Dinamica dei Fliudi
Lezione 08 – a.a. 2009-2010

Simone Zuccher

19 Maggio 2010

**Nota**. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

# 1 Scale turbolente

## 1.1 La teoria di Kolmogorov

Nel 1941 Kolmogorov pubblicò, in un lavoro fondamentale, la sua teoria nell'ipotesi di turbolenza in equilibrio in grado di dar conto delle scale alle quali avviene la dissipazione viscosa. Tre sono le ipotesi fondamentali alla base di tale teoria:

- **Ipotesi di isotropia locale**: per numeri di Reynolds sufficientemente alti, i moti turbolenti di piccola scala sono statisticamente isotropi, ossia non dipendono dalla particolare direzione. Questo discende dall'idea di Richardson delle instabilità sucessive, le quali ditruggono rapidamente l'informazione relativa alla geometria del campo di moto e del flusso medio, che può anche essere non isotropo.

- **Prima ipotesi di similarità**: in ogni flusso turbolento, a numero di Reynolds sufficientemente elevato, le statistiche dei moti di piccola scala sono universali e determinate unicamente dalla viscosit'a $\nu$ e dalla velocità di dissipazione per unità di massa $\epsilon$ (pertanto $\epsilon$ ha le dimensioni di una potenza per unità di massa). Sotto questa ipotesi è possibile legare la scala delle lunghezze $\eta$ in modo univoco a $\nu$ e $\epsilon$. Siccome le dimensioni di $\nu$ sono quelle di una lunghezza al quadrato per un tempo ($[\nu] = L^2T$) e quelle della dissipazione energetica sono una potenza per unità di massa ovvero una velocità al quadrato diviso per un tempo ($[\epsilon] = L^2T^{-3}$), imponendo che $\eta$ si possa esprimere solo tramite $\nu$ e $\epsilon$, dall'analisi dimensionale si ricava
$$[\eta] = [\nu]^\alpha[\epsilon]^\beta = (L^2T)^\alpha(L^2T^{-3})^\beta = L^{2\alpha}T^\alpha L^{2\beta}T^{-3\beta} = L^{2\alpha+2\beta}T^{\alpha-3\beta}.$$
Tuttavia, essendo $\eta$ una lunghezza, deve essere
$$L^{2\alpha+2\beta}T^{\alpha-3\beta} = L \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{3}{4}, \beta = -\frac{1}{4},$$

ovvero

$$\eta \propto \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Analogamente, si ottengono le scale di velocità e dei tempi

$$u_\eta \propto (\epsilon\nu)^{\frac{1}{4}}$$

$$\tau_\eta \propto \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si osservi che il numero di Reynolds basato su queste scale risulta

$$\mathrm{Re}_\eta = \frac{u_\eta \eta}{\nu} \sim \frac{(\epsilon\nu)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}}}{\nu} = 1,$$

il che conferma quanto ottenuto basandosi unicamente sulle congetture di Richardson.

Si osservi che la produzione $\mathcal{P}$ di energia turbolenta per unità di massa nell'unità di tempo proviene dal moto medio e sarà quindi dell'ordine dell'energia cinetica per unità di massa del moto medio $u_0^2$ divisa per il tempo caratteristico del moto medio $\tau_0 = \ell_0/u_0$. Pertanto,

$$\mathcal{P} \sim \frac{u_0^2}{\tau_0} = \frac{u_0^3}{\ell_0}.$$

Questa potenza per unità di massa deve avere lo stesso ordine di grandezza della dissipazione viscosa $\epsilon$ che si verifica sulle microscale. Si ha quindi

$$\epsilon \sim \mathcal{P} \qquad \Rightarrow \qquad \epsilon \sim \frac{u_0^3}{\ell_0},$$

per cui la scala $\eta$ può essere riscritta come

$$\eta \propto \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\nu^3\ell_0}{u_0^3}\right)^{\frac{1}{4}} = \ell_0\left(\frac{\nu^3\ell_0}{\ell_0^4 u_0^3}\right)^{\frac{1}{4}} = \ell_0\left(\frac{\nu^3}{\ell_0^3 u_0^3}\right)^{\frac{1}{4}} = \ell_0 \mathrm{Re}^{3/4},$$

da cui

$$\frac{\eta}{\ell_0} \propto \mathrm{Re}^{-3/4}. \tag{1.1}$$

Allo stesso modo si ottiene

$$\frac{u_\eta}{u_0} \propto \mathrm{Re}^{-1/4} \qquad \text{e} \qquad \frac{\tau_\eta}{\tau_0} \propto \mathrm{Re}^{-1/2}. \tag{1.2}$$

- **Seconda ipotesi di similarità**: in ogni flusso turbolento a numero di Reynolds sufficientemente elevato, le statistiche dei moti su scala $\ell$, tale che $\eta < \ell < \ell_0$, sono universali e dipendono unicamente da $\epsilon$ e $\ell$, indipendentemente da $\nu$. In pratica, su questa scala intermedia detta *scala inerziale*, l'unico parametro che conta è la dissipazione energetica $\epsilon$. Utilizzando, come fatto in precedenza, l'analisi dimensionale per determinare la dipendenza della velocità caratteristica $u_\ell$ e del tempo caratteristico $\tau_\ell$, si ha

$$u_\ell \propto (\epsilon \ell)^{\frac{1}{3}}$$

$$\tau_\ell \propto \left(\frac{\ell^2}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Osservando, come fatto nel caso della scala $\eta$, che

$$\epsilon \sim \frac{u_0^3}{\ell_0},$$

si ha

$$\frac{u_\ell}{u_0} \propto \left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{e} \qquad \frac{\tau_\ell}{\tau_0} \propto \left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Se introduciamo il numero d'onda $k = 2\pi/\ell$ ed indichiamo con $E(k)$ l'energia cinetica turbolenta per unità di massa ed unità di numero d'onda, ovvero il suo integrale nello spazio dei numeri d'onda dà l'energia cinetica per unità di massa

$$\frac{1}{2}\overline{|\mathbf{u}|^2} = \int_0^\infty E(k)\,\mathrm{d}k,$$

allaora attraverso la semplice analisi dimensionale è possibile determinare la dipendenza di $E(k)$ da $k$ (che è l'inverso di $\ell$ a meno di $2\pi$) ed $\epsilon$ nel range delle scale inerziali. Si ricordi che, per la terza ipotesi di Kolmogorov, nel range inerziale le caratteristiche della turbolenza dipendono esclusivamente da $\epsilon$ e $\ell$. Osservando che $E(k)$ è un'energia per unità di massa ed unità di numero d'onda, ovvero che ha le dimensioni di una velocità al quadrato diviso una lunghezza, i.r. $[E(k)] = LT^{-2}$, si ha

$$[E(k)] = [\epsilon]^\alpha [\ell]^\beta = (L^2T^{-3})^\alpha (L)^\beta = L^{2\alpha+\beta}T^{-3\alpha} = LT^{-2} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{5}{3}.$$

Siccome le dimensioni del numero d'onda sono $[k] = L^{-1}$, si ottiene uno dei risultati più noti, più importanti e *meglio verificati sperimentalmente* della teoria della turbolenza di Kolmogorov nella forma

$$E(k) \propto \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}.$$

La costante di proporzionalità si ricava dagli esperimenti e si osserva essere dell'ordine dell'unità. Questa legge, che trova numerosi riscontri negli esperimenti, è stata ricavata sulla base di considerazioni puramente dimensionali e apparentemente grossolane. Kolmogorov, matematico che si è occupato di teoria della probabilità, topologia, logica, analisi, sistemi dinamici, turbolenza e quasi tutto tranne la teoria dei numeri, scriveva
*"Mathematicians always wish mathematics to be as 'pure' as possible, i.e. rigorous, provable. But usually most interesting real problems that are offered to us are inaccessible in this way. And then it is very important for a mathematician to be able to find himself approximate, non-rigorous but effective ways of solving problems".*

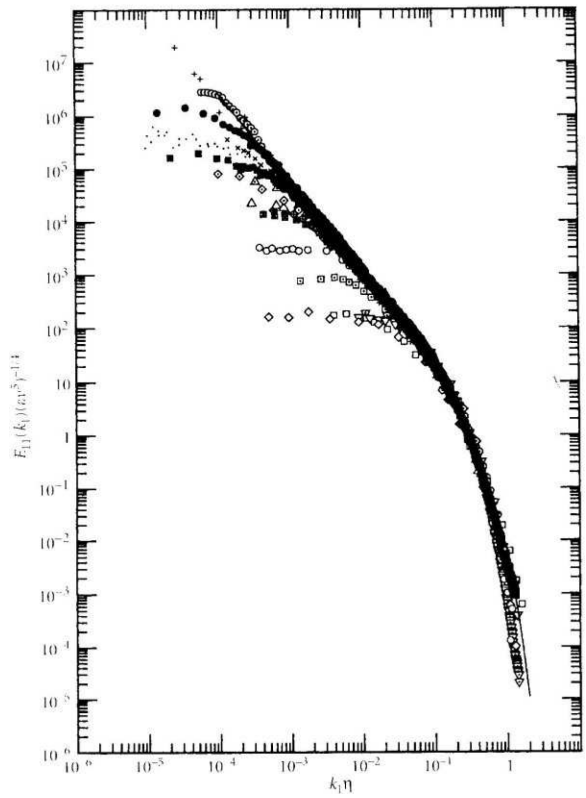

Figura 1: Andamento di $E(k)$ in funzione di $k$ per diversi esperimenti in correnti turbolente, dati opportunamente adimenzionalizzati.