta una soluzione $x \in \mathbb{N}$ per $y \in \mathbb{N}$ fissata, dovrebbe essere $y \geq 23$. Siccome non vale il $\forall y \in Y$ della definizione, la funzione non è suriettiva.

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.
  Iniettiva: come sopra.
  Suriettiva: lo è perché $\forall y \in \mathbb{Z} \;\; \exists x \in \mathbb{Z} : y = f(x)$.

■

Esercizio 2.3 *Si dimostri che $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ ($\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$) definita da*

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \textit{se } x \textit{ è dispari} \\ x - 1 & \textit{se } x \textit{ è pari} \end{cases}$$

è biiettiva e si determini la funzione inversa.

Risoluzione. Bisogna dimostrare che $f(x)$ è sia iniettiva che suriettiva.
Iniettiva. Bisogna suddividere in 3 casi: x_1 e x_2 entrambi pari, entrambi dispari e uno pari e uno dispari. Supponiamo x_1 e x_2 pari, $x_1 \neq x_2$. Allora si ha $f(x_1) = x_1 - 1$

e $f(x_2) = x_2 - 1$, pertanto $f(x_1) \neq f(x_2)$. Se x_1 e x_2 sono dispari, e $x_1 \neq x_2$, si ha $f(x_1) = x_1 + 1$ e $f(x_2) = x_2 + 1$, pertanto $f(x_1) \neq f(x_2)$. Infine, considerando x_1 pari e x_2 dispari si ha che $f(x_1)$ è dispari e $f(x_2)$ pari, per cui è ancora $f(x_1) \neq f(x_2)$. La funzione è quindi iniettiva.
Suriettiva: si verifica che $y = f(x)$ può assumere tutti i valori di $\mathbb{N}^+$, ossia si può sempre determinare il corrispondente $x \in \mathbb{N}^+$ tale che $y = f(x)$.
Funzione inversa:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y+1 & \text{se } y \text{ è dispari} \\ y-1 & \text{se } y \text{ è pari} \end{cases}$$

Si noti che f^{-1} coincide con f. ■

Esercizio 2.4 *Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 + x + 1$, si determini la sua immagine e si verifichi se f è invertibile oppure no. Nel caso non lo sia, esiste un sottoinsieme $D \subseteq \mathbb{R}$ tale che $f_{|D}$ sia invertibile?*

Risoluzione. Immagine: l'immagine di f non è nient'altro che $Y = f(R)$, ovvero l'insieme delle $y \in R$ tali per cui l'equazione $x^2 + x + 1 = y$ abbia almeno una soluzione reale ($x \in \mathbb{R}$). A tal fine, si può osservare che la parabola $y = x^2 + x + 1$ ha concavità verso l'alto e il vertice di coordinate $V(-1/2; 3/4)$; quindi si avranno soluzioni reali solo per $y \geq 3/4$ e pertanto $Y = f(X) = [3/4; +\infty[$. Alternativamente si può calcolare il discriminante Δ dell'equazione $x^2+x+1-y = 0$ e imporre che sia $\Delta \geq 0$. Così facendo si ottiene $1 - 4(1 - y) \geq 0$, che porta ancora a $y \geq 3/4$, ovvero $Y = f(X) = [3/4; +\infty[$.
Iniettiva: $x_1 \neq x_2$ non implica necessariamente $f(x_1) \neq f(x_2)$ in quanto, fissata $y \in Y \wedge y \neq 3/4$, i valori di x tali che $y = f(x)$ sono due. Infatti, $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1^2 + x_1 + 1 \neq x_2^2 + x_2 + 1 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 1) \neq 0 \Rightarrow (x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq -x_2 - 1)$. In altre parole, $x_1 \neq x_2 \not\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ e pertanto f non è iniettiva. Tuttavia, restringendo il dominio di f a $D =]-\infty; -1/2]$ o a $D = [-1/2; +\infty[$ $f_{|D}$ è iniettiva (si noti che $x = -1/2$ è l'asse di simmetria della parabola). ■

Esercizio 2.5 *Data la funzione $f : [-1; 0[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1/x^2$, si determini l'immagine Y di f e, nel caso la funzione $f : [-1; 0[\to Y$ sia biiettiva, si determini la funzione inversa.*

Risoluzione. Immagine: si noti che, $\forall\epsilon > 0$ si ha $1/x^2 < 1/(x + \epsilon)^2$ se e solo se $x < -\epsilon/2$, ovvero solo per valori negativi della x. In altre parole, $1/x^2$ è una funzione crescente per $x < 0$ e quindi $f([-1; 0[) = [1; +\infty[$.
Iniettiva: $f(x_1) \neq f(x_2)$ con $x_1, x_2 \in [-1; 0[$ equivale a $1/x_1^2 \neq 1/x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 \neq x_2^2 \Rightarrow x_1 \neq \pm x_2$. Essendo $x_1, x_2 \in [-1; 0[$, ossia entrambe negative, l'unica soluzione accettabile è $x_1 \neq x_2$ e pertanto $f : [-1; 0[\to Y$ è iniettiva.
Suriettiva: la funzione $f : [-1; 0[\to Y$ è certamente suriettiva in quanto Y è l'immagine di $[-1; 0[$ tramite f, ossia $\forall y \in Y \ \exists x \in [-1; 0[: y = f(x)$.
Funzione inversa: $f^{-1} : [1; +\infty[\to [-1; 0[$ definita da $x = -1/\sqrt{y}$. ■

Esercizio 2.6 *Siano $f(x) = 1/(1 + x^4)$ e $g(x) = x^2$. Determinare $f \circ g$ e $g \circ f$.*

Risoluzione. $f \circ g = f(g(x)) = \dfrac{1}{1+(x^2)^4} = \dfrac{1}{1+x^8}$

$g \circ f = g(f(x)) = \left(\dfrac{1}{1+x^4}\right)^2 = \dfrac{1}{(1+x^4)^2}$ ∎

3 Estremanti

Definizioni utili per gli esercizi:

- Estremo superiore. Se E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente, si definisce estremo superiore di E e si indica con $\sup E$ o $\sup\limits_{x \in E} x$ il minore dei maggioranti per E. Ovvero, se $L = \sup E$ valgono le seguenti affermazioni:
  - $\forall x \in E : x \leq L$ (L è un maggiorante per E)
  - $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists x \in E : L - \epsilon < x$ ($L - \epsilon$ non è maggiorante per E)
- Massimo. Si noti che l'estremo superiore L può non appartenere ad E. Se $L \in E$, allora si chiama massimo e si indica con $\max E$ oppure $\max\limits_{x \in E} x$.
- Estremo inferiore. Se E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente, si definisce estremo inferiore di E e si indica con $\inf E$ o $\inf\limits_{x \in E} x$ il maggiore dei minoranti per E. Ovvero, se $l = \inf E$ valgono le seguenti affermazioni:
  - $\forall x \in E : x \geq l$ (l è un minorante per E)
  - $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists x \in E : l + \epsilon > x$ ($l + \epsilon$ non è minorante per E)
- Minimo. Si noti che l'estremo inferiore l può non appartenere ad E. Se $l \in E$, allora si chiama minimo e si indica con $\min E$ oppure $\min\limits_{x \in E} x$.

Esercizio 3.1 *Calcolare estremo superiore e inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme*

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Risoluzione. Si noti che, al crescere di n, $1/n$ diminuisce poiché $1/(n+1) < 1/n$. Pertanto l'estremo superiore è 1 e si ottiene in corrispondenza di $n = 1$, quindi $\sup A = \max A = 1$ ($1 \in A$). Siccome $1/(n+1) < 1/n$, l'estremo inferiore potrebbe essere 0. Affinché questo sia vero devono essere verificate le due proprietà:

1. $l = 0$ è un minorante. Si noti che $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : 0 < 1/n$, infatti questo equivale a $0 < 1$ che è sempre vero. Quindi $l = 0$ è un minorante.
2. $l = 0$ è il maggiore dei minoranti. Preso $\epsilon > 0$ è possibile determinare $\bar{n}$ tale che $0 + \epsilon > 1/\bar{n}$, infatti basta prendere $\bar{n} > 1/\epsilon$ (proprietà di Archimede). In pratica, si è dimostrato che $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists x \in A : 0 + \epsilon > x = 1/\bar{n}$, ovvero che $l = 0$ è il maggiore dei minoranti.

Concludendo, $\inf A = 0$ e $\nexists \min A$. $\blacksquare$

Esercizio 3.2 *Calcolare estremo superiore e inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme*

$$A = \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$$

Risoluzione. Seguendo gli stessi passi visti nell'esercizio 3.1, $1 - 1/n$ è decrescente essendo $1 - 1/(n+1) < 1 - 1/n$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (verificarlo). Per $n = 1$, pertanto, si ha $\inf A = \min A = 0$. Per l'eventuale estremo superiore, si osservi che $1 - 1/n < 1$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, pertanto 1, essendo un maggiorante, potrebbe essere l'estremo superiore. Verifichiamo che sia il minore dei maggioranti utilizzando la definizione. Preso $\epsilon > 0$ è possibile determinare $\bar{n}$ tale che $1 - \epsilon < 1 - 1/\bar{n}$, infatti basta prendere $\bar{n} > 1/\epsilon$ (proprietà di Archimede). In pratica, si è dimostrato che $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists x \in A : 1 - \epsilon < x = 1 - 1/\bar{n}$, ovvero che $L = 1$ è il maggiore dei minoranti. Concludendo, $\sup A = 1$ e $\nexists \max A$. $\blacksquare$

Esercizio 3.3 *Calcolare estremo superiore e inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme*

$$A = \left\{\frac{2n}{n^2 + 1} : n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Risoluzione. Si noti che l'insieme è limitato sia superiormente che inferiormente. Infatti, $\forall n \in \mathbb{Z} : -1 \leq 2n/(n^2+1) \leq 1$, come si verifica facilmente osservando che $-1 \leq 2n/(n^2+1) \leq 1 \Leftrightarrow -(n^2+1) \leq 2n \leq (n^2+1) \Leftrightarrow -(n^2+2n+1) \leq 0 \leq (n^2-2n+1) \Leftrightarrow -(n+1)^2 \leq 0 \leq (n-1)^2$. Quindi eventuali estremanti sono ± 1. In particolare, per $n = 1$ si ottiene $2n/(n^2+1) = 1$ e per $n = -1$ si ottiene $2n/(n^2+1) = -1$, quindi $\inf A = \min A = -1$ e $\sup A = \max A = 1$. $\blacksquare$

Esercizio 3.4 *Calcolare estremo superiore e inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme*

$$A = \left\{n + \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$$

Risoluzione. Si noti che, al crescere di n, $2/n$ diminuisce ma n aumenta. Pertanto A non è limitato superiormente e quindi $\sup A = +\infty$. Per quanto riguarda l'estremo inferiore, si noti che per $n = 1$ e $n = 2$ si ha $n + 2/n = 3$, mentre $\forall n \geq 3 : n + 2/n > n$. Pertanto, l'estremo inferiore è 3, ma siccome appartiene ad A ne è anche il mimimo e quindi $\inf A = \min A = 3$. $\blacksquare$

Esercizio 3.5 *Calcolare estremo superiore e inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme*

$$A = \left\{a_n = \frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

Risoluzione. Si noti che $a_n < a_{n+1}$, infatti

$$\frac{n-1}{n+1} < \frac{n+1-1}{n+1+1} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n+1} < \frac{n}{n+2} \Leftrightarrow n^2+2n-n-2 < n^2+n \Leftrightarrow -2 < 0$$

Quindi, l'estremo inferiore si ha in corrispondenza di $n = 0$ e vale -1. Inoltre, siccome $a_0 \in A$, -1 è anche il minimo e quindi, $\inf A = \min A = -1$.
Per quanto riguarda l'estremo superiore, si noti che $a_n < 1$. Infatti,

$$\frac{n-1}{n+1} < 1 \Leftrightarrow n-1 < n+1 \Leftrightarrow -1 < 1,$$

quindi 1 potrebbe essere l'estremo superiore. Per dimostrarlo, come al solito, si deve dimostrare non solo che è un maggiorante (cosa appena fatta) ma che è il minore dei maggioranti. Quindi, bisogna dimostrare che preso arbitrariamente un $\epsilon > 0$ si può determinare un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $1-\epsilon < a_{\bar{n}} = (\bar{n}-1)/(\bar{n}+1)$. Risolvendo si ha

$$1-\epsilon < \frac{\bar{n}-1}{\bar{n}+1} \Leftrightarrow \frac{\bar{n}+1-\bar{n}+1}{\bar{n}+1} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\bar{n}+1} < \epsilon \Leftrightarrow \bar{n}+1 > \frac{2}{\epsilon} \Leftrightarrow \bar{n} > \frac{2}{\epsilon} - 1.$$

Pertanto, $\sup A = 1$ e $\nexists \max A$. ■

Esercizio 3.6 *Calcolare estremo superiore e inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme*

$$A = \left\{ a_n = \frac{n^2 + (-1)^n n}{n^2} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Risoluzione. Risulta più semplice riscrivere a_n come $a_n = 1 + (-1)^n/n$ e dividere in due casi

$$a_n = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n} & \text{per } n \text{ pari} \\ \\ 1 - \dfrac{1}{n} & \text{per } n \text{ dipari} \end{cases}$$

- n pari. Il ragionamento è analogo a quello degli esercizi precedenti. Si osservi che $1/n$ decresce al crescere di n e quindi il valore maggiore si ha per il primo numero pari $n = 2 \Rightarrow 1 + 1/n = 3/2$. Questo non solo è estremo superiore ma anche massimo. L'estremo inferiore è invece 1 (il minimo non esiste). Infatti 1 è un minorante perché $1 + 1/n > 1 \Leftrightarrow 1/n > 0 \Leftrightarrow 1 > 0$ ed è il maggiore dei minoranti perché preso $\epsilon > 0$ si può determinare $\bar{n}$ tale che $1 + \epsilon > 1 + 1/\bar{n}$. Tale $\bar{n}$ si verifica facilmente essere $\bar{n} > 1/\epsilon$.

- n dipari. Questo corrisponde all'esercizio 3.2, però bisogna fare attenzione che gli n accettabili sono solo quelli dispari. L'estremo inferiore, che coincide con il minimo, è 0 e l'estremo superiore è 1 (il massimo non esiste).

In conclusione, siccome $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ e $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$, si ha $\inf A = \min A = 0$ e $\sup A = \max A = 3/2$. ■

Esercizio 3.7 *Calcolare estremo superiore e inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme*

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : 9^x + 3^{x+1} - 4 \geq 0\right\}$$

Risoluzione. Bisogna risolvere la disequazione esponenziale $9^x + 3^{x+1} - 4 \geq 0$. Osservando che essa si può riscrivere come $3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 4 \geq 0$, ponendo $3^x = y$ si risolve facilmente la disequazione di secondo grado $y^2 + 3y - 4 \geq 0 \Rightarrow y \leq -4 \vee y \geq 1$, ovvero $3^x \leq -4 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$ e $3^x \geq 1 \Rightarrow x \geq 0$. Quindi, $\inf A = \min A = 0$ e $\sup A = +\infty$. ■

Esercizio 3.8 *Calcolare estremo superiore e inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme* $A = \left\{x > 0 : \cos(\frac{1}{x}) = 0\right\}$

Risoluzione. $\cos(\frac{1}{x}) = 0 \Rightarrow 1/x = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{N}$ (si noti che se non fosse stato $x > 0$ si sarebbe avuto $k \in \mathbb{Z}$). Quindi $x = \frac{2}{\pi(1+2k)}, k \in \mathbb{N}$. Siccome, al crescere di k, x diminuisce, l'estremo superiore (che è anche massimo) si ha in corrispondenza di $k = 0 \Rightarrow x = 2/\pi$, mentre l'estremo inferiore potrebbe essere 0 (che è certamente un minorante). Verifichiamo che 0 è il maggiore dei minoranti. Preso $\epsilon > 0$ si può determinare $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che $0 + \epsilon > \frac{2}{\pi(1+2\bar{k})}$. Infatti, $\epsilon > \frac{2}{\pi(1+2\bar{k})} \Leftrightarrow 1 + 2\bar{k} > \frac{2}{\pi\epsilon} \Leftrightarrow 2\bar{k} > \frac{2}{\pi\epsilon} - 1 \Leftrightarrow \bar{k} > \frac{1}{\pi\epsilon} - \frac{1}{2}$. Quindi $\inf A = 0$, $\nexists \min A$, $\sup A = \max A = 2/\pi$. ■

Esercizio 3.9 *Calcolare estremo superiore e inferiore ed eventualmente massimo e minimo dell'insieme* $A = \{a \in \mathbb{R} : a = 2x - y, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, -2 \leq x < 3, -2 \leq y < 3)\}$.

Risoluzione. Si noti che l'insieme A è formato dagli $a \in \mathbb{R}$ tali per cui le rette del fascio improprio $a = 2x - y$ abbiano almeno un punto contenuto nel rettangolo $(x, y) \in [-2; 3[\times [-2; 3[$. Si verifica facilmente (ricorrendo alla geometria analitica) che i valori di a che assicurano tale proprietà sono $-7 < a < 8$. Quindi $\inf A = -7$, $\nexists \min A$, $\sup A = 8$, e $\nexists \max A$. ■

Esercizio 3.10 *Si dimostri che* $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 2\}$ *non ammette estremo superiore in* $\mathbb{Q}$.

Risoluzione. Anche se non richiesto dall'esercizio, si noti che A è illimitato inferiormente e quindi $\inf A = -\infty$. Per dimostrare quanto richiesto, dimostriamo che se l'estremo superiore M esistesse dovrebbe essere tale per cui $M^3 = 2$ e che $\nexists M \in \mathbb{Q} : M^3 = 2$.

1. Per dimostrare che se M esistesse allora dovrebbe essere 2 dimostriamo che non può essere nè $M^3 < 2$ nè $M^3 > 2$. Supponiamo che sia $M^3 < 2$ e dimostriamo che M non è il minore dei maggioranti o, in altre parole, che scelto $0 < \epsilon < 1$ è possibile determinare $x = M + \epsilon, x \in \mathbb{R}$ tale che $x \in A$. Affinché x appartenga ad A deve essere verificata la disuguaglianza $x^3 < 2 \Leftrightarrow (M + \epsilon)^3 < 2$. Sviluppando i

calcoli si ottiene $(M+\epsilon)^3 < 2 \Leftrightarrow M^3+3M^2\epsilon+3M\epsilon^2+\epsilon^3$, ma essendo $0<\epsilon<1$ si ha $\epsilon^3 \leq \epsilon^2 \leq \epsilon$ e quindi $M^3+3M^2\epsilon+3M\epsilon^2+\epsilon^3 \leq M^3+\epsilon(3M^2+3M+1)$. Pertanto, affinché sia $(M+\epsilon)^3 < 2$ basta richiedere $M^3+\epsilon(3M^2+3M+1) < 2$ e questo è verificato per $\epsilon \leq (2-M^3)/(3M^2+3M+1)$ (si noti che si era supposto $M^3 < 2$, per cui ϵ risulta essere positivo). Se si ripete lo stesso ragionamento assumendo $M^3 > 2$, si arriva a determinare un altro valore di ϵ che assicura nuovamente che M non è il minore dei maggioranti.

2. Dimostriamo ora che $(M^3 = 2) \Rightarrow (M \notin \mathbb{Q})$. Supponiamo per assurdo $M \in \mathbb{Q}$. Allora sarebbe $M = m/n$ con $m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ e m, n primi tra loro, tali che $(m/n)^3 = 2$. In tal caso $m^3 = 2n^3$ e quindi m^3 sarebbe pari e conseguentemente anche m. Quindi m si potrebbe riscrivere come $m = 2k, k \in \mathbb{N}$, per cui risulterebbe $8k^3 = 2n^3 \Rightarrow n^3 = 4k^3$ il che implicherebbe n pari. m ed n sarebbero quindi entrambi multipli di 2, che è contrario alle ipotesi in quanto m ed n sono primi tra loro.

■

Esercizio 3.11 *Si dimostri che $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ non ammette estremi in $\mathbb{Q}$.*

Risoluzione. Si proceda come nell'esercizio 3.10, facendo attenzione che scelto $M > 0 : M^2 = 2$ si ha $(\pm M)^2 = 2$. ■

Esercizio 3.12 *Tra tutti i rettangoli di area k^2 determinare quello di perimetro minimo.*

Risoluzione. Se x e y sono i due lati, si deve determinare il minimo dell'insieme $A = \{2(x+y) : xy = k^2\}$. A tal fine, ricorriamo alla disuguaglianza

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \quad x, y > 0$$

in cui l'uguaglianza vale se e solo se $x = y$. Tale disuguaglianza è facilmente dimostrabile osservando che $(x-y)^2 \geq 0$, dove l'uguaglianza vale se e solo se $x = y$. Infatti, $(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy \geq 2xy \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x+y) \geq 2\sqrt{xy}$, ove nell'ultimo passaggio si è fatto uso dell'ipotesi $x, y > 0$.
Tornando al nostro problema, si ha quindi $2(x+y) \geq 4\sqrt{xy} = 4k$, dove il segno di uguaglianza, che corrisponde al minimo dell'insieme A, vale solo nel caso $x = y = k$. Pertanto il rettangolo richiesto è il quadrato di lato k. ■

Esercizio 3.13 *Determinare tra le coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano la relazione $x^2 + y^2 = 1$ quelle per cui il prodotto xy sia massimo.*

Risoluzione. Si noti che $(x-y)^2 \geq 0$, dove il segno di uguaglianza vale solo per $x = y$. Quindi, $x^2+y^2 \geq 2xy$, ma essendo $x^2+y^2 = 1$ si ha $xy \leq 1/2$. Ricordando che il segno di uguaglianza vale solo nel caso $x = y$, il massimo del prodotto xy si ha in corrispondenza di $x = y = \sqrt{2}/2$ oppure $x = y = -\sqrt{2}/2$. ■