

Dinamica dei Fluidi

Lezione 07 – a.a. 2009-2010

Simone Zuccher

12 Maggio 2010

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

La turbolenza è probabilmente l'ultimo problema irrisolto della fisica classica. Si racconta che fu chiesto ad Heisenberg, sul letto di morte, che cosa avrebbe chiesto a Dio se ne avesse avuto la possibilità. La sua risposta fu “Quando incontrerò Dio gli farò due domande: perché la relatività e perché la turbolenza. Credo proprio che Egli avrà una risposta per la prima”. In realtà, aneddoti di questo tipo sono stati attribuiti a diversi scienziati famosi, tra cui Horace Lamb, per cui sono poco credibili; tuttavia rendono conto del fatto che molti scienziati di grosso calibro si sono dedicati allo studio della turbolenza senza riuscire nel loro sforzo.

1 Caratteristiche fenomenologiche di una corrente turbolenta

La turbolenza ha da sempre appassionato il genere umano in quanto è costantemente presente nella vita di tutti i giorni. Solo per citare alcuni esempi, l'intrecciarsi di vortici dovuti allo scorrere dell'acqua in un fiume o, meglio ancora, in un torrente, gli zampilli delle fontane, i disegni creati dal fumo di una sigaretta, gli scherzi provocati dal vento, la scia dietro una nave o più semplicemente dietro un pilone di un ponte a seguito del passaggio dell'acqua, il rimescolamento dovuto ad un getto, la nuvola di fumi e polveri a seguito di un'esplosione/eruzione vulcanica, ecc.

Da un punto di vista sperimentale si può chiamare *corrente laminare* il moto di un fluido in cui le caratteristiche macroscopiche quali velocità e proprietà termofisiche del fluido in ogni punto e in ogni istante sono completamente determinate dall'ambiente, ovvero si ripetono uguali ogni volta che si ripete l'esperimento nelle medesime condizioni. Se questo non accade, il moto viene detto turbolento, per cui una *corrente turbolenta* è il moto di un fluido caratterizzato da elementi di casualità nella distribuzione spaziale e temporale delle proprietà macroscopiche (velocità, pressione, temperatura). Chiaramente, se l'esperimento potesse essere *ripetuto esattamente*, per esempio arrivando a fissare la posizione di ciascuna molecola in modo da riprodurre esattamente sia le condizioni al contorno che quelle iniziali, il fenomeno fisico si ripeterebbe identico.

Dal punto di vista matematico, il concetto di turbolenza si identifica con quello di *comportamento caotico* delle soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes. Si osservi che le correnti turbolente possono essere descritte tramite le equazioni della meccanica dei continui perché l'irregolarità che caratterizza tali correnti non si estende a scale di lunghezza così piccole da mettere in crisi l'ipotesi del continuo.

Come si sarà intuito, una definizione rigorosa di turbolenza non è semplice; tuttavia si possono identificare facilmente alcune caratteristiche tipiche di una corrente turbolenta di seguito elencate.

- **Instazionarietà.** Velocità, pressione, temperatura, densità e concentrazioni dipendono fortemente dal tempo e queste fluttuazioni di tutte le variabili fisiche si osservano su un'ampia banda di frequenze, anche nel caso di condizioni al contorno stazionarie.
- **Apparente casualità.** La turbolenza è caratterizzata da forte sensibilità alle condizioni iniziali, tanto maggiore quanto più grande è il numero di Reynolds. Questo comportamento, tipico di sistemi caotici, si traduce in un'apparente casualità ed ha come diretta conseguenza il fatto che studiare la turbolenza con metodi esclusivamente deterministici non può avere successo.
- **Vorticità e tridimensionalità.** A seguito di fluttuazioni di velocità, la turbolenza è caratterizzata da fluttuazioni di vorticità, la cui dinamica è descritta, per il caso incomprimibile $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, dall'equazione

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (1.1)$$

Si osservi che le fluttuazioni di vorticità non potrebbero autosostenersi se venisse a mancare il termine di “stretching and tilting” $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ in (1.1). Siccome esso è nullo nel caso bidimensionale e per essere diverso da zero la corrente deve come minimo essere tridimensionale, la turbolenza è necessariamente tridimensionale. In applicazioni geofisiche si parla di turbolenza bidimensionale, ma questo non è corretto.

- **Dissipazione.** La viscosità causa un aumento dell'energia interna del fluido a scapito dell'energia cinetica della corrente. Pertanto, la turbolenza richiede un continuo supporto di energia proveniente dal moto medio in modo da rimpiazzare le perdite dovute alla dissipazione viscosa. Se tale supporto di energia non ci fosse, la turbolenza si esaurirebbe velocemente.
- **Rimescolamento.** Densità, velocità, temperatura, quantità di moto, energia, concentrazioni, ecc. sono tutte grandezze fisiche che subiscono un forte rimescolamento nel caso di corrente turbolenta, che risulta decisamente superiore a quello puramente molecolare. Non a caso, per raffreddare una minestra o un thè si soffia in modo da favorire lo scambio di calore. Si osservi che il rimescolamento turbolento permette la diffusione degli inquinanti e dei veleni nell'atmosfera (se rimanessero tutti i superficie, probabilmente ci saremmo già estinti).

- **Ampia gamma di scale.** Le correnti turbolente coinvolgono una gamma di scale di lunghezza (e di tempo) che si estende fino alle dimensioni dell'intero sistema. Le grandi scale sono dettate dalla geometria e per esse gli effetti della viscosità sono trascurabili; le piccole scale sono dettate dalla viscosità che gioca in esse un ruolo fondamentale. Pertanto, una corretta modellizzazione della turbolenza richiede da un lato elementi statistici in grado di descrivere le piccole scale universali, dall'altro elementi deterministici con i quali descrivere le scale più grandi, direttamente legate al particolare problema considerato (geometria, condizioni iniziali e al contorno, ecc.).
- **Continuo.** Nonostante la turbolenza siano caratterizzata dalla presenza di molte scale, quelle più piccole sono comunque maggiori del libero cammino medio. Pertanto valgono le ipotesi del continuo e le equazioni di Navier-Stokes possono essere utilizzate per predire, nei limiti della loro forte sensibilità alle condizioni iniziali, l'evoluzione di una corrente turbolenta.
- **Corrente non fluido.** La turbolenza è una proprietà della *corrente* non del fluido nel quale la corrente si esplica.

Ovviamente, instazionarietà, tridimensionalità e vorticità *possono* essere presenti anche in correnti laminari; tuttavia in una corrente turbolenta esse *devono* essere presenti.

Vista la complessità che contraddistingue la turbolenza, una domanda sorge spontanea: perché studiarla? La risposta è piuttosto laconica: non si conoscono, allo stato attuale della ricerca, soluzioni generali per le equazioni di Navier-Stokes. Esistono soluzioni particolari per il caso laminare ma esse non sono di aiuto per capire il comportamento di correnti turbolente. La forte nonlinearietà associata alle equazioni le rende piuttosto intrattabili dal punto di vista matematico e questa mancanza di strumenti si traduce in senso di frustrazione da una parte e senso di sfida dall'altro. Si ricordi che la turbolenza rimane uno dei principali problemi irrisolti della fisica e che una maggior comprensione di tale fenomeno avrebbe notevoli ricadute tecnologiche ed economiche. Si pensi, ad esempio, al risparmio che si avrebbe se si potesse mantenere laminare la corrente attorno ad un aereo che vola per dodici ore considerato che metà del peso al decollo è dato dal carburante.

Tra gli innumerevoli settori tecnologici in cui compare la turbolenza ricordiamo i processi di combustione, i condotti per il trasporto di gas/petrolio, lo strato limite su ali/fusoliere di aerei, automobili, treni e sottomarini, le scie dietro i mezzi di trasporto (in particolare autocarri), il comportamento del sangue in arterie/vene, lo studio di aneurismi cerebrali, la diffusione di spray e aerosol, applicazioni in geofisica (jet streams, corrente del Golfo, correnti oceaniche), applicazioni in astrofisica (turbolenza nelle stelle, nuvole di gas interstellare e galassie gassose), ecc.

2 Scale turbolente

2.1 Cascata di energia

Consideriamo una corrente turbolenta ed identifichiamo in essa una lunghezza caratteristica delle strutture turbolente più grandi, che indichiamo con ℓ_0 , ed una velocità tipica delle strutture turbolente più grandi che indichiamo con u_0 . È ragionevole pensare che queste due scale siano dell'ordine della geometria che caratterizza la corrente media: per esempio, per una corrente turbolenta in un tubo, ℓ_0 è dell'ordine del diametro e u_0 dell'ordine della velocità media ottenuta dividendo la portata in massa per la sezione del tubo e per la densità del fluido. Allora possiamo definire il numero di Reynolds basato su ℓ_0 e u_0

$$\text{Re} = \frac{u_0 \ell_0}{\nu}$$

ed una scala dei tempi

$$\tau_0 = \frac{\ell_0}{u_0}.$$

Un'altra scala dei tempi è quella legata alla diffusione viscosa, che possiamo ricavare dall'equazione di diffusione monodimensionale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

che porta a

$$\frac{u_0}{\tau_\nu} \sim \frac{u_0}{\ell_0^2} \quad \Rightarrow \quad \tau_\nu \sim \frac{\ell_0^2}{\nu} = \tau_0 \text{Re}.$$

In pratica, essendo le correnti turbolente caratterizzate da alti numeri di Reynolds, il tempo di diffusione viscosa è enormemente maggiore di quello tipico della corrente media, per cui sembrerebbe che la diffusione viscosa fosse del tutto irrilevante ai fini dello studio della dinamica della turbolenza. Nel 1922 Richardson, sotto l'ipotesi di turbolenza *localmente isotropa*, congetturò che le strutture turbolente (i vortici) che si sono formate a seguito del processo di transizione, e che hanno le dimensioni tipiche della geometria ℓ_0 del campo di moto e tempi caratteristici dell'ordine di τ_0 , subiscono esse stesse un'instabilità causata da forti non linearità dando origine a strutture più piccole caratterizzate da numeri di Reynolds più piccoli, come mostrato in figura 1. Se le dimensioni delle nuove strutture turbolente sono tali per cui il tempo di diffusione viscosa è ancora trascurabile ($\tau_\nu \ll \tau_0$), il processo di instabilità si ripete in modo ricorsivo fino a quando le strutture che si formano raggiungono scale tali da assicurare il ruolo della *viscosità* nella dinamica della turbolenza. Effettivamente, questo è del tutto coerente con il fatto che la turbolenza ha come caratteristica fondamentale la *diffusione* e quest'ultima è strettamente legata agli effetti della viscosità. Le strutture grandi (quelle di dimensioni dell'ordine di ℓ_0) prelevano energia cinetica dal moto medio e la trasferiscono a quelle più piccole le quali a loro volta le trasferiscono a quelle più piccole fino a raggiungere le strutture a livello delle quali la viscosità del fluido gioca un ruolo importante. Richardson sintetizzò queste idee nei versi

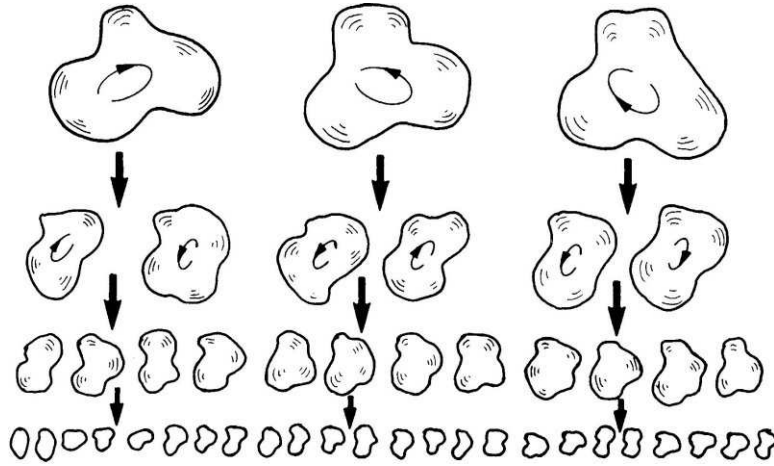


Figura 1: Instabilità successive delle strutture turbolente fino ad arrivare alle piccole scale dove la viscosità gioca un ruolo fondamentale.

*“Big whirls have little whirls,
which feed on their velocity,
and little whirls have lesser whirls,
and so on to viscosity”.*

L’energia associata alle strutture più piccole, che sono stabili, non può essere trasferita a scale ancora più piccole (che non esistono), e viene quindi dissipata sotto forma di calore. Le scale che dissipano l’energia turbolenta sotto forma di calore sono dette *scale di Kolmogorov* o *microscale* e la loro lunghezza caratteristica si indica con η (di conseguenza le velocità caratteristiche su questa scala si indicano con u_η e i tempi caratteristici con $\tau_\eta = \eta/u_\eta$). Per contro, le *scale energetiche* o *grandi scale* sono quelle dell’ordine di ℓ_0 . Si osservi che a livello delle scale di Kolmogorov, siccome la viscosità gioca un ruolo rilevante, τ_ν è dell’ordine di τ_0 , ma siccome $\tau_\nu \sim \tau_0 \text{Re}$, si ha che il numero di Reynolds basato sulle microscale deve essere dell’ordine di 1:

$$\text{Re}_\eta = \frac{u_\eta \eta}{\nu} \sim 1. \quad (2.2)$$