Analisi Matematica per Bio-Informatici
Esercitazione 01 – a.a. 2007-2008

Dott. Simone Zuccher

26 Ottobre 2007

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Numeri complessi

Definizioni utili per gli esercizi:

- Chiamiamo numero complesso z la coppia ordinata (x, y) tale che $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Scriveremo $z \in \mathbb{C}$.
- Per definizione: $0 := (0, 0)$, $1 := (1, 0)$, $i := (0, 1)$.
- Definite le operazioni di somma, differenza, prodotto e divisione tra numeri complessi, si verifica facilmente che $i^2 = -1$.
- Parte reale di z: $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(x, y) = x$; parte immaginaria di z: $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(x, y) = y$.
- Forma cartesiana equivalente. $z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = (x, 0) + i \cdot (y, 0) = x + iy$
- Complesso coniugato di $z \in \mathbb{C}$. $\overline{z} := (x, -y) = x - iy$
- Modulo di $z \in \mathbb{C}$. $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$
- *Piano di Gauss*: sistema di riferimento cartesiano ortogonale in cui si riporta in ascissa $\mathrm{Re}(z)$ e in ordinata $\mathrm{Im}(z)$. Pertanto, $z = x + iy$ è rappresentato dal punto $P(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) = P(x, y)$.
- Forma trigonometrica equivalente. Indicando con $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e con θ l'angolo formato, sul piano di Gauss, dal segmento orientato OP con il semiasse positivo delle ascisse, sfruttando le relazioni trigonometriche sui triangoli rettangoli si ha:
$$z = x + iy = \rho(\cos\theta + i \sin\theta).$$
ρ e θ si chiamano, rispettivamente, *modulo* e *argomento (principale)* del numero complesso z.

- Passaggio dalla forma cartesiana alla forma trigonometrica.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arcsin\left(\dfrac{y}{\rho}\right) = \arccos\left(\dfrac{x}{\rho}\right), \rho \neq 0. \end{cases}$$

- Forma esponenziale equivalente. Si può dimostrare che $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Pertanto, il generico numero complesso z può essere riscritto come:

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta}.$$

  Questa semplice formula risulta particolarmente comoda ogniqualvolta si debbano eseguire prodotti o divisioni tra numeri complessi in quanto si basa sulla mera applicazione delle elementari proprietà delle potenze. Si noti che la formula $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, detta anche formula di Eulero, nel caso $\theta = \pi$ si riduce a

$$1 + e^{i\pi} = 0,$$

  formula di particolare bellezza che racchiude in sé le 5 entità fondamentali della matematica.

- Potenze e radici n-esime di numeri complessi. Dalla formula di Eulero si ricava immediatamente

$$z^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n\left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right]$$

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = \rho^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right], k = 0, 1, 2, \dots n-1.$$

  Le formule precedenti sono dette anche *formule di De Moivre*. Si noti che le radici n-esime del numero complesso z non sono altro che i vertici del poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza con centro nell'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho}$, dove il primo vertice ha come argomento principale l'angolo θ/n ottenuto per $k = 0$.

Esercizio 1.1 *Dati $z = 1+2i$ e $w = 2-i$, utilizzando la forma cartesiana, determinare $z+w$, $w-z$, zw, $\bar{z}w$, $|z|$, $|w|$, $z\bar{z}$, z^2, z^2w, z/w, w/z.*

Risoluzione.

- $z + w = (1+2i) + (2-i) = 3 + i$
- $w - z = (2-i) - (1+2i) = 1 - 3i$
- $zw = (1+2i)\cdot(2-i) = 2 - i + 4i - 2i^2 = 2 + 3i + 2 = 4 + 3i$
- $\bar{z}w = (1-2i)\cdot(2-i) = 2 - i - 4i + 2i^2 = 2 - 5i - 2 = -5i$
- $|z| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$
- $|w| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$
- $z\bar{z} = (1+2i)\cdot(1-2i) = 1^2 - 4i^2 = 1 + 4 = 5$

- $z^2 = (1+2i)^2 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot 2i + 4i^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$
- $z^2 w = (1+2i)^2 \cdot (2-i) = (-3+4i)\cdot(2-i) = -6 + 3i + 8i - 4i^2 = -2 + 11i$
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{1+2i}{2-i} = \dfrac{1+2i}{2-i}\cdot\dfrac{2+i}{2+i} = \dfrac{2+i+4i+2i^2}{4-i^2} = \dfrac{5i}{5} = i$
- $\dfrac{w}{z} = \dfrac{2-i}{1+2i} = \dfrac{2-i}{1+2i}\cdot\dfrac{1-2i}{1-2i} = \dfrac{2-4i-i+2i^2}{1-4i^2} = \dfrac{-5i}{5} = -i$, oppure si noti che $\dfrac{w}{z} = \dfrac{1}{\frac{z}{w}} = \dfrac{1}{i} = -i$

$\blacksquare$

Esercizio 1.2 *Scrivere i numeri complessi* $z = 1 + i\sqrt{3}$ *e* $w = -1 - \frac{i}{\sqrt{3}}$ *in forma trigonometrica ed esponenziale. Quindi, utilizzando tali forme, calcolare* zw, $\bar{z}w$, z^2, z/w. *Infine, verificare i risultati utilizzando la forma cartesiana.*

Risoluzione.

1. $z = 1 + i\sqrt{3}$. $\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$; $(\cos\theta = 1/2 \wedge \sin\theta = \sqrt{3}/2) \Rightarrow \theta = \pi/3 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ovvero $z = 2[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)] = 2e^{i\pi/3}$.

2. $w = -1 - \frac{i}{\sqrt{3}}$. $\rho = \sqrt{(-1)^2 + (-1/\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 1/3} = 2/\sqrt{3}$; $(\cos\theta = -1/(2/\sqrt{3}) = -\sqrt{3}/2 \wedge \sin\theta = (-1/\sqrt{3})/(2/\sqrt{3}) = -1/2) \Rightarrow \theta = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ovvero $w = \frac{2}{\sqrt{3}}[\cos(\frac{7}{6}\pi) + i\sin(\frac{7}{6}\pi)] = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{7}{6}\pi}$.

- $zw = \left[2e^{i\frac{\pi}{3}}\right]\cdot\left[\frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{7}{6}\pi}\right] = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{3}+i\frac{7}{6}\pi} = \frac{4}{\sqrt{3}}e^{i\frac{3}{2}\pi} = \frac{4}{\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right] = -\frac{4}{\sqrt{3}}i$. Utilizzando la forma cartesiana si ha $zw = (1+i\sqrt{3})\cdot(-1-\frac{i}{\sqrt{3}}) = -1 - \frac{i}{\sqrt{3}} - i\sqrt{3} - i^2 = -\frac{4}{\sqrt{3}}i$
- $\bar{z}w = \left[2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right]\cdot\left[\frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{7}{6}\pi}\right] = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{3}+i\frac{7}{6}\pi} = \frac{4}{\sqrt{3}}e^{i\frac{5}{6}\pi} = \frac{4}{\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right] = \frac{4}{\sqrt{3}}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] = -2 + \frac{2}{\sqrt{3}}i$. La verifica è immediata: $\bar{z}w = (1-i\sqrt{3})\cdot(-1-\frac{i}{\sqrt{3}}) = -1 - \frac{i}{\sqrt{3}} + i\sqrt{3} + i^2 = -2 + \frac{2}{\sqrt{3}}i$.
- $z^2 = \left[2e^{i\frac{\pi}{3}}\right]^2 = 4e^{i\frac{2}{3}\pi} = -2 + 2\sqrt{3}i$. Si lascia allo studente verificare che $(1+i\sqrt{3})^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$.
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{7}{6}\pi}} = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}-i\frac{7}{6}\pi} = \sqrt{3}e^{-i\frac{5}{6}\pi} = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Si lascia allo studente la verifica nella forma cartesiana.

■

Esercizio 1.3 *Sia* $w = z + z\bar{z} - z^2 + 2i + \bar{z} - 2(Im(z))^2$*. Determinare il luogo geometrico dei punti del piano complesso (piano di Gauss) tali che* $Re(w) = 3$ *e* $Im(w) = 0$*.*

Risoluzione. $w = z + z\bar{z} - z^2 + 2i + \bar{z} - 2(\mathrm{Im}(z))^2 = x + iy + x^2 + y^2 - (x^2 + 2xyi - y^2) + 2i + x - iy - 2y^2 = 2x - 2xyi + 2i = 2x + (-2xy + 2)i$. Pertanto:
$\mathrm{Re}(w) = 3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = 3/2$, ossia retta verticale.
$\mathrm{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow -2xy+2 = 0 \Leftrightarrow xy = 1$, ossia iperbole equilatera riferita ai propri asintoti.
■

Esercizio 1.4 *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *l'equazione*

$$2iz + 3 - 4i = 0$$

Risoluzione. Il modo più veloce è di ricavare z seguendo il procedimento tipico delle equazioni di primo grado. Si ha quindi $2iz = -3 + 4i$ da cui $z = (-3 + 4i)/2i$ e quindi (motiplicando numeratore e denominatore per i) $z = 2 + 3i/2$.
Un altro modo consiste nel sostituire $z = x+iy$ e separare la parte reale dell'equazione da quella immaginaria, ottenendo in tal modo un sistema di due equazioni in due incognite. Nel caso in esame si ha quindi $2i(x + iy) + 3 - 4i = 0 \Leftrightarrow 2ix - 2y + 3 - 4i = 0 \Leftrightarrow (3 - 2y) + (2x - 4)i = 0$, ossia:

$$\begin{cases} 3 - 2y = 0 \\ 2x - 4 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3/2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad z = 2 + 3i/2$$

Si noti che, se ci si limita ai numeri complessi in forma cartesiana, questo ultimo metodo risulta talvolta l'unico o quantomeno il più efficace (si veda l'esercizio seguente). ■

Esercizio 1.5 *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *le equazioni*

$$z^2 - 4 = 0 \qquad\qquad z^2 + 4 = 0$$

Risoluzione. $z^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = 4 \Rightarrow z = \pm 2$.
$z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4 \Rightarrow z = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{4} = \pm 2i.$ ■

Esercizio 1.6 *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *l'equazione*

$$z^2 - 5 - 12i = 0$$

Risoluzione. Risolvendo classicamente l'equazione di secondo grado si ottiene $z = \pm\sqrt{5 + 12i}$. Tuttavia, $\sqrt{5 + 12i}$ non è facilmente determinabile nemmeno ricorrendo alla forma trigonometrica o esponenziale in quanto $5 + 12i = \rho e^{i\theta}$ con $\rho = 13$ e $\theta =$

$\arcsin(5/12) \approx 1.176 \approx 67.38°$ e quindi le formule di De Moivre non possono essere applicate. Tornando all'equazione iniziale, la risolviamo in forma cartesiana introducendo $z = x + iy$ ottenendo $z^2 - 5 - 12i = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xyi - y^2 = 5 + 12i$, ossia

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6/y \\ 36/y^2 - y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6/y \\ y^4 + 5y^2 - 36 = 0 \end{cases}$$

$y^4 + 5y^2 - 36 = 0 \Rightarrow y^2 = -9 \vee y^2 = 4$ ma si noti che $x, y \in \mathbb{R}$ e quindi $y^2 = -9$ non è accettabile. $y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow x = \pm 3$ Quindi, $z^2 - 5 - 12i = 0 \Rightarrow z = \pm(3 + 2i)$. Si noti che le soluzioni si trovano su un cerchio con centro nell'origine e raggio $\sqrt{13}$, l'una diametralmente opposta all'altra. ■

Esercizio 1.7 *Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione*

$$iz^2 - z - 3 + i = 0$$

Risoluzione. Applicando la fomula per le equazioni di secondo grado si ottiene

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(i) \cdot (-3 + i)}}{2i} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12i + 4}}{2i} = \frac{1 \pm \sqrt{5 + 12i}}{2i}$$

Siccome dall'esercizio 1.6 è noto il valore di $\sqrt{5 + 12i}$, le soluzioni sono

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{5 + 12i}}{2i} = \frac{1 \pm (3 + 2i)}{2i} \Rightarrow z = (1 - 2i) \vee z = (-1 + i)$$

Si noti che, in generale, $\sqrt{\Delta}$ nell'equazione di secondo grado in z non è noto e il suo calcolo richiede la soluzione di un sistema nonlineare di due equazioni in due inconite. Pertanto, il lavoro richiesto è equivalente a sostituire direttamente nell'equazione di partenza $z = x + iy$. Così facendo si ottiene $iz^2 - z - 3 + i = 0 \Leftrightarrow i(x^2 + 2xyi - y^2) - x - iy - 3 + i \Leftrightarrow (-2xy - x - 3) + (x^2 - y^2 - y + 1)i = 0$, ossia

$$\begin{cases} -2xy - x - 3 = 0 \\ x^2 - y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3/(2y + 1) \\ (-3/(2y + 1))^2 - y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \dots$$

Che porta, come si verifica facilmente, a $z = (1 - 2i) \vee z = (-1 + i)$. ■

Esercizio 1.8 *Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione*

$$iz^2 - z\bar{z} + 9 + 3i = 0$$

Risoluzione. L'equazione diventa $i(x^2 + 2xyi - y^2) - (x^2 + y^2) + 9 + 3i = 0$, da cui $-(x^2 + y^2 + 2xy - 9) + (x^2 - y^2 + 3)i = 0$, ovvero

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy - 9 = 0 \\ x^2 - y^2 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 9 \\ (x + y)(x - y) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pm 3 \\ (x + y)(x - y) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases} \cup \begin{cases} x+y=-3 \\ x-y=1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \cup \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$$

da cui $z = \pm(1+2i)$. ■

Esercizio 1.9 *Calcolare, in $\mathbb{C}$, le radici terze di i.*

Risoluzione. In questo caso risulta estremamente conveniente utilizzare la forma esponenziale e le formule di De Moivre: $i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow i^{1/3} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$, $k = 0,1,2$. Pertanto, $z_1 = \cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}/2 + i/2$, $z_2 = \cos(\frac{5}{6}\pi) + i\sin(\frac{5}{6}\pi) = -\sqrt{3}/2+i/2$, $z_3 = \cos(\frac{3}{2}\pi)+i\sin(\frac{3}{2}\pi) = -i$. Si noti che le soluzioni trovate sono i vertici del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza con centro nell'origine e raggio unitario ($\rho = 1$) per il quale il segmento congiungente il primo vertice con l'origine forma un angolo $\theta/n = (\pi/2)/3 = \pi/6$ cone il semiasse positivo dell'ascisse.
Considerando il problema dal punto di vista cartesiano, le radici cercate sono le soluzioni dell'equazione $z^3 = i$, ovvero
$(x+iy)^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 + y^3i^3 - i = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3 - 1)i = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 0 \\ 3x^2y - y^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima si ha $x(x^2 - 3y^2) = 0$, il che implica $x = 0$ oppure $x = \pm\sqrt{3}y$ che, sostituiti nella seconda danno rispettivamente $y = -1$ e $y = 1/2$. Le tre radici sono quindi $z_1 = \sqrt{3}/2 + i/2$ e $z_2 = -\sqrt{3}/2 + i/2$ e $z_3 = -i$. ■

Esercizio 1.10 *Calcolare, in $\mathbb{C}$, le radici quarte di i.*

Risoluzione. Si proceda come nell'esercizio precedente. Per la forma esponenziale si ottiene $i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow i^{1/4} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)$, $k = 0,1,2,3$. Pertanto, le quattro radici sono i vertici del quadrato inscritto nella circonferenza con centro nell'origine e raggio 1 per i quali il segmento che congiunge il primo vertice del quadrato con l'origine forma l'angolo $\theta/4 = \pi/8$ con l'asse delle ascisse.
Per quanto riguarda la forma cartesiana, si ricorra, per il calcolo di $(x+iy)^4$, o al triangolo di Tartaglia o al binomio di Newton ($(a+b)^4 = \dots$). ■

Esercizio 1.11 *Calcolare, in $\mathbb{C}$, le radici quarte di -4.*

Risoluzione. In forma esponenziale, $-4 = 4e^{i\pi} \Rightarrow$
$(-4)^{1/4} = \sqrt[4]{4}\left[\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\right]$, $k = 0,1,2,3$. Pertanto, $z_1 = 1+i$, $z_2 = -1+i$, $z_3 = -1-i$, $z_4 = 1-i$. Si noti che le soluzioni sono i quattro vertici del quadrato inscritto nel cerchio con centro nell'origine e raggio $\sqrt{2}$, con il primo di essi avente argomento $\pi/4$.
Dal punto di vista cartesiano, bisogna risolvere l'equazione $z^4 = -4$, che implica $z^2 = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$. Dall'equazione $z^2 = 2i$ si ottiene $x^2 + 2xyi - y^2 - 2i = 0 \Rightarrow z = \pm(1+i)$.

Da $z^2 = -2i$ si ottiene $x^2 + 2xyi - y^2 + 2i = 0 \Rightarrow z = \pm(1-i)$. Le quattro radici sono quindi $z = \pm(1+i)$ e $z = \pm(1-i)$. ■

Esercizio 1.12 *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *l'equazione*

$$\frac{z^3+1}{z^3-1} = \frac{1}{i}$$

.

Risoluzione. Dopo aver posto $z^3 \neq 1 \Rightarrow (z \neq 1) \wedge (z \neq -1/2 + \sqrt{3}/2i) \wedge (z \neq -1/2 - \sqrt{3}/2i)$, si osservi che $1/i = -i$ e quindi l'equazione si riduce a $z^3+1 = -i(z^3-1)$, da cui si procede come al solito (ponendo $z = x+iy$ e mettendo a sistema parte reale dell'equazione con parte immaginaria) ottenendo $z_1 = \sqrt{3}/2 + i/2$, $\quad z_2 = -\sqrt{3}/2 + i/2$; $\quad z_3 = -i$ (si noti che $y \in \mathbb{R}$ e, pertanto, $y = (1 \pm \sqrt{3}i)/2$ non è accettabile). ■

Esercizio 1.13 *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *l'equazione*

$$|z-1| = |z+1|$$

.

Risoluzione. Si osservi che $(z-1) = (x-1) + iy$ e quindi $|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Analogamente, $|z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$, per cui si ottiene $x = 0$ (asse delle ordinate). Intuitivamente, l'esercizio consiste nel trovare i punti del piano che hanno ugual distanza dal punto $(1;0)$ e $(-1;0)$. Evidentemente, questo è l'asse del segmento che ha per estremi tali punti, ossia proprio la retta $x = 0$. ■

Esercizio 1.14 *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *e rappresentare graficamente la soluzione della disequazione*

$$z + \bar{z} \leq |z|^2$$

.

Risoluzione. Si ha $x+iy+x-iy \leq x^2+y^2$, ovvero $x^2+y^2-2x \geq 0$. Questi sono tutti i punti del piano esterni o coincidenti con la circonferenza di centro $C(1;0)$ e raggio 1. ■

2 Principio di induzione

Supponiamo di avere una successione P_n di proposizioni ($n \in \mathbb{N}$). P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ se

(i) P_0 è vera

(ii) $\forall k \in \mathbb{N} : P_k \Rightarrow P_{k+1}$

Esercizio 2.1 *Facendo uso del principio di induzione dimostrare la formula*

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

Risoluzione.

- La formula è certamente vera per $n = 0$ in quanto $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1$ e $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$.
- Supponiamo che la formula sia vera per $n = k$ e dimostriamo che questo implica la veridicità anche per $n = k+1$. Per ipotesi, quindi, $1+2+4+8+\cdots+2^k = 2^{k+1}-1$. Sommando a entrambi i membri 2^{k+1} si ha $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$. In conclusione, abbiamo dimostrato che se la formula è vera per $n = k$ allora lo è anche per $n = k + 1$.

■

Esercizio 2.2 *Facendo uso del principio di induzione dimostrare la formula*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Risoluzione.

- Si noti che in questo caso la formula considera solo $n \geq 1$, per cui la prima verifica va fatta per $n = 1$. In questo caso la formula è certamente vera in quanto $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1$ e $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$.
- Supponiamo che la formula sia vera per $n = k$ e dimostriamo che questo implica la veridicità anche per $n = k+1$. Per ipotesi, quindi, $1+2+3+4+5+\cdots+k = k(k+1)/2$. Sommando a entrambi i membri $k+1$ si ha $1+2+3+4+5+\cdots+k+(k+1) = k(k+1)/2+(k+1) = (k+1)(k/2+1) = (k+1)(k+2)/2$. Quest'ultima espressione non è altro che la formula calcolata in $n = k + 1$, pertanto abbiamo dimostrato che $P_k \Rightarrow P_{k+1}$.

■

Esercizio 2.3 *Facendo uso del principio di induzione dimostrare che per* $q \neq 1$ *si ha*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Risoluzione.

- Per $n = 0$ la formula è vera perché $\sum_{k=0}^{0} q^k = 1$ e $\frac{1-q^{0+1}}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1$.

- Supponiamo che la formula sia vera per $n = k$ e dimostriamo che questo implica la veridicità anche per $n = k+1$. Per ipotesi, quindi, $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^k = (1-q^{k+1})/(1-q)$. Sommando a entrambi i membri q^{k+1} si ha $1+q+q^2+q^3+\cdots+q^k+q^{k+1} = (1-q^{k+1})/(1-q)+q^{k+1} = (1-q^{k+1}+q^{k+1}-q\cdot q^{k+1})/(1-q) = (1-q^{k+2})/(1-q)$. Quest'ultima espressione non è altro che la formula calcolata in $n = k+1$, pertanto abbiamo dimostrato che $P_k \Rightarrow P_{k+1}$.

■

Esercizio 2.4 *Facendo uso del principio di induzione dimostrare le seguenti formule*

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *(b)* $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ *(c)* $\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$

Risoluzione. Eseguire gli stessi passi degli esercizi precedenti. La (c) si può dimostrare velocissimamente anche in altro modo: quale? ■

Esercizio 2.5 *Facendo uso del principio di induzione dimostrare che* $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > n$.

Risoluzione.

- Per $n = 0$ si ha $2^0 > 0 \Leftrightarrow 1 > 0$, che è vera.

- Supponiamo che la formula sia vera per $n = k$ e dimostriamo che questo implica la veridicità anche per $n = k+1$. Per ipotesi, quindi, $2^k > k$. Moltiplicando per 2 la disuguaglianza a destra e sinistra $(2 > 0)$ si ha $2^{k+1} > 2k$. Si osservi ora che, $\forall k \geq 1$, è sempre $2k \geq k+1$. Pertanto $2^{k+1} > 2k \geq k+1 \Rightarrow 2^{k+1} > k+1$. Abbiamo quindi dimostrato che $P_k \Rightarrow P_{k+1}$.

■

Esercizio 2.6 *Facendo uso del principio di induzione dimostrare che* $\forall n \in \mathbb{N}, a \geq -1 :$ $(1+a)^n \geq 1 + na$ *(disuguaglianza di Bernoulli).*

Risoluzione.

- Per $n = 0$ si ha $(1+a)^0 \geq 1 + 0 \Leftrightarrow 1 \geq 1$, che è vera.

- Supponiamo che la formula sia vera per $n = k$ e dimostriamo che questo implica la veridicità anche per $n = k+1$. Per ipotesi, quindi, $(1+a)^k \geq 1+ka$. Moltiplicando per $(1+a)$ la disuguaglianza a destra e sinistra $(1+a > 0)$ si ha $(1+a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a) = 1+a+ka+ka^2 = 1+(k+1)a+ka^2$. Si osservi ora che, $\forall k \geq 0$, è sempre $ka^2 \geq 0$ e quindi $1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a$. Sfruttando quest'ultima disuguaglianza si ha quindi $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$, ossia $P_k \Rightarrow P_{k+1}$.

■

Esercizio 2.7 *Facendo uso del principio di induzione dimostrare che* $\forall n \in \mathbb{N}$ *valgono i seguenti raffinamenti della disuguaglianza di Bernoulli:*

$$(a) \quad (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 \qquad a \geq 0$$

$$(b) \quad (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3 \quad a \geq -1$$

Risoluzione. Si seguano gli stessi passi dell'esercizio 2.6, osservando nel caso (a) che $a^3 \geq 0$ e nel caso (b) $a^4 \geq 0$. ■

Esercizio 2.8 *Facendo uso del principio di induzione dimostrare che* $\forall n \in \mathbb{N}$ *il numero* $n^2 + n$ *è pari.*

Risoluzione. Per $n = 1$ è certamente vero: $1^2 + 1 = 2$, pari.
Assumendo che sia vero per $n = k$, dimostriamo che lo è anche per $n = k+1$. Se k^2+k è pari, allora la proposizione valutata in $n = k+1$ diventa $(k+1)^2+(k+1) = k^2+3k+2 = (k^2+k)+2(k+1)$, ma questo è un numero pari essendo pari sia k^2+k (per ipotesi) sia $2(k+1)$. ■

Esercizio 2.9 *Facendo uso del principio di induzione dimostrare l'uguaglianza delle formule*

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Risoluzione. Si dimostri dapprima che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (vedi esercizio 2.2) e quindi che
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$
■

Esercizio 2.10 *Facendo uso del principio di induzione dimostrare che*

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

Risoluzione. Si proceda come noto. ■