Dinamica dei Fluidi
Lezione 11 – a.a. 2009-2010

Simone Zuccher

28 Maggio 2010

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Equazioni iperboliche

Un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali lineari e a coefficienti costanti del tipo

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{b} = 0,$$

dove $\mathbf{u}$ è il vettore delle incognite e $\boldsymbol{A}$ e $\mathbf{b}$ sono costanti, è detto *iperbolico* se la matrice $\boldsymbol{A}$ ha m autovalori reali. Si dice *strettamente iperbolico* se gli autovalori sono tutti distinti.

Nel caso più generale, le leggi di conservazione tipiche della fluidodinamica possono essere scritte in *forma conservativa*:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

dove $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ è il flusso delle variabili che, in generale, dipende da esse. Per esempio, nel caso delle equazioni di Eulero, si ha

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E+p) \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E+p) \end{pmatrix}.$$

Il sistema conservativo non lineare (1.1) è detto *iperbolico* se la matrice matrice Jacobiana

$$\boldsymbol{J}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \qquad \Rightarrow \qquad (\boldsymbol{J})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}$$

ha m autovalori reali per ogni $\mathbf{u}$, o quantomeno nel range di interesse; si dice *strettamente iperbolico* se gli autovalori sono tutti distinti.

1.1 Il caso scalare lineare a coefficienti costanti (trasporto)

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + a u_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{1.2}$$

costituito da un'equazione iperbolica scalare, lineare, a coefficienti costanti e da una condizione iniziale. Si verifica immediatamente che esso ammette la soluzione

$$u(x,t) = u_0(x - at), \quad t \geq 0,$$

che, al passare del tempo, è una traslazione del dato iniziale verso destra nel piano x-t se $a > 0$ o verso sinistra se $a < 0$. In ogni caso, si osserva che la soluzione rimane costante lungo le rette $x - at = x_0$, che soddisfano il problema differenziale ordinario

$$\begin{cases} x'(t) = a \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Pensando a $u(x,t) = u(x(t),t) = u(t)$ e differenziando rispetto all'unica variabile indipendente t si ha

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u(x(t),t)\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(u(x(t),t)\right) + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u(x(t),t)\right)\right] x'(t) \\ &= u_t + a u_x \\ &= 0, \end{aligned}$$

che conferma che u è costante lungo la linea che soddisfa il problema (1.3). Queste linee sono dette *caratteristiche* o *linee caratteristiche* e sono definite come quelle linee nel piano x-t tali per cui su di esse la PDE diventa una ODE.

Siccome la soluzione al tempo t è semplicemente quella iniziale traslata a destra o sinistra di at, allora $u(\bar{x},\bar{t})$ dipende dal solo punto $\bar{x}_0$ che al tempo $t = 0$ giaceva sulla caratteristica passante per $(\bar{x},\bar{t})$. In altre parole, il *dominio di dipendenza* della soluzione è semplicemente

$$\mathcal{D}_{\text{dip}}(\bar{x},\bar{t}) = \{x_0\}.$$

Oltre al dominio di dipendenza c'è anche una regione di influenza

$$\mathcal{D}_{\text{inf}}(\bar{x},\bar{t}) \subset \{x : |x - \bar{x}| \leq a_{\max}\bar{t}\},$$

definita per qualche valore $a_{\max}$ (cono di influenza).

1.1.1 Il Problema di Riemann (lineare)

Per problema di Riemann si intende il problema di Cauchy (1.2) con dato iniziale discontinuo:

$$\begin{cases} u_t + a u_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_l & \text{se} \quad x < 0 \\ u_r & \text{se} \quad x > 0. \end{cases} \end{cases} \tag{1.4}$$

La condizione iniziale è un gradino con discontinuità di prima specie nell'origine. Tale singolarità si propaga alla velocità a e viene mantenuta dalla soluzione al tempo t che è semplicemente

$$u(x,t) = u_0(x-at) = \begin{cases} u_l & \text{se} \quad x-at<0 \\ u_r & \text{se} \quad x-at>0. \end{cases}$$

Esercizio 1.5 *Risolvere numericamente il problema (1.2) utilizzando uno dei metodi visti in nel corso di "Metodi Numerici per le Equazioni Differenziali" (upwind, Lax-Wendroff, ecc.) scegliendo $u_0(x)$ continua e derivabile (per esempio una gaussiana) e variando a (positiva o negativa).*

Esercizio 1.6 *Risolvere numericamente il problema (1.4) utilizzando uno dei metodi conosciuti (upwind, Lax-Wendroff, ecc.) variando a (positiva o negativa) e scegliendo $u_0(x)$ così definita*

$$u_0(x) = \begin{cases} 1.2 & se \quad x<0 \\ 0.4 & se \quad x>0. \end{cases}$$

Se si utilizza un metodo conservativo, si ottengono risultati più o meno corretti? Quali conclusioni si possono trarre sulla dipendenza del metodo numerico da eventuali discontinuità del dato iniziale? Come sono spiegabili numericamente?

1.2 Il caso scalare non lineare

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + [f(u)]_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1.7}$$

costituito da un'equazione iperbolica scalare non lineare e da una condizione iniziale. Questo problema può in qualche modo essere ricondotto a quello del trasporto riscrivendo l'equazione come

$$u_t + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} u_x = 0$$

e notando che ora la velocità di propagazione della soluzione non è più costante ma varia con la soluzione u in quanto

$$a(u) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}(u).$$

Un caso particolare è l'equazione di Burgers,

$$u_t + uu_x = 0, \tag{1.8}$$

per la quale si ha $f(u) = \frac{1}{2}u^2$. Ipotizzando un dato iniziale continuo, si osserva che lungo le linee (caratteristiche) ottenute risolvendo il problema

$$\begin{cases} x'(t) = u(x(t),t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.9}$$

la soluzione u è costante. Infatti:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(x(t),t)) &= \frac{\partial}{\partial t}(u(x(t),t)) + \left[\frac{\partial}{\partial x}(u(x(t),t))\right]x'(t)\\ &= u_t + uu_x\\ &= 0.\end{aligned}$$

Inoltre, siccome u è costante lungo le caratteristiche, anche $x'(t) = u(x(t),t)$ è costante lungo tali linee che risultano, quindi, delle rette aventi pendenza determinata unicamente dal dato iniziale. A causa di questo fatto e dipendentemente dalla forma di u_0, prima o poi le linee caratteristiche si intersecano nel piano x-t, ovvero la soluzione perde di significato dal punto di vista fisico in quanto il metodo delle caratteristiche porterebbe ad una soluzione a più valori. Si veda l'applet interattiva `http://www.scottsarra.org/shock/shockApplet.html` per il caso dell'equazione di Burgers con dato iniziale smooth.

La soluzione corretta dal punto di vista fisico può essere ottenuta introducendo una viscosità artificiale ϵ e risolvendo il problema "viscoso" nel limite $\epsilon \longrightarrow 0$:

$$u_t + uu_x = \epsilon u_{xx}, \qquad \epsilon \longrightarrow 0. \tag{1.10}$$

Questa soluzione "viscosa", nel limite $\epsilon \longrightarrow 0$, diventa una soluzione accettabile ad un sol valore che si caratterizza per la generazione di un fronte che diventa sempre più verticale man mano che passa il tempo. Se si calcola l'area compresa tra questa soluzione e l'asse x e la si confronta con quella a più valori ottenuta con il metodo delle caratteristiche, si osserva che l'area viene mantenuta.

Esercizio 1.11 *Risolvere con il metodo delle caratteristiche l'equazione di Burgers (1.8) con dato iniziale u_0 smooth (per esempio una gaussiana) fino at un certo tempo $t = \bar{t}$ al quale si osserva una soluzione a più valori (non fisica). Quindi si risolva lo stesso problema numericamente (con un metodo conservativo), ottenendo una soluzione ad un sol valore. Infine, si mostri che l'area racchiusa tra l'asse x e la curva viene conservata, ovvero è la stessa per entrambi i metodi.*

1.2.1 Il Problema di Riemann (non lineare)

Il problema di Riemann consiste nel risolvere il problema di Cauchy (1.7) non lineare con dato iniziale discontinuo,

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_l & \text{se} \quad x < 0 \\ u_r & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

Si possono verificare due casi, $u_l > u_r$ oppure $u_l < u_r$.

Onda d'urto, $u_l > u_r > 0$.
Procedendo con il metodo della caratteristiche, si osserva che se $u_l > u_r > 0$ le linee caratteristiche sono rette con coefficiente angolare positivo che si intersecano per ogni $t > 0$ e, quindi, la soluzione perde di significato fin da subito essendo a più valori. Tuttavia,

con riferimento al caso di dato iniziale continuo (si veda l'esercizio 1.11 e il commento all'equazione (1.10)), osserviamo che la soluzione "viscosa" nel limite $\epsilon \to 0$ diventa una soluzione accettabile ad un sol valore caratterizzata da una specie di fronte verticale che garantisce comunque la conservazione dell'area. Dal punto di vista fisico questo significa che esiste una regione molto "sottile" attraverso la quale la soluzione u subisce un forte gradiente, assimilabile ad una discontinuità, detta *onda d'urto*, ma attraverso questa regione vengono conservate delle grandezze integrali. Pertanto, è possibile trovare una soluzione cosiddetta *in forma debole* che soddisfa l'equazione non in forma differenziale (il dato iniziale ha derivata infinita in $x = 0$), ma in forma integrale. Se indichiamo con x_l una posizione a sinistra di tale onda d'urto, con x_r una posizione a destra e con $s(t)$ la posizione dell'onda d'urto al variare del tempo, integriamo l'equazione $u_t + [f(u)]_x = 0$ tra x_l e x_r ottenendo

$$\int_{x_l}^{x_r} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\, \mathrm{d}x + \int_{x_l}^{x_r} \frac{\partial f(u(x,t))}{\partial x}\, \mathrm{d}x = 0$$

da cui, portando fuori la derivata rispetto al tempo ed integrando la derivata del flusso, si ha

$$\begin{aligned} f(u(x_l,t)) - f(u(x_r,t)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{x_l}^{x_r} u(x,t)\, \mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{x_l}^{s(t)} u(x,t)\, \mathrm{d}x\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{s(t)}^{x_r} u(x,t)\, \mathrm{d}x\right) \\ &= u(s_l,t)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \int_{x_l}^{s(t)} u_t(x,t)\, \mathrm{d}x - u(s_r,t)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \int_{s(t)}^{x_r} u_t(x,t)\, \mathrm{d}x \\ &= [u(s_l,t) - u(s_r,t)]\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \int_{x_l}^{s(t)} u_t(x,t)\, \mathrm{d}x + \int_{s(t)}^{x_r} u_t(x,t)\, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

dove $u(s_l,t)$ e $u(s_r,t)$ indicano rispettivamente il limite di $u(s(t),t)$ per $x \to s(t)$ da sinistra e da destra. Se prendiamo i limiti per $x_l \to s(t)$ da sinistra e $x_r \to s(t)$ da destra, sotto l'ipotesi di u_t limitata, gli integrali si annullano e si arriva a

$$f(u(s_l,t)) - f(u(s_r,t)) = [u(s_l,t) - u(s_r,t)]\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

da cui la relazione

$$S = \frac{\Delta f}{\Delta u}, \tag{1.12}$$

detta *condizione di Rankine-Hugoniot*, dove $S = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ è la velocità di propagazione dell'onda d'urto data dal rapporto tra il salto del flusso e il salto della soluzione.

Nel caso particolare dell'equazione di Burgers, $f = \frac{1}{2}u^2$ per cui

$$S = \frac{\frac{1}{2}u_l^2 - \frac{1}{2}u_r^2}{u_l - u_r} = \frac{1}{2}\frac{(u_l - u_r)(u_l + u_r)}{u_l - u_r} = \frac{1}{2}(u_l + u_r),$$

ovvero la velocità di propagazione dell'onda d'urto è la media aritmetica delle due velocità iniziali che definiscono il problema di Riemann e la soluzione è semplicemente

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & \text{se} \quad x - St < 0 \\ u_r & \text{se} \quad x - St > 0. \end{cases}$$

In pratica, nel piano x-t le linee caratteristiche hanno tutte pendenza positiva e convergono sulla retta $x = St$.

Esercizio 1.13 *Risolvere numericamente il problema di Riemann non lineare con* $u_l = 1.2$ *e* $u_r = 0.4$ *confrontando tra loro un metodo non conservativo, uno conservativo e la soluzione esatta.*

Onda di rarefazione, $0 < u_l < u_r$.
Procedendo con il metodo della caratteristiche, si osserva che se $0 < u_l < u_r$ le linee caratteristiche sono rette con coefficiente angolare positivo che non si intersecano mai in quanto divergono. Tuttavia, per il problema di Riemann, rimane una regione limitata da due caratteristiche spiccate dall'origine (testa e coda) che non è mai attraversata da nessuna linea caratteristica. Questo significherebbe che lì la soluzione non si propaga o che si può propagare in infiniti modi diversi. In realtà le soluzioni in forma debole sono infinite. Ci soffermiamo su due:

1. quella che prevede una caratteristica con equazione $x = St$ spiccata dall'origine e tale per cui tutte le caratteristiche della "regione anomala" si originano da essa,

2. quella che prevede un ventaglio di rette caratteristiche tutte spiccate dall'origine e la cui pendenza varia con continuità tra la testa e la coda del ventaglio.

Si osserva che la prima soluzione mantiene la forma della condizione iniziale ma è instabile, ovvero basta una piccolissima variazione dovuta o al metodo numerico o all'aggiunta di una viscosità artificiale per provocare una soluzione radicalmente diversa da quella iniziale. Al contrario, il ventaglio di espansione assicura la stabilità della soluzione in forma debole, che è

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & \text{se} \quad x < u_l t \\ x/t & \text{se} \quad u_l t < x < u_r t \\ u_r & \text{se} \quad x > u_r t. \end{cases}$$

Esercizio 1.14 *Risolvere numericamente il problema di Riemann non lineare con* $u_l = 0.4$ *e* $u_r = 1.2$ *confrontando tra loro un metodo non conservativo, uno conservativo e la soluzione esatta.*