

# Dinamica dei Fluidi

## Lezione 09 – a.a. 2009-2010

Simone Zuccher

24 Maggio 2010

**Nota.** Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore ([zuccher@sci.univr.it](mailto:zuccher@sci.univr.it)).

### 1 DNS: la simulazione diretta della turbolenza

Dal momento che le correnti turbolente sono ben descritte dalle equazioni di Navier-Stokes, che non perdono di validità in quanto la scala di Kolmogorov  $\eta$  è molto maggiore del libero cammino medio tra le molecole, è possibile ottenere la soluzione numerica di tali equazioni, detta DNS (direct numerical simulation). Dal punto di vista dell'accuratezza, dell'affidabilità dei risultati, e della compressione fisica del fenomeno della turbolenza, la simulazione diretta è certamente la scelta migliore. Il suo grande limite, tuttavia, è il costo in termini di potenza di calcolo e di mole di dati prodotta. Infatti, anche la più semplice corrente turbolenta comporta tre componenti di velocità che variano sia nello spazio che nel tempo, per cui non si può sfruttare nessuna simmetria per ridurre il numero di dimensioni a meno di quattro. Per dare un'idea della potenza di calcolo richiesta, basti pensare che la risoluzione spaziale dev'essere dell'ordine della scala di Kolmogorov  $\eta$  per poter rappresentare le fluttuazioni turbolente che avvengono sulle scale piccole, mentre la risoluzione nel tempo deve essere dell'ordine di  $\tau_\eta$ . D'altra parte, sappiamo che le scale più grandi della turbolenza  $\ell_0$  sono dell'ordine della dimensione spaziale del dominio di calcolo e sono caratterizzate da tempi caratteristici dell'ordine di  $\tau_0$ , per cui dalle relazioni

$$\frac{\eta}{\ell_0} \propto \text{Re}^{-3/4}, \quad \frac{u_\eta}{u_0} \propto \text{Re}^{-1/4} \quad \text{e} \quad \frac{\tau_\eta}{\tau_0} \propto \text{Re}^{-1/2}$$

si ha

$$N_{\Delta x} = \frac{\ell_0}{\eta} \propto \text{Re}^{3/4} \quad \text{e} \quad N_{\Delta t} = \frac{\tau_0}{\tau_\eta} \propto \text{Re}^{1/2},$$

essendo  $N_{\Delta x}$  il numero di punti lungo una direzione spaziale e  $N_{\Delta t}$  il numero di passi temporali necessaria per ottenere la risoluzione spazio-temporale richiesta. Siccome per una corrente incomprimibile le variabili sono tipicamente quattro (le tre componenti di velocità e la pressione) il numero di celle di memoria è circa

$$N = 4(N_{\Delta x})^3(N_{\Delta t}) \approx \text{Re}^{11/4}.$$

Per applicazioni reali il numero di Reynolds è di circa un milione, pertanto la mole di dati risulta dell'ordine di

$$N \approx 4(10^6)^{11/4} = 4 \times 10^{33/2} \approx 10^{17},$$

che è di gran lunga superiore a qualsiasi risorsa di calcolo oggi disponibile (inclusi cluster o supercomputer paralleli).

## 2 RANS: le equazioni mediate di Reynolds

Visto che l'approccio della simulazione diretta è assolutamente improponibile per problemi ingegneristici di interesse pratico, anziché cercare di risolvere nel dettaglio quello che succede fino alle piccole scale o su scala inerziale, si può tentare di cercare una soluzione "media", che caratterizzi la corrente mediata su un certo intervallo di tempo. Questo approccio, detto delle equazioni mediate di Reynolds, RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes), si basa sull'assunzione che la turbolenza sia un fenomeno puramente statistico, su tutte le scale, e cerca di descriverne l'evoluzione attraverso un processo di media temporale. Pur essendo di gran lunga il più usato dal punto di vista ingegneristico, esso è molto limitato dal punto di vista della comprensione del fenomeno fisico della turbolenza. Inoltre, siccome il processo di media causa una perdita di informazioni, è necessario trovare un modo per *chiudere* le equazioni mediate a seguito della comparsa di nuove incognite che, avendo le dimensioni di sforzi, vengono comunemente chiamati *sforzi di Reynolds*.

Introduciamo le medie temporali della velocità e della pressione come

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) dt \quad \bar{P}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T P(\mathbf{x}, t) dt$$

in modo tale da riscrivere le variabili  $(\mathbf{U}, P)$  come somma di una parte stazionaria e dipendente solo dallo spazio e di una fluttuazione (detta fluttuazione turbolenta) dipendente sia dallo spazio che dal tempo ma avente media nulla:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad P(\mathbf{x}, t) = \bar{P}(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}, t).$$

Se si introducono queste variabili nelle equazioni di Navier-Stokes incompruibili ( $\rho$  e  $\nu$  entrambe costanti) e si mediano le equazioni stesse tramite l'integrazione nel tempo, si ottengono le equazioni

$$\overline{\frac{\partial(\bar{U}_j + u_j)}{\partial x_j}} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial(\bar{U}_i + u_i)}{\partial t} + \overline{\frac{\partial(\bar{U}_i + u_i)(\bar{U}_j + u_j)}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial(\bar{P} + p)}{\partial x_i}} + \nu \overline{\frac{\partial^2(\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_j^2}}. \tag{2.2}$$

Grazie alle proprietà di linearità della media temporale precedentemente definita (il che significa che commuta con tutti gli operatori lineari, ovvero derivate ed integrali) e al fatto che la perturbazione è a media nulla, per l'equazione di continuità si ha

$$\overline{\frac{\partial(\bar{U}_j + u_j)}{\partial x_j}} = \overline{\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = \overline{\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j}} = \overline{\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j}} + 0 = \overline{\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j}},$$

per cui la (2.1) diventa

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = 0.$$

Il primo termine della (2.2) si annulla in quanto

$$\overline{\frac{\partial(\bar{U}_j + u_j)}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} = \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} = \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial t} + 0 = 0 + 0.$$

Per il secondo termine della (2.2), invece, si ha

$$\overline{\frac{\partial(\bar{U}_i + u_i)(\bar{U}_j + u_j)}{\partial x_j}} = \frac{\partial(\bar{U}_i + u_i)(\bar{U}_j + u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{U}_i \bar{U}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i \bar{U}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{U}_i \bar{U}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j},$$

essendo

$$\frac{\partial \bar{U}_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{U}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_i \bar{U}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{u}_i \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0.$$

Il termine di pressione si riduce a

$$\frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial(\bar{P} + p)}{\partial x_i}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + 0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i},$$

mentre il termine di laplaciano diventa semplicemente

$$\nu \overline{\frac{\partial^2(\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_j^2}} = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} + 0 = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2}.$$

In conclusione, le equazioni per una corrente turbolenta sono formalmente simili a quelle laminari e stazionarie per la componente media, con l'aggiunta di un termine non lineare non meglio definito:

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \bar{U}_i \bar{U}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}. \tag{2.4}$$

Si osservi che il termine viscoso può essere riscritto sfruttando la (2.3), ovvero il fatto che la divergenza della corrente media è nulla. Infatti,

$$\nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} \right) = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right),$$

da cui

$$\nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right).$$

Utilizzando questa riscrittura del termine viscoso ed osservando che

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \overline{u_i u_j}),$$

l'equazione (2.4) può essere riscritta nella forma

$$\frac{\partial \overline{U_i U_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u_i u_j} \right). \quad (2.5)$$

I termini aggiuntivi

$$\rho \overline{u_i u_j}$$

sono detti *sforzi di Reynolds* o *sforzi turbolenti* e rappresentano un problema in quanto sono incogniti e quindi ci sono più incognite di equazioni. Questo è noto come *problema della chiusura delle equazioni mediate di Reynolds*. Si potrebbe tentare di scrivere un'equazione di evoluzione per essi, ma si finirebbe per introdurre ulteriori incognite nel problema. Si osservi, tuttavia, che il problema sarebbe risolto se tali sforzi fossero in qualche modo *modellati* legandoli al flusso medio o se fossero rimpiazzati da relazioni *empiriche* ottenute da prove sperimentali. Infatti, essi sono strettamente legati alla correlazione tra  $u_i(\mathbf{x}, t)$  e  $u_j(\mathbf{x}, t)$  essendo

$$C_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\overline{u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}, t)}}{\sqrt{[u_i(\mathbf{x}, t)]^2} \sqrt{[u_j(\mathbf{x}, t)]^2}}.$$

### 3 Modelli per la chiusura delle equazioni mediate di Reynolds

Le equazioni mediate di Reynolds non hanno fatto altro che concentrare le difficoltà in un unico termine, il tensore degli sforzi di Reynolds  $\rho \overline{u_i u_j}$ . Questo non risolve il problema di determinare la corrente media in quanto non è possibile ricavare tale tensore a partire dalla conoscenza di essa. Affinché, dunque, le equazioni mediate siano di qualche utilità occorre trovare un modo per modellare il tensore degli sforzi di Reynolds a partire dal moto medie. Lo scopo dei modelli di turbolenza è proprio quello di ricavare gli elementi del tensore degli sforzi di Reynolds a partire dal campo medio di velocità e pressione in modo da ottenere un sistema di equazioni con pari numero di equazioni e di incognite. Si osservi che questo obiettivo non è banalmente raggiungibile in quanto, nonostante a livello della scala di Kolmogorov si possa considerare la turbolenza in qualche modo “universale”, di sicuro le scale turbolenti più grandi non lo sono affatto e dipendono dalla geometria del problema in esame. Pertanto, i modelli di turbolenza dipendono fortemente dal problema che si sta considerando e non sono per nulla generali. Questo è il grande limite di questo approccio.

### 3.1 Ipotesi di Boussinesq e viscosità turbolenta

L'equazione (2.5) può essere riscritta in modo molto compatto come

$$\frac{\partial \bar{U}_i \bar{U}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j},$$

essendo  $\tau_{ij}$  il tensore degli sforzi totali (viscosi + quelli di Reynolds) così definito:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u_i u_j}.$$

L'ipotesi che il rimescolamento tipico delle correnti turbolente produca effetti simili a quelli causati dalla diffusione molecolare dovuta alla viscosità del fluido, condusse Boussinesq a postulare una forma degli sforzi di Reynolds simile a quella degli sforzi viscosi, con una analoga dipendenza dalle derivate della corrente media. Il modo più corretto per riscrivere il tensore degli sforzi di Reynolds alla stregua di quelli viscosi è tramite l'introduzione di un tensore  $\nu_{ijhk}$  tale per cui risulti

$$\rho \overline{u_i u_j} = -\rho \nu_{ijhk} \left( \frac{\partial \bar{U}_h}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_h} \right).$$

Chiaramente ora il problema della chiusura è trasferito alla conoscenza di 36 componenti del tensore  $\nu_{ijhk}$  (che è simmetrico, come è simmetrico il tensore degli sforzi  $\tau_{ij}$  che risulta determinato da 6 costanti). Tuttavia, semplificando ulteriormente il modello in modo da considerare non nulli sono gli elementi diagonali di  $\nu_{ijhk}$  e supponendo che il legame sia isotropo, si arriva ad introdurre *un solo parametro*  $\nu_T$ , funzione della posizione ed eventualmente del tempo, ottenendo

$$\rho \overline{u_i u_j} = -\rho \nu_T \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.6)$$

che permette di riscrivere il tensore degli sforzi totali semplicemente come

$$\tau_{ij} = \rho(\nu + \nu_T) \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right).$$

Il coefficiente  $\nu_T$  ha le dimensioni di una viscosità cinematica e prende il nome di *viscosità turbolenta* o *eddy viscosity*. Si osservi che le equazioni così ottenute differiscono da quelle usuali per il solo fatto che i termini viscosi sono espressi come somma dei consueti termini dipendenti dalla viscosità molecolare del fluido (proprietà fisica ben definita e qui assunta costante ed uniforme) e di termini dipendenti dalla viscosità turbolenta, che è, al contrario, funzione della posizione e dell'atto di moto, e che pertanto deve essere mantenuta all'interno degli operatori di derivata spaziale. Il problema della chiusura è stato notevolmente semplificato anche se non risolto completamente in quanto rimane da assegnare la costante  $\nu_T$ . Per questo motivo modelli che fanno intervenire la viscosità turbolenta sono molto usati in ingegneria anche se hanno almeno due limiti piuttosto evidenti legati a

1. **scale:** nel caso della diffusione molecolare c'è una separazione netta fra le scale su cui avvengono i fenomeni di diffusione, dell'ordine del libero cammino medio delle molecole, e quelle della corrente media. Nel caso della turbolenza, invece, questa separazione di scale non esiste perché il fenomeno della cascata di energia le mette in gioco tutte, a partire da quelle più grandi fino a quelle dissipative, passando per le scale inerziali. Questo fatto causa tempi caratteristici della turbolenza decisamente inferiori a quelli della corrente media, e questo si traduce in un effetto “memoria” causato dagli elevati tempi di adattamento delle strutture turbolente alle condizioni esterne (tali effetti non sono presenti nel caso laminare per il quale i tempi di adattamento a livello molecolare sono estremamente rapidi). Inoltre, siccome la diffusione turbolenta avviene su più scale, essa non è certamente locale e per questo non è descrivibile da equazioni differenziali che contengano come variabile la sola velocità media.
2. **isotropia:** nel caso di un corrente laminare il legame fra gli sforzi e la velocità di deformazione è isotropo. Ammesso che vi sia un legame di questo tipo nel caso degli sforzi turbolenti, non ci sono motivi perché esso sia isotropo, se non in casi molto particolari.

Come detto il problema della chiusura è definitivamente risolto solo quando si fornisce un modo per determinare il coefficiente  $\nu_T$ . Nel seguito sono riportati tre approcci, di vario ordine a seconda del numero di equazioni differenziali alle derivate parziali (di evoluzione) che vengono risolte per la determinazione di  $\nu_T$ .