Dinamica dei Fluidi
Lezione 12 – a.a. 2009-2010

Simone Zuccher

31 Maggio 2010

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Sistemi iperbolici lineari

Come noto, un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali lineari e a coefficienti costanti del tipo

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

dove $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ è il vettore delle incognite e $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ è costante, è detto *iperbolico* se la matrice $\boldsymbol{A}$ ha m autovalori reali (*strettamente iperbolico* se gli autovalori sono tutti distinti), ovvero $\boldsymbol{A}$ è diagonalizzabile e può essere decomposta come

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{R}^{-1},$$

dove $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ è la matrice diagonale degli autovalori e $\boldsymbol{R} = [\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2|\cdots|\mathbf{r}_m]$ è la matrice degli autovettori destri. In altre parole, λ_p e $\mathbf{r}_p$ soddisfano il problema

$$\boldsymbol{A}\mathbf{r}_p = \lambda_p \mathbf{r}_p, \qquad \text{per} \quad p = 1, 2, \dots, m,$$

ovvero,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}.$$

Anziché risolvere il sistema (1.1), operiamo la sostituzione di variabile

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{R}^{-1}\mathbf{u}$$

e moltiplichiamo (1.1) per $\boldsymbol{R}^{-1}$ ottenendo

$$\boldsymbol{R}^{-1}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{R}^{-1}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0$$

ovvero, siccome $\boldsymbol{R}^{-1}$ è costante,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Lambda}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0.$$

Il motivo di questa sostituzione sta nel fatto che la matrice $\boldsymbol{\Lambda}$ è diagonale, i.e. il problema iniziale si riduce a p equazioni lineari disaccoppiate del tipo

$$(v_p)_t + \lambda_p (v_p)_x = 0, \qquad \text{per} \quad p = 1, 2, \ldots, m,$$

che abbiamo imparato a risolvere nell'esercitazione precedente. La soluzione della p-esima equazione è

$$v_p(x,t) = v_p(x - \lambda_p t, 0),$$

dove

$$\mathbf{v}(x,0) = \boldsymbol{R}^{-1}\mathbf{u}_0(x).$$

La soluzione $\mathbf{u}(x,t)$ si ottiene facilmente da $\mathbf{v}(x,t)$ tramite la sostituzione iniziale,

$$\mathbf{u}(x,t) = \boldsymbol{R}\mathbf{v}(x,t) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{u}(x,t) = \sum_{p=1}^{m} v_p(x,t)\mathbf{r}_p,$$

ovvero

$$\mathbf{u}(x,t) = \sum_{p=1}^{m} v_p(x - \lambda_p t, 0)\mathbf{r}_p.$$

Si noti che la soluzione finale è costituita dagli autovettori destri $\mathbf{r}_p$, costanti, linearmente combinati con un peso $v_p(x - \lambda_p t, 0)$ che dipende unicamente dal dato iniziale negli m punti $x - \lambda_p t$. Il *dominio di dipendenza* della soluzione è quindi

$$\mathcal{D}_{\mathrm{dip}}(\bar{x}, \bar{t}) = \{x = \bar{x} - \lambda_p \bar{t},\ p = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Come nel caso scalare, le curve $x = x_0 + \lambda_p t$ che soddisfano l'equazione $x'(t) = \lambda_p$ sono delle rette chiamate *caratteristiche dalla p-esima famiglia* e il coefficiente $v_p(x,t) = v_p(x - \lambda_p t, 0)$ rimane costante sulla p-esima caratteristica. Si osservi che nel caso di sistema *strettamente iperbolico*, i.e. ad autovalori distinti, la soluzione finale dipende dai valori iniziali "trasportati" lungo m caratteristiche distinte che passano tutte per il punto (x,t).

2 Sistemi iperbolici non lineari

Nel caso non lineare si ha:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0, \tag{2.2}$$

dove $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ è il vettore delle incognite e $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ è il flusso del vettore delle incognite e dipende da esso. Il sistema conservativo non lineare (2.2) è riscrivibile nella forma *quasi lineare*

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{J}(\mathbf{u})\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0,$$

dove

$$\boldsymbol{J}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \qquad \Rightarrow \qquad (\boldsymbol{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}.$$

Il sistema iniziale (2.2) è detto *iperbolico* se la matrice matrice Jacobiana $\boldsymbol{J}(\mathbf{u})$ ha m autovalori reali per ogni $\mathbf{u}$, o quantomeno nel range di interesse; si dice *strettamente iperbolico* se gli autovalori sono tutti distinti.

Anche nel caso non lineare, se $\lambda_p(\mathbf{u}, t)$ è il p-esimo autovalore della matrice Jacobiana valutata in $\mathbf{u}$, si possono definire *curve caratteristiche* le soluzioni di p problemi del tipo

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda_p(\mathbf{u}(x(t)), t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad p = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.3}$$

per qualche x_0, ma si osservi che ora gli autovalori dipendono dalla soluzione stessa e variano al variare di essa. Pertanto, non è più possibile determinare dapprima le linee caratteristiche e poi risolvere lungo di esse un sistema di ODEs, ma si ottiene un sistema accoppiato più complesso per il quale questo approccio perde di efficacia. Tuttavia, **localmente**, le linee caratteristiche portano dell'informazione che può essere usata nell'intorno di una certa soluzione. Infatti, nell'ipotesi di linearizzare il sistema nell'intorno di una soluzione $\bar{\mathbf{u}}$, tutte le osservazioni fatte e le conclusioni ottenute nel caso lineare sono applicabili **localmente** al caso non lineare sostituendo la matrice $\boldsymbol{A}$ con la matrice Jacobiana linearizzata $\boldsymbol{J}(\bar{\mathbf{u}})$. Così facendo il problema (2.3) diventa

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda_p(\bar{\mathbf{u}}(x(t)), t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad p = 1, 2, \ldots, m,$$

che ha come soluzione le rette

$$x_p(t) = x_0 + \lambda_p(\bar{\mathbf{u}})t, \qquad p = 1, 2, \ldots, m.$$

2.1 Genuina non linearità, degenerazione lineare e discontinuità di contatto

Il p-esimo campo caratteristico associato all'autovalore $\lambda_p(\mathbf{u})$ è detto *genuinamente non lineare* se, per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, si ha

$$\nabla\lambda_p(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_p(\mathbf{u}) \neq 0,$$

dove il simbolo '$\cdot$' indica il prodotto scalare tra vettori e $\nabla\lambda_p(\mathbf{u})$ è il gradiente dell'autovalore valutato in $\mathbf{u}$,

$$\nabla\lambda_p(\mathbf{u}) = \left[\frac{\partial\lambda_p}{\partial u_1}(\mathbf{u}), \frac{\partial\lambda_p}{\partial u_2}(\mathbf{u}), \ldots, \frac{\partial\lambda_p}{\partial u_m}(\mathbf{u})\right]^T.$$

Si osservi che nel caso scalare si ha $m = 1$, $\lambda_1(u) = f'(u)$, $\nabla\lambda_1(u) = f''(u)$ e $r_1(u) = 1$ per ogni $u \in \mathbb{R}$. Pertanto, la condizione di genuina non linearità richiede che sia $f''(u) \neq 0$ per ogni u, ovvero che il flusso f sia una funzione convessa (i.e. con derivata seconda non nulla). In altre parole, questo assicura che $f'(u) = \lambda_1(u)$, che è la velocità delle linee caratteristiche nel piano x-t, sia sempre crescente o decrescente al variare di u.

Nel caso generale del sistema (2.2), la condizione di genuina non linearità implica che $\lambda_p(\mathbf{u})$ sia monotonicamente crescente o decrescente al variare di $\mathbf{u}$ lungo la curva integrale del campo $\mathbf{r}_p(\mathbf{u})$, dove con *curva integrale per* $\mathbf{r}_p(\mathbf{u})$ si intende una curva tangente in ogni suo punto $\mathbf{u}$ al vettore $\mathbf{r}_p(\mathbf{u})$.

Il p-esimo campo di caratteristiche associato all'autovalore $\lambda_p(\mathbf{u})$ è detto *linearmente degenere* se, per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, si ha

$$\nabla \lambda_p(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_p(\mathbf{u}) \equiv 0,$$

ovvero se l'autovalore $\lambda_p(\mathbf{u})$ è costante lungo le linee integrali per $\mathbf{r}_p(\mathbf{u})$. Ovviamente, il valore di $\lambda_p(\mathbf{u})$ può essere diverso su due linee integrali diverse. Si osservi che nel caso lineare tutti gli autovalori sono costanti per cui ciascun campo caratteristico associato all'autovalore λ_p è certamente linearmente degenere.

Una discontinuità che si propaghi all'interno di un campo linearmente degenere prende il nome di *discontinuità di contatto*. Se il p-esimo campo caratteristico è linearmente degenere e in esso si propaga una soluzione discontinua del tipo $\mathbf{u}_l$ a sinistra e $\mathbf{u}_r$ a destra, si può dimostrare che

$$\lambda_p(\mathbf{u}_l) = \lambda_p(\mathbf{u}_r) = S_p,$$

dove S_p è la velocità di propagazione della discontinuità associata all'autovalore linearmente degenere. Di conseguenza, le linee caratteristiche sono tutte rette parallele tra di loro da entrambi i lati della discontinuità e si propagano proprio a quella velocità, esattemente come nel caso lineare dell'equazione del trasporto.