

Dinamica dei Fluidi

Lezione 06 – a.a. 2009-2010

Simone Zuccher

07 Maggio 2010

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Stabilità lineare per correnti piane e parallele

Ripartendo dall'ultimo risultato,

$$i(\alpha U - \omega)\eta + i\beta U'v = \text{Re}^{-1}\Delta\eta \quad (1.1)$$

$$i(\alpha U - \omega)\Delta v - i\alpha U''v = \text{Re}^{-1}\Delta\Delta v \quad (1.2)$$

si osservi che le condizioni al contorno per η in presenza di pareti solide sono omogenee ($\eta = 0$) a seguito della definizione di η . Una possibile strategia di soluzione del problema (1.1)-(1.2) consiste nel risolvere dapprima la seconda equazione ottenendo v e poi sostituirla nella prima per ottenere η . Dal momento che sia l'equazione di Orr-Sommerfeld (1.2) (che è nella sola incognita v) sia le condizioni al contorno per v sono omogenee, risolvere l'equazione (1.2) equivale a risolvere un problema agli autovalori dal quale si deriva una relazione di dispersione del tipo

$$D(\alpha, \beta, \omega, \text{Re}) = 0.$$

Se si considera la stabilità temporale, allora α, β e Re sono fissati e reali, mentre ω è complesso e la sua parte immaginaria fornisce il tasso di crescita temporale; per la stabilità spaziale ω e Re sono fissati e reali, mentre (a β fissato) la parte immaginaria di α (o la parte immaginaria di β se α è fissato) fornisce la crescita spaziale. La soluzione $v(y)$ è detta autofunzione.

Nel caso di disturbo bidimensionale, si ha $\beta = 0$ e $w = 0$; pertanto $\eta \equiv 0$ ed è quindi necessario risolvere la sola equazione di Orr-Sommerfeld (1.2). Anche se storicamente i primi disturbi ad essere studiati furono bidimensionali, la (1.2) governa anche quelli tridimensionali. Infine, sempre nel caso bidimensionale, anziché utilizzare le variabili primitive \tilde{u} e \tilde{v} si può introdurre la funzione di corrente $\tilde{\psi} = \psi(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}$ tale che

$$\tilde{u} = \tilde{\psi}_y = \psi' e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \quad \text{e} \quad \tilde{v} = -\tilde{\psi}_x = -i\alpha\psi e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)},$$

che significa che $\psi(y)$ soddisfa la stessa equazione di $v(y)$ (l'equazione di Orr-Sommerfeld (1.2)) essendo $v(y) = -i\alpha\psi(y)$. L'analisi di stabilità permette di ricavare le curve di stabilità neutra, ovvero (nel caso di disturbo bidimensionale con $\beta = w = 0$) il luogo dei punti del piano $\text{Re}-\alpha$ oppure $\text{Re}-\omega$ per i quali la crescita è nulla, come quelle riportate in figura 1.

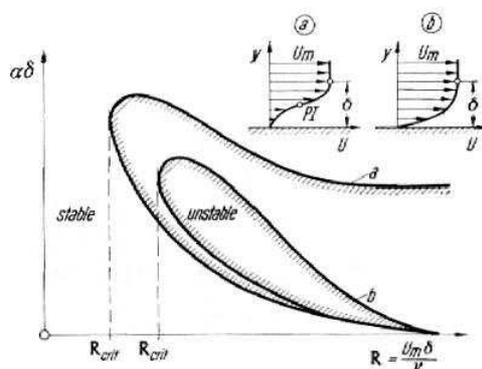


Figura 1: Curva di stabilità neutra nel caso di analisi spaziale. (a) flusso base con punto di flesso (instabilità non viscosa); (b) flusso base di strato limite su lamina piana o accelerante (instabilità viscosa). Si notino le diverse regioni di stabilità all'esterno e di instabilità all'interno dipendentemente dal tipo di stabilità (viscosa o non viscosa) considerata (Schlichting).

1.1 Teorema di Squire

Per semplicità consideriamo la stabilità temporale, ovvero α , β e Re sono noti e reali, mentre ω non è noto ed è complesso. I modi del problema (1.1)-(1.2) sono di due tipi:

- i modi dell'equazione di Orr-Sommerfeld (1.2), per la quale le autofunzioni v e gli autovalori ω possono essere determinati indipendentemente dalla prima equazione e la η di conseguenza, risolvendo la prima equazione
- i modi propri dell'equazione (1.1), omogenea, ovvero

$$i(\alpha U - \omega)\eta - \text{Re}^{-1}\Delta\eta = 0.$$

In realtà, ai fini della stabilità, basta studiare la sola equazione di Orr-Sommerfeld in quanto i modi propri di η sono sempre stabili. Per dimostrarlo riscriviamo l'equazione omogenea per η esplicitando l'operatore laplaciano $\Delta = (\cdot)_{yy} - (\alpha^2 + \beta^2)$, moltiplicandola per η^* , il complesso coniugato di η , ed integrandola su tutto l'intervallo di definizione della variabile y (sia esso finito o infinito). Così facendo si ottiene

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} i\alpha U \eta^* \eta dy - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} i\omega \eta^* \eta dy - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \text{Re}^{-1} \eta^* \eta'' dy + \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \text{Re}^{-1} (\alpha^2 + \beta^2) \eta^* \eta dy = 0.$$

Facendo uso del fatto che, a causa delle condizioni al contorno omogenee per η , anche η^* si annulla agli estremi dell'intervallo $[y_{\min}; y_{\max}]$, l'integrazione per parti del termine $\eta^* \eta''$ si riduce a

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \eta^* \eta'' dy = [\eta^* \eta']_{y_{\min}}^{y_{\max}} - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \eta'^* \eta' dy = - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \eta'^* \eta' dy = - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta'|^2 dy,$$

l'equazione precedente può essere riscritta come

$$i\alpha \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} U |\eta|^2 dy - i\omega \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta|^2 dy + \text{Re}^{-1} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta'|^2 dy + \text{Re}^{-1} (\alpha^2 + \beta^2) \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta|^2 dy = 0.$$

Siccome α , β e Re sono reali, prendendo la parte reale di questa equazione di ottiene

$$\text{Im}(\omega) \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta|^2 dy + \text{Re}^{-1} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta'|^2 dy + \text{Re}^{-1} (\alpha^2 + \beta^2) \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta|^2 dy = 0,$$

da cui

$$\text{Im}(\omega) = -\text{Re}^{-1} \left[\alpha^2 + \beta^2 + \frac{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta'|^2 dy}{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |\eta|^2 dy} \right] < 0.$$

Siccome la parte immaginaria dell'autovalore ω è sempre negativa, i modi propri dell'equazione omogenea per η sono sempre stabili. Pertanto, *l'eventuale instabilità del problema (1.1)-(1.2) può essere causata esclusivamente dai modi instabili dell'equazione di Orr-Sommerfeld*. Per quanto riguarda i modi di quest'ultima, si osservi che dividendo tutti i termini per $i\alpha$ si ha

$$(U - c)[v'' - (\alpha^2 + \beta^2)v] - U''v = \frac{1}{i\alpha \text{Re}} [v'''' - 2(\alpha^2 + \beta^2)v'' + (\alpha^2 + \beta^2)^2 v], \quad (1.3)$$

essendo $c = \omega/\alpha$. Si osservi che gli unici parametri che compaiono in essa sono il quadrato del numero d'onda $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ e $i\alpha \text{Re}$. Pertanto, se un certo valore di $\alpha \text{Re} = a$ causa la prima instabilità temporale (ovvero il primo passaggio di $\text{Im}(\omega)$ da negativa a positiva) e ad esso corrisponde un certo valore di $\alpha^2 + \beta^2 = b^2$, allora il numero di Reynolds più piccolo al quale questo succede si ha in corrispondenza del massimo valore di α ($\text{Re} = a/\alpha$). Tuttavia, se $\alpha^2 + \beta^2$ è fissato, il massimo valore di α si ha proprio in corrispondenza di $\beta = 0$. Questo significa che, a parità di altri parametri, la prima instabilità di un flusso base piano e parallelo si verifica ad un numero di Reynolds più basso se il disturbo è bidimensionale ($\beta = 0$). Pertanto, il caso più limitante è quello bidimensionale e d'ora in poi assumeremo $\beta = 0$.

1.2 Stabilità non viscosa

Nel caso limite $\nu \rightarrow 0$, ovvero $\text{Re} \rightarrow \infty$, l'equazione di Orr-Sommerfeld (1.3) si semplifica e prende il nome di equazione di Rayleigh, che è del second'ordine e quindi richiede solo due condizioni al bordo:

$$(U - c)[v'' - \alpha^2 v] - U''v = 0,$$

dove $c = \omega/\alpha$ è la velocità di fase (si noti che $\beta = 0$ perché il caso di disturbo bidimensionale è più limitante). Siccome questa equazione è stata ricavata per il caso limite $Re \rightarrow \infty$, essa fornisce preziose informazioni per *correnti ad alto numero di Reynolds*. Dividendo tutti i termini per $(U - c)$, moltiplicando per v^* (l'autofunzione complessa coniugata di v) ed integrando sull'intervallo di definizione della variabile y (sia esso finito o infinito), si ha

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} v^* v'' dy - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \alpha^2 v^* v dy - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{U''}{U - c} v^* v dy = 0.$$

Osservando che v^* si annulla agli estremi del dominio, integrando per parti il termine $v^* v''$ si ottiene

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} v^* v'' dy = [v^* v']_{y_{\min}}^{y_{\max}} - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} v'^* v' dy = - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} v'^* v' dy = - \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |v'|^2 dy,$$

per cui l'equazione di Rayleigh in forma integrale, dopo aver cambiato di segno, diventa

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} |v'|^2 dy + \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \alpha^2 |v|^2 dy + \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{U''}{U - c} |v|^2 dy = 0.$$

Essendo ω complesso, lo è anche la velocità di fase $c = c_r + ic_i$ per cui la predente equazione può essere scritta, dopo aver moltiplicato numeratore e denominatore dell'ultima funzione integranda per $(U - c_r) + ic_i$,

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} (|v'|^2 + \alpha^2 |v|^2) dy + \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{(U - c_r)U''}{(U - c_r)^2 + c_i^2} |v|^2 dy + \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{ic_i U''}{(U - c_r)^2 + c_i^2} |v|^2 dy = 0.$$

Separando la parte reale e quella immaginaria di questa equazione si ha

$$\text{parte reale: } \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} (|v'|^2 + \alpha^2 |v|^2) dy + \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{(U - c_r)U''}{(U - c_r)^2 + c_i^2} |v|^2 dy = 0 \quad (1.4)$$

$$\text{parte immaginaria: } c_i \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{U''}{(U - c_r)^2 + c_i^2} |v|^2 dy = 0. \quad (1.5)$$

Si osservi che nell'integrale della condizione (1.5) U'' è moltiplicato per la quantità $|v|^2/[(U - c_r)^2 + c_i^2]$ che è sempre positiva tranne nel caso banale $v \equiv 0$. Pertanto, se U'' non cambia segno, ovvero se il profilo di velocità del flusso base non presenta flessi, la condizione (1.5) è soddisfatta solo per $c_i = 0$, nel qual caso il flusso base è stabile. Viceversa, affinché il flusso base sia instabile è *necessario* che il profilo di velocità abbia un punto di flesso ad una certa distanza dalla parete che chiamiamo y_{ip} . Fjortof nel 1950 osservò che in realtà, affinché vi sia instabilità viscosa, oltre alla condizione necessaria $U''(y_{ip}) = 0$, è ulteriormente necessario che lo shear $|U'|$ abbia un massimo nel punto di flesso y_{ip} . Fjortof trovò anche un'altra condizione, di seguito riportata, ma tutte queste sono praticamente sempre soddisfatte nei casi di interesse quando il profilo di velocità ha un punto di flesso.

Le conclusioni più importanti sono riassunte nei seguenti cinque teoremi:

Teorema 1 [Rayleigh (1880)] Per l'instabilità viscosa è *necessario* che il profilo di velocità del flusso base $U(y)$ abbia un punto di flesso. Chiamiamo y_{ip} la distanza dalla parete dove questo avviene, ovvero $U''(y_{ip}) = 0$ (si veda la figura 1, caso (a)).

Teorema 2 [Fjörtöf (1950)] Per l'instabilità di tipo viscoso è *necessario* che lo shear $|U'|$ abbia un massimo nel punto di flesso y_{ip} .

Teorema 3 [Fjörtöf (1950)] Se esiste un punto di flesso del profilo di velocità del flusso base, allora per l'instabilità non viscosa è ulteriormente *necessario* che $U''(U - U(y_{ip})) = 0$ da qualche parte nel profilo.

Teorema 4 [Lin (1945)] Sia y_c la distanza dalla parete alla quale si ha $U - c = 0$. Se $U(y)$ ha un punto di flesso in $y = y_c$, allora ci può essere un disturbo neutro ($c_i = 0$) la cui velocità di fase è $c_r = U(y_c)$.

Teorema 5 [Rayleigh (1880)] La velocità di fase c_r di un disturbo amplificato deve essere compresa tra i valori minimo e massimo del profilo di velocità $U(y)$.

La conseguenza più importante di questi teoremi è che i profili di velocità con punti di flesso sono instabili ad alti numeri di Reynolds (limite $\nu \rightarrow 0$). Pertanto, profili deceleranti possono portare rapidamente alla transizione. Il teorema 1 ha prodotto nel corso degli anni una certa confusione in quanto si credeva che un profilo senza punto di flesso, come quello di Blasius, fosse stabile rispetto ai piccoli disturbi. Nel 1921 Prandtl mostrò che l'effetto della viscosità può essere destabilizzante per certi numeri d'onda α e numeri di Reynolds finiti. Questo fu verificato nel 1929 grazie ai calcoli di Tollmien per il profilo di Blasius e definitivamente confermato negli anni '40 dai celeberrimi esperimenti di Schubauer e Skramstad per lo strato limite su lamina piana ad incidenza nulla in una galleria del vento a basso livello di turbolenza (si veda, in seguito, la figura 2).

1.3 Stabilità viscosa

Se si considera anche la parte viscosa, l'equazione completa di Orr-Sommerfeld è

$$i [(\alpha U - \omega) (v'' - \alpha^2 v) - \alpha U'' v] = \text{Re}^{-1} ((\cdot)_y - \alpha^2)^2 v.$$

Il flusso base può essere uno qualsiasi purché parallelo (Poiseuille, Couette o Blasius); qui consideriamo lo strato limite di Blasius su lamina piana. In questo caso la perturbazione prende il nome di onde di Tollmien-Schlichting; la curva neutra, come prima, si ottiene dall'equazione di Orr-Sommerfeld sostituendo l'opportuno flusso base (quello di Blasius). Il confronto tra la teoria lineare e gli esperimenti per il caso di stabilità spaziale è riportato in figura 2.

Alcune caratteristiche delle onde di Tollmien-Schlichting per lo strato limite di Blasius nel caso spaziale sono: il minimo numero di Reynolds critico è $\text{Re}_{cr} = 520$ oppure $\text{Re}_x = 91000$ dove $\text{Re}_x = U_e x / \nu$ e $R = \sqrt{\text{Re}_x}$. A Re_{cr} (primo punto neutro) le caratteristiche dell'onda sono $\alpha \delta^* = 0.3012$ (δ^* è lo spessore di spostamento), $\omega / \alpha_r = 0.3961 U_e$ e $\omega \nu / U_e^2 = 2.29 \cdot 10^{-4}$. Il numero d'onda massimo dell'onda instabile è $\alpha \delta^* = 0.35$, per cui la lunghezza d'onda minima è $\lambda_{\min} = 2\pi \delta^* / 0.35 \approx 18 \delta^* \approx 6 \delta$ ($\delta = \sqrt{x \nu / U_e}$).

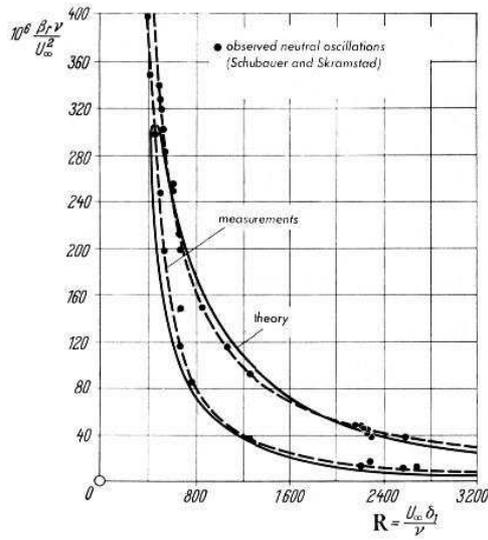


Figura 2: Curva di stabilità neutra per lo strato limite su lamina piana ad incidenza nulla. Confronto tra: dati sperimentali (●), esperimenti di Schubauer e Skramstad (1947), e curva teorica (linea continua) di Tollmien (1929). (Schlichting).

Pertanto le onde di Tollmien–Schlichting sono *onde lunghe* rispetto allo spessore di strato limite. Infine, la velocità di fase massima è $\omega/\alpha_r \approx 0.4U_e$, il che significa che le onde di Tollmien–Schlichting viaggiano piuttosto lentamente e sorgono in vicinanza della parete.

È importante sottolineare il fatto che il numero di Reynolds critico previsto dalla teoria non è il punto di transizione alla turbolenza, in quanto $Re_{tr} \approx 3 \cdot 10^6$, ovvero la transizione avviene ad un numero di Reynolds che è circa 30 volte quello critico.