

Dinamica dei Fluidi

Lezione 10 – a.a. 2009-2010

Simone Zuccher

26 Maggio 2010

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Modelli per la chiusura delle equazioni mediate di Reynolds

Ripartendo dall'ipotesi di Boussinesq

$$\overline{\rho u_i u_j} = -\rho \nu_T \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.1)$$

il tensore degli sforzi totali si riscrive semplicemente come

$$\tau_{ij} = \rho(\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right),$$

dove il coefficiente ν_T ha le dimensioni di una viscosità cinematica e prende il nome di *viscosità turbolenta* o *eddy viscosity*. Si osservi che le equazioni così ottenute differiscono da quelle usuali per il solo fatto che i termini viscosi sono espressi come somma dei consueti termini dipendenti dalla viscosità molecolare del fluido (proprietà fisica ben definita e qui assunta costante ed uniforme) e di termini dipendenti dalla viscosità turbolenta, che è, al contrario, funzione della posizione e dell'atto di moto, e che pertanto deve essere mantenuta all'interno degli operatori di derivata spaziale. Il problema della chiusura è stato notevolmente semplificato anche se non risolto completamente in quanto rimane da assegnare la costante ν_T . Per questo motivo modelli che fanno intervenire la viscosità turbolenta sono molto usati in ingegneria anche se hanno almeno due limiti piuttosto evidenti legati a

1. **scale:** nel caso della diffusione molecolare c'è una separazione netta fra le scale su cui avvengono i fenomeni di diffusione, dell'ordine del libero cammino medio delle molecole, e quelle della corrente media. Nel caso della turbolenza, invece, questa separazione di scale non esiste perché il fenomeno della cascata di energia le mette

in gioco tutte, a partire da quelle più grandi fino a quelle dissipative, passando per le scale inerziali. Questo fatto causa tempi caratteristici della turbolenza decisamente inferiori a quelli della corrente media, e questo si traduce in un effetto “memoria” causato dagli elevati tempi di adattamento delle strutture turbolente alle condizioni esterne (tali effetti non sono presenti nel caso laminare per il quale i tempi di adattamento a livello molecolare sono estremamente rapidi). Inoltre, siccome la diffusione turbolenta avviene su più scale, essa non è certamente locale e per questo non è descrivibile da equazioni differenziali che contengano come variabile la sola velocità media.

2. **isotropia:** nel caso di un corrente laminare il legame fra gli sforzi e la velocità di deformazione è isotropo. Ammesso che vi sia un legame di questo tipo nel caso degli sforzi turbolenti, non ci sono motivi perché esso sia isotropo, se non in casi molto particolari.

Come detto il problema della chiusura è definitivamente risolto solo quando si fornisce un modo per determinare il coefficiente ν_T . Nel seguito sono riportati tre approcci, di vario ordine a seconda del numero di equazioni differenziali alle derivate parziali (di evoluzione) che vengono risolte per la determinazione di ν_T .

1.1 Modello di ordine 0 per ν_T : *mixing length*

Questo modello non utilizza nessuna equazione differenziale ulteriore, risulta particolarmente semplice da implementare, è uno dei primi ad essere stato utilizzato, e funziona solo in contesti molto particolari. Concentriamoci su uno strato di corrente turbolenta in prossimità di una parete, come riportato in figura 1 (per esempio lo strato limite turbolento su una lamina piana). A causa della presenza della parete, il profilo medio

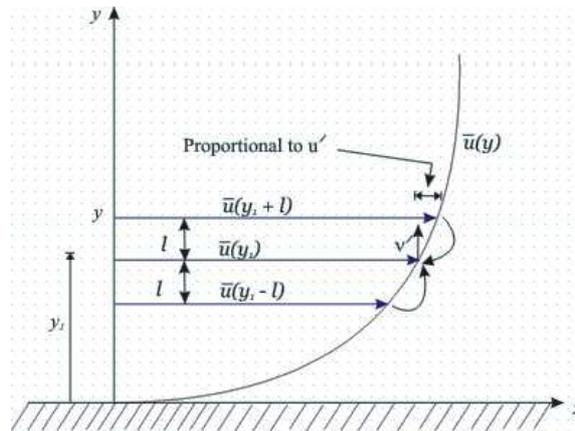


Figura 1: Schematizzazione della *mixing length*.

della componente di velocità nella direzione della corrente è una sola funzione della sola distanza dalla parete y ,

$$\bar{U} = \bar{U}(y).$$

Consideriamo un “elemento di fluido” che si trovi ad una distanza $y_1 + \ell_m$ dalla parete dove la velocità è $U(y_1 + \ell_m)$. Se esso si sposta verso il basso arrivando ad una distanza y_1 dalla parete, dove la velocità $\bar{U}(y_1)$ è minore rispetto a $\bar{U}(y_1 + \ell_m)$, porterà con sé maggior quantità di moto provocando, per questo, una fluttazione di velocità positiva e dell'ordine di

$$\Delta\bar{U}_+(y_1) = \bar{U}(y_1 + \ell_m) - \bar{U}(y_1) \approx \ell_m \left. \frac{d\bar{U}}{dy} \right|_{y_1}.$$

Viceversa, un elemento di fluido che si trovi inizialmente ad una distanza $y_1 - \ell_m$ dalla parete dove la velocità è $U(y_1 - \ell_m)$, quando si sposta verso l'alto arrivando ad una distanza y_1 dalla parete, dove la velocità $\bar{U}(y_1)$ è maggiore rispetto a $\bar{U}(y_1 - \ell_m)$, porterà con sé minor quantità di moto provocando, per questo, una fluttazione di velocità negativa e dell'ordine di

$$\Delta\bar{U}_-(y_1) = \bar{U}(y_1) - \bar{U}(y_1 - \ell_m) \approx \ell_m \left. \frac{d\bar{U}}{dy} \right|_{y_1}.$$

Pertanto, possiamo stimare che la fluttuazione di velocità nella direzione della corrente sia una media delle due e sia dell'ordine di

$$\bar{u} \approx \frac{\Delta\bar{U}_+(y_1) + \Delta\bar{U}_-(y_1)}{2} = \ell_m \left. \frac{d\bar{U}}{dy} \right|_{y_1}.$$

Si osservi che ℓ_m è la distanza che, statisticamente, un elementino di fluido continuo percorre prima di interagire con altri elementi di fluido, cui Prandtl diede il nome di *lunghezza di mescolamento* o *mixing length*. Paragonando la diffusione turbolenta a quella molecolare, ℓ_m è più o meno l'equivalente del libero cammino medio (distanza che devono percorrere le molecole per interagire tra di loro). Se assumiamo che anche la fluttuazione turbolenta in direzione normale alla parete sia dello stesso ordine di grandezza, possiamo dire che

$$\bar{v} \approx \bar{u} \approx \ell_m \frac{d\bar{U}}{dy},$$

da cui

$$\overline{uv} \approx \ell_m^2 \left(\frac{d\bar{U}}{dy} \right)^2.$$

Per risalire al segno del prodotto \overline{uv} nel caso in cui $d\bar{U}/dy > 0$ (caso in figura 1), si osservi che quando $v > 0$ (l'elemento di fluido sale da $y_1 - \ell_m$ a y_1) si ha $u < 0$, mentre quando $v < 0$ (l'elemento di fluido scende da $y_1 + \ell_m$ a y_1) si ha $u > 0$. Pertanto, se $d\bar{U}/dy > 0$ le fluttuazioni u e v sono mediamente di segno opposto per cui la media del loro prodotto avrà segno negativo; al contrario se $d\bar{U}/dy < 0$ le fluttuazioni u e v sono mediamente dello stesso segno per cui la media del loro prodotto è positiva. Tenuto conto di queste considerazioni, possiamo scrivere

$$\overline{uv} = -\ell_m^2 \left| \frac{d\bar{U}}{dy} \right| \frac{d\bar{U}}{dy},$$

ma essendo

$$\rho \overline{uv} = -\rho \nu_T \frac{d\bar{U}}{dy},$$

si ha

$$\nu_T = \ell_m^2 \left| \frac{d\bar{U}}{dy} \right|.$$

Si osservi che la viscosità turbolenta così ottenuta è positiva, che è consistente con il fatto che debba provocare diffusione, ma è ancora incognita in quanto non è stata definita la lunghezza di mescolamento ℓ_m . In realtà essa varia da geometria a geometria, ma una scelta ragionevole di ℓ_m fu proposta proprio da Prandtl come proporzionale alla distanza dalla parete più vicina:

$$\ell_m = ky, \quad k = 0.41 \quad (\text{costante di von Kármán}).$$

In conclusione,

$$\nu_T = k^2 y^2 \left| \frac{d\bar{U}}{dy} \right|, \quad k = 0.41.$$

Il limite principale di questo modello di turbolenza consiste nel fatto di essere stato costruito esplicitamente per il flusso in prossimità di una parete. Inoltre, non è applicabile a correnti con ricircolazione, non tiene conto dei processi di convezione e diffusione della turbolenza, e non è in grado di trattare problemi di convezione termica turbolenta. Il fatto di non prevedere una diffusione turbolenta si osserva laddove $\nu_T = 0$ a causa del fatto che la derivata $d\bar{U}/dy = 0$. Questo succede, tipicamente per motivi di simmetria, al centro di un getto, di un tubo assialsimmetrico o di un canale piano. Contrariamente a quanto previsto dal modello, i dati sperimentali dimostrano la presenza di diffusione turbolenta non trascurabile sull'asse di simmetria. Per ovviare a queste debolezze, esistono numerose variazioni della teoria originale di Prandtl, ciascuna delle quali porta a definizioni della lunghezza di mescolamento più adatte, di volta in volta.

1.2 Modello di ordine 1 per ν_T : K

Per superare alcuni dei limiti dei modelli algebrici di viscosità turbolenta, sono stati sviluppati i modelli differenziali che, in generale, prevedono la scrittura e l'integrazione di una o più equazioni differenziali che descrivono direttamente la dinamica del tensore degli sforzi di Reynolds, oppure la dinamica di una o più grandezze scalari correlate con la viscosità cinematica turbolenta introdotta da Boussinesq. Il vantaggio è che le equazioni differenziali di trasporto per queste grandezze consentono, in ogni caso, di valutare la viscosità turbolenta tenendo conto della *effettiva storia della corrente*.

Il *modello K* utilizza un'equazione differenziale per l'evoluzione dell'energia cinetica turbolenta media

$$\bar{K} = \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2),$$

ottenuta la quale la viscosità turbolenta è modellata dall'espressione

$$\nu_T = c \ell_m \sqrt{\bar{K}},$$

dove ℓ_m è la lunghezza di mescolamento e $c = 0.55$ fornisce risultati corretti nella regione logaritmica dello strato limite turbolento. La lunghezza di mescolamento ℓ_m si ottiene da

“ricette” che variano da caso a caso e che per correnti in presenza di parete prevedono certamente un legame con la distanza dalla parete stessa. L’equazione di evoluzione dell’energia cinetica turbolenta media \overline{K} si ottiene dalle equazioni della quantità di moto. Partendo dalle equazioni della quantità di moto per ciascuna componente nella forma

$$\frac{\partial(\overline{U}_i + u_i)}{\partial t} + (\overline{U}_j + u_j) \frac{\partial(\overline{U}_i + u_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\overline{P} + p)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(\overline{U}_i + u_i)}{\partial x_j^2}$$

ed espandendole come

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \overline{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_j^2} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2},$$

dopo aver osservato che, grazie all’equazione di continuità,

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} = 0,$$

moltiplichiamo ciascun termine per u_i e prendiamo la media:

$$\overline{u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{u_i \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}} + \overline{u_i \overline{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{u_i u_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}} + \overline{u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \overline{u_i \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i}} - \frac{1}{\rho} \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \nu \overline{u_i \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_j^2}} + \nu \overline{u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}}.$$

Analizzando i termini uno ad uno si ha:

$$\overline{u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u_i^2 \right)} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i^2} \right)$$

$$\overline{u_i \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}} = 0$$

$$\overline{u_i \bar{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{\bar{U}_j u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{\bar{U}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} u_i^2 \right)} = \bar{U}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i^2} \right)$$

$$\overline{u_i u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}} = \overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}$$

$$\overline{u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} u_i^2 \right)} = \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} u_i^2 u_j \right)} - \frac{1}{2} \overline{u_i^2 \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_j} \right)$$

$$-\frac{1}{\rho} \overline{u_i \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}} = 0$$

$$-\frac{1}{\rho} \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} = -\frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial p u_i}{\partial x_i}} - \frac{1}{\rho} \overline{p \frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = -\frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial p u_i}{\partial x_i}}$$

$$\overline{\nu u_i \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2}} = 0$$

$$\overline{\nu u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}} = \overline{\nu u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} = \nu \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} - \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i^2} \right) \right) - \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

In definitiva, l'equazione iniziale, valida per $i = 1, 2, 3$, si riduce a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i^2} \right) + \bar{U}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i^2} \right) + \overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_j} \right) = -\frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial p u_i}{\partial x_i}} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i^2} \right) \right) - \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

Sommando tutte e tre queste equazioni, ovvero esauendo le sommatorie su gli indici i , spostando tutti i termini dal terzo in poi a secondo membro, e raggruppando le derivate parziali rispetto a x_j , si ottiene

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_j}}_{\text{variazione totale di } \bar{K}} = \underbrace{-\overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}}_{\text{produzione di } \bar{K}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_j} - \frac{1}{\rho} \overline{p u_i} + \nu \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_j} \right)}_{\text{diffusione di } \bar{K}} - \underbrace{\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}}_{\text{dissipazione di } \bar{K}}, \quad (1.2)$$

che può essere riscritta come

$$\frac{D\bar{K}}{Dt} = \mathcal{P} + \mathcal{D} - \epsilon.$$

Evidentemente, tutti i termini di destra devono essere *modellati* in quanto sono medie di prodotti di grandezze fluttuanti. Si osservi che, in base all'ipotesi di Boussinesq (1.1), il termine di produzione diventa semplicemente

$$-\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} = \nu_T \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) = \nu_T \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \right)^2 + \nu_T \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}.$$

Il termine di diffusione non legato a \overline{K} si modella drasticamente come

$$-\frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_j} - \frac{1}{\rho} \overline{p u_i} = \frac{\nu_T}{\sigma_K} \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_j},$$

con $\sigma_K \approx 1$, ottenendo come diffusione semplicemente

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_j} - \frac{1}{\rho} \overline{p u_i} + \nu \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\nu_T}{\sigma_K} + \nu \right) \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_j} \right),$$

mentre il termine di dissipazione viene modellato altrettanto drasticamente come

$$\epsilon = \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = C_D \frac{\overline{K}^{3/2}}{\ell_m},$$

dove ℓ_m è la lunghezza di mescolamento e C_D è un parametro che devono essere ulteriormente specificati in quanto entrambi dipendenti dal tipo di corrente in esame. In conclusione, il modello si scrive

$$\frac{D\overline{K}}{Dt} = \nu_T \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \right)^2 + \nu_T \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\nu_T}{\sigma_K} + \nu \right) \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_j} \right) - C_D \frac{\overline{K}^{3/2}}{\ell_m}.$$

I limiti più evidenti di questo modello sono lo scarso fondamento teorico e la mancanza di validità generale. Questo si traduce nella necessità di tarare in modo diverso i coefficienti nelle equazioni a seconda del problema affrontato, al fine di ottenere risultati di qualità accettabile. Un altro limite consiste nel fatto che, per correnti in geometrie complesse, non è facile individuare la lunghezza di mescolamento corretta, ammesso che ne esista una. Per questo motivo il modello di turbolenza K ad una sola equazione trova applicazione esclusivamente per correnti in geometria relativamente semplice, ed è poco utilizzato in campo ingegneristico.

1.3 Modello di ordine 2 per ν_T : K - ϵ

Come visto, uno dei limiti del modello ad una sola equazione differenziale è che la lunghezza di mescolamento è prescritta con una ricetta *ad hoc* che cambia caso per caso. L'obiettivo di un modello a due equazioni differenziali è di prescrivere una seconda equazione di evoluzione per una grandezza tipica del moto legandola all'evoluzione del moto medio. In pratica si tratta di definire una qualsiasi variabile della forma

$$\overline{K}^\alpha \ell_m^\beta$$

e di scriverne l'equazione di trasporto/diffusione partendo dalle equazioni di Navier-Stokes a manipolandole come visto per ricavare l'equazione differenziale per \overline{K} . Tra le possibili scelte di $\overline{K}^\alpha \ell_m^\beta$, le più comuni sono $\overline{K} \ell_m$, $\sqrt{\overline{K}} \ell_m$ (frequenza turbolenta), $\overline{K} \ell_m^2$ (vorticità turbolenta), $\overline{K}^{3/2} / \ell_m$ (velocità di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta specifica). La scelta più comune in assoluto è sicuramente l'ultima, per la quale si pone

$$\overline{\epsilon} = \frac{\overline{K}^{3/2}}{\ell_m},$$

che, una volta note \overline{K} e $\overline{\epsilon}$ dalla risoluzione delle due equazioni differenziali, permette di determinare $\ell_m = \overline{K}^{3/2} / \overline{\epsilon}$. Inoltre, una volta note \overline{K} e $\overline{\epsilon}$, si osserva che, in base a considerazioni di tipo dimensionale, la viscosità turbolenta può essere espressa come

$$\nu_T = C_\mu \frac{\overline{K}^2}{\overline{\epsilon}}.$$

Un valore tipicamente usato per la costante è $C_\mu = 0.09$. L'equazione per $\overline{\epsilon}$ alla quale si perviene è

$$\frac{D\overline{\epsilon}}{Dt} = C_{\epsilon 1} \frac{\overline{\epsilon}}{\overline{K}} \nu_T \left[\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_j} \right) - C_{\epsilon 2} \frac{\overline{\epsilon}^2}{\overline{K}},$$

con valori tipici delle costanti

$$C_{\epsilon 1} = 1.44, \quad \sigma_\epsilon = 1.3, \quad C_{\epsilon 2} = 1.92.$$

Questo modello a due equazioni presenta il vantaggio che la viscosità turbolenta è calcolata sulla base di una velocità turbolenta e di una scala di lunghezze le cui distribuzioni spaziali non sono più assegnate a priori, ma sono entrambe calcolate con equazioni di trasporto che tengono conto della storia della corrente. Per questo, esso rimane il più usato a livello industriale nelle sue innumerevoli versioni estese o modificate. Tuttavia, il modello K - ϵ soffre delle limitazioni tipiche dei modelli a viscosità turbolenta: mancanza di un vero fondamento teorico, mancanza di universalità e impossibilità di riprodurre turbolenza non isotropa. Per cercare di superare questi limiti si sono sviluppati anche modelli che prevedono l'integrazione di un'equazione di trasporto per ciascuna delle componenti del tensore degli sforzi di Reynolds (ovviamente sempre in termini di variabili medie). Anche questi ultimi, peraltro, continuano a rimanere poco generali. Bisogna inoltre considerare che, all'aumentare del numero delle equazioni differenziali che va ad aggiungersi alle equazioni mediate di Reynolds, il lavoro di calibrazione dei vari parametri diventa sempre più complicato e l'impegno di calcolo rischia di diventare quasi confrontabile con quello richiesto da altri metodi più sofisticati come la Large Eddy Simulation.

2 LES: simulazione dei grandi vortici

Per quanto visto, la simulazione diretta della turbolenza è impensabile per problemi di interesse pratico, d'altra parte proprio per le geometrie di interesse pratico le equazioni mediate di Reynolds e i vari modelli di turbolenza proposti non sono certamente

affidabili in quanto i “coefficienti di taratura” cambiano da problema a problema. Un buon compromesso tra affidabilità del modello e tempo di calcolo può essere raggiunto richiamando quanto visto sulla distribuzione delle scale turbolente. Osserviamo che

- **le strutture turbolente di grande scala** hanno natura convettiva e numeri di Reynolds relativamente elevati (tanto che, per instabilità, sono in grado di produrre vortici di dimensioni più ridotte), hanno una scala temporale paragonabile a quella del moto medio, hanno origine e tipologia fortemente dipendenti dal moto medio, ovvero dal tipo e dalla geometria del dominio di moto (o, in altre parole, dal tipo di corrente), estraggono energia cinetica dal moto medio per produrre energia cinetica turbolenta, hanno forma e dimensione poco dipendenti dal numero di Reynolds della corrente media, e sono generalmente anisotrope;
- **le strutture turbolente di scala intermedia** sono generate dall’instabilità non lineare delle grandi strutture, sono anch’esse instabili, in quanto caratterizzate da numeri di Reynolds ancora relativamente elevati, hanno essenzialmente la funzione di trasferire ai vortici piccoli l’energia cinetica turbolenta prodotta, e ricevuta, da quelli grandi;
- **le strutture turbolente di piccola scala** nascono da interazioni non lineari fra quelli grandi e quelli intermedi, sono stabili in quanto caratterizzate da numeri di Reynolds bassi (dell’ordine dell’unità), hanno natura dissipativa e convertono in calore, attraverso la viscosità, l’energia cinetica turbolenta loro trasmessa dai vortici intermedi, hanno vita media molto più breve degli altri vortici e decadono con legge esponenziale, hanno tempi caratteristici molto brevi e di conseguenza una dinamica praticamente indipendente da quella dei grandi vortici e del moto medio, hanno dimensioni relative rispetto a quelle dei grandi vortici che dipendono quasi esclusivamente dal numero di Reynolds della corrente, hanno una struttura più universale (ovvero indipendente dal tipo di corrente) e relativamente isotropa.

Queste considerazioni portano a due conclusioni che sono le idee alla base dell’ *Large Eddy Simulation* (DNS):

1. i vortici grandi e medi devono essere necessariamente (e quindi vengono) risolti esplicitamente, come in una DNS,
2. soltanto i vortici piccoli si prestano ad essere (e quindi vengono) modellati.

In pratica, mentre con l’approccio delle equazioni mediate di Reynolds non si distingue fra strutture grandi e piccole, e si è costretti ad usare modelli che devono simulare gli effetti della totalità dello spettro delle dimensioni spaziali delle strutture turbolente che non possono essere universali perché dipendono dalla geometria, con la LES si può sperare, modellando i soli vortici piccoli (quelli grandi sono risolti direttamente) di puntare a modelli non eccessivamente complicati ma sufficientemente universale, dal momento che i vortici che richiedono la modellazione hanno per loro natura caratteristiche universali. Anche l’isotropia, implicita nel concetto dello scalare viscosità turbolenta, è più ragionevolmente ipotizzabile nel caso dei vortici di piccola scala.

Si ricordi che per ricavare le equazioni mediate di Reynolds si era assunto il campo di moto pari alla somma di una parte media ed una fluttuante e si era poi proceduto ad un *filtraggio temporale* ottenendo l'evoluzione delle grandezze medie modellando quelle fluttuanti tramite la grandezze medie stesse. Nella LES, invece, si applica un *filtraggio spaziale* risolvendo direttamente la parte media e modellando il resto sulla base di considerazioni molto generali basate sulle caratteristiche dei vortici di piccola scala. Ragionando in termini di numero d'onda k ($k = 2\pi/\lambda$, essendo λ la lunghezza d'onda) e trasformata di Fourier spaziale, i numeri d'onda minori di una certa soglia k_S corrispondono a scale spaziali grandi e sono risolti, mentre quelli superiori a k_S , che corrispondono a scale spaziali molto piccole, sono modellati. Chiaramente, k_S è legato al passo di discretizzazione spaziale Δ in quanto, per il teorema del campionamento di Nyquist-Shannon, solo le componenti di Fourier con numeri d'onda inferiori a π/Δ possono essere univocamente rappresentate. Procedendo al filtraggio spaziale (tramite l'operatore di convoluzione), si arriva alle equazioni di continuità

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0$$

e della quantità di moto

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j}.$$

Si osservi che, a differenza delle equazioni mediate di Reynolds (RANS), nella large eddy simulation (LES) la componente media non è stazionaria perché la media è nello spazio e non nel tempo. Allo stesso modo delle RANS, però, anche nella LES compare il termine

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j}$$

che chiameremo *sforzi filtrati*, o *sforzi sottogriglia specifici*, che rappresentano l'effetto delle componenti di Fourier di piccola scala ($k > k_S$) sulla velocità (media) filtrata. Come per le RANS, anche qui occorre modellare gli sforzi filtrati in termini della velocità filtrata attraverso qualche modello che faccia intervenire le caratteristiche del filtro, in particolare k_S o Δ , e che sia il più universale possibile. Si noti che la presenza di Δ elimina il problema di una lunghezza di riferimento che, nel caso dei modelli di chiusura per le RANS, era legata alla distanza dalla parete. I modelli degli sforzi sottogriglia più usati sono di tipo algebrico, ovvero non comportano l'introduzione di equazioni differenziali per descriverne la loro evoluzione, e si riconducono essenzialmente al *modello di Smagorinski*. Siccome l'energia cinetica nel moto turbolento viene trasferita dai vortici più grandi a quelli più piccoli: l'effetto degli sforzi sottogriglia, in termini energetici, deve essere (mediamente) quello di sottrarre alla parte risolta della corrente quell'energia cinetica che i vortici più piccoli, in quanto filtrati, non sono in grado di dissipare. In questo senso, un modello a viscosità turbolenta, che è intrinsecamente dissipativo, garantisce a priori che il flusso medio di energia avvenga nel verso corretto. Se indichiamo il tensore dei gradienti della velocità filtrata con

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right),$$

in modo tale che l'ipotesi alla Boussinesq (1.1) permetta di riscrivere il tensore degli sforzi totali (viscosi + filtrati) semplicemente come

$$\tau_{ij} = 2\rho(\nu + \nu_T)\bar{S}_{ij} = \rho(\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right),$$

in base all'analisi dimensionale si deduce che, affinché la viscosità turbolenta sia esprimibile tramite Δ e le derivate spaziali della velocità filtrata \bar{S}_{ij} , deve essere

$$\nu_T = (C_S \Delta)^2 |\bar{S}|,$$

essendo $|\bar{S}|$ e Δ rispettivamente il modulo del tensore \bar{S}_{ij} e il passo di discretizzazione spaziale medio così definiti

$$|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}} \quad \text{e} \quad \Delta = \sqrt{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}.$$

Il coefficiente C_S può essere calcolato analiticamente sotto l'ipotesi di equilibrio locale ottenendo 0.23. In pratica, però, questo valore non è universale ma dipende dalla discretizzazione (e quindi dalla risoluzione) spaziale del calcolo, dal tipo di filtro utilizzato, ecc. per cui si trova in letteratura una gamma piuttosto ampia di valori consigliati, che spesso sono stati ottenuti calibrando il modello per confronto con soluzioni ottenute con la DNS. Valori ragionevoli sono $0.1 \leq C_S \leq 0.24$. Si osservi che, confrontando l'espressione per la viscosità turbolenta appena introdotta con quella riferita alla mixing length, si arriva alla conclusione $\ell_m = C_S \Delta$.

Sebbene anche la LES richieda una qualche operazione di calibrazione dei parametri che compaiono nei vari modelli sottogriglia oggi disponibili, i suoi pregi rimangono una minore sensibilità alla scelta del modello rispetto alle RANS e un impegno di calcolo molto inferiore a quello di una DNS, soprattutto per le correnti a numeri di Reynolds relativamente elevati. Per contro, la LES implica di affrontare comunque un problema tridimensionale e dipendente dal tempo, anche nel caso (piuttosto comune) di fenomeni mediamente bidimensionali o stazionari. In questi casi il costo computazionale di una LES è notevolmente superiore a quello richiesto dalle RANS, anche quando quest'ultime sono accoppiate a modelli di turbolenza molto raffinati.