

Dinamica dei Fluidi

Lezione 05 – a.a. 2009-2010

Simone Zuccher

05 Maggio 2010

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

Le soluzioni esatte determinate in forma chiusa per geometrie semplici e la soluzione di Blasius per lo strato limite su lamina sono state ottenute sotto l'ipotesi di *corrente laminare*. Tuttavia, le correnti laminari non sono molto comuni né nella vita di tutti i giorni né nelle situazioni ingegneristiche di interesse pratico. Il moto laminare è, piuttosto, l'eccezione. Questo perché nelle correnti laminari possono entrare dei disturbi esterni che, crescendo nello spazio e/o nel tempo, danno origine a delle perturbazioni rispetto alle quali la corrente laminare non è più stabile. Si ha quindi la *transizione da corrente laminare a corrente turbolenta*.

1 Corrente confinata in un tubo – l'esperimento di Reynolds

Storicamente, la transizione da corrente laminare a corrente turbolenta fu studiata da Reynolds nel famoso esperimento con il colorante pubblicato nel 1883 e riportato in figura 1. L'esperimento consisteva nell'osservazione di una corrente d'acqua in un tubo a sezione circolare, nota come corrente di Hagen-Poiseuille, caratterizzata da un profilo assialsimmetrico tipo parabolico. Reynolds notò che al crescere del numero di Reynolds $Re = \frac{Ud}{\nu}$, essendo U la velocità media della corrente ($U = Q/A$, dove Q è la portata in volume e A l'area della sezione del tubo), d il diametro del tubo e ν la viscosità dell'acqua, il colorante rilasciato al centro della corrente si comportava in modo progressivamente sempre più irregolare, come riportato in figura 2. Indicando con Re_{cri} il numero di Reynolds *critico* al quale si osserva lo scostamento dalla corrente laminare, Reynolds osservò che il comportamento irregolare si presentava ad un Re_{cri} basso se l'imboccatura del tubo presentava un raccordo poco levigato, mentre se l'imboccatura e tutto l'interno del tubo erano molto ben levigati allora Re_{cri} era più elevato. Il miglior risultato ottenuto fino ad ora facendo molta attenzione a minimizzare i disturbi che, purtroppo, sono necessariamente introdotti in una corrente reale, è di $Re_{cri} \approx 40000$. È chiaro che il limite superiore di Re_{cri} non è noto, mentre è noto il limite inferiore: se il numero di Reynolds è inferiore a circa $Re_{cri} \approx 2300$, allora la corrente in un tubo circolare è laminare.

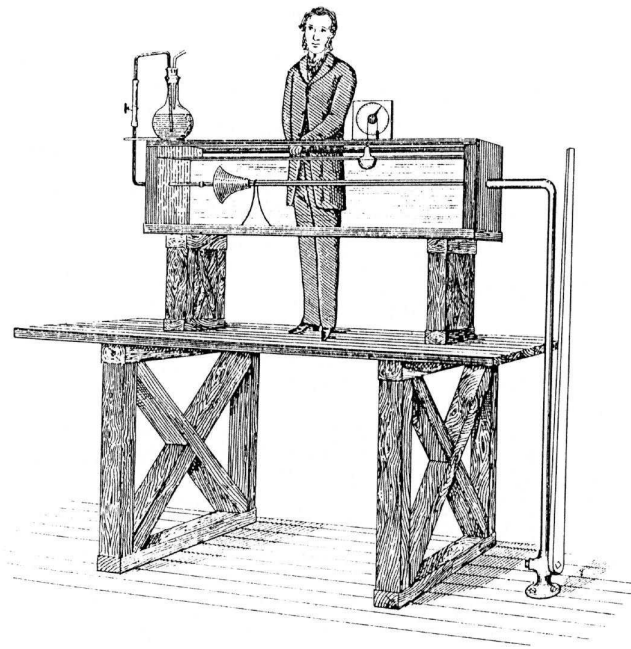


Figura 1: Schematizzazione dell'esperimento di Reynolds con il colorante preso dal suo articolo del 1883.

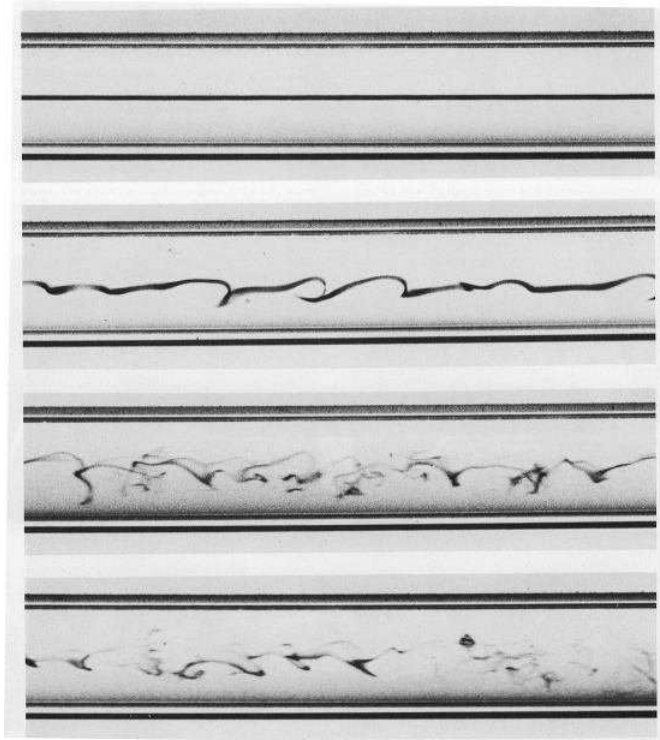


Figura 2: Ripetizione dell'esperimento di Reynolds.

Il processo di progressivo passaggio da un moto ordinato ad uno disordinato può essere visualizzato in modo efficace tramite un sottile filamento di colorante rilasciato nell'acqua. Come visibile in figura 2, fintanto che la corrente si mantiene laminare il filamento di colorante è molto ben definito e si mantiene sottile. Aumentando il numero di Reynolds (ovvero la velocità della corrente), ad un certo punto si osserva l'insorgere di "ondulazioni" del filamento colorato che diventano sempre più complicate al crescere del numero di Reynolds. Questo rimescolamento causa un aumento dello scambio di quantità

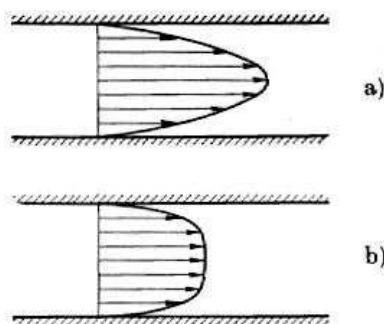


Figura 3: Profilo di velocità in un tubo a sezione circolare: a) corrente laminare; b) corrente turbolenta.

di moto tra le molecole che a sua volta fa sì che i gradienti di velocità si attenuino. Sperimentalmente si osserva, infatti, che il profilo di velocità di una corrente turbolenta all'interno di un tubo è molto più uniforme del profilo di una corrente laminare, come mostrato in figura 3.

In pratica, la *corrente laminare* consiste in un moto molto ordinato delle singole molecole, mentre la *corrente turbolenta*, o *turbolenza*, è la manifestazione macroscopica di un moto delle molecole disordinato, instazionario, imprevedibile, caratterizzato da tridimensionalità e forte rimescolamento, nonché da una grande varietà di scale. Come osservato da Reynolds, la transizione da corrente laminare a corrente turbolenta può dipendere da moltissimi fattori tra cui la rugosità di parete, la trasmissione o meno di calore, vibrazioni, rumore acustico, e altri disturbi.

2 La transizione in correnti aperte – lo strato limite

Nonostante storicamente lo studio della transizione da una corrente laminare a una turbolenta sia iniziato con il flusso in un condotto chiuso a sezione circolare, nei primi del '900 si estese allo strato limite, in particolare su lamina piana essendo questo il caso più facile di strato limite. Dai risultati riportati in figura 4 si evince che la transizione nello strato limite su lamina piana per una corrente incomprimibile avviene a circa

$$\text{Re}_{x,\text{cri}} = \left(\frac{Ux}{\nu} \right)_{\text{cri}} \approx 3.5 \times 10^5,$$

essendo x la distanza dal bordo d'attacco, U la velocità della corrente asintotica e ν la viscosità del fluido. Inoltre, il passaggio allo strato limite turbolento provoca un

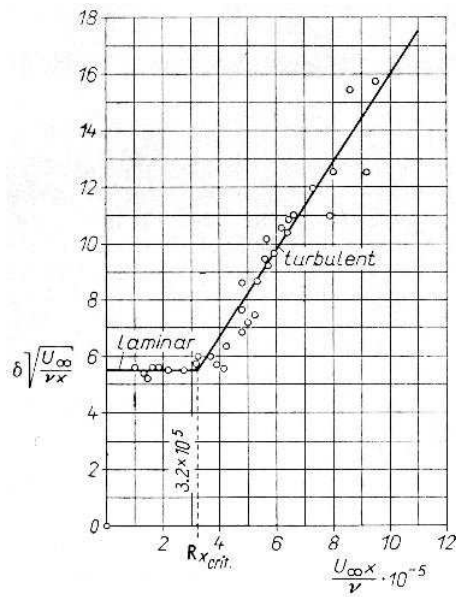


Figura 4: Spessore dello strato limite in funzione del numero di Reynolds basato sulla distanza x dal bordo d'attacco per lo strato limite su una lamina piana (Schlichting).

aumento dello spessore dello strato limite accompagnato da un cambiamento anche del profilo di velocità, come confermato sperimentalmente dai risultati riportati in figura 5. Si osserva che, come nel caso della transizione alla turbolenza nel tubo, anche per la lamina piana il profilo di velocità turbolenta è più “pieno” di quello laminare. Questo

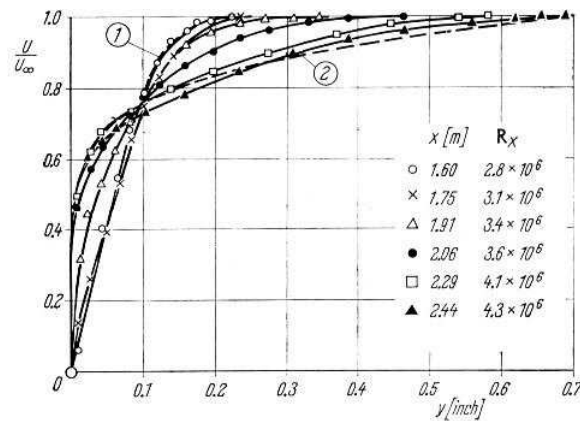


Figura 5: Profili di velocità per lo strato limite su lamina piana misurati da Schubauer e Klebanoff (1955). (1) Laminare, profilo di Blasius; (2) Turbulent. (Schlichting).

fatto da un lato causa un decremento del fattore di forma H che passa da un valore $H_{\text{laminare}} = 2.59$ nel caso laminare ad un valore $H_{\text{turbolento}} \approx 1.5$ in regime turbolento. La ripercussione maggiore del fatto che il profilo di velocità cambia e diventa più “pieno” si ha dal punto di vista ingegneristico. Infatti, come noto, il coefficiente di attrito viscoso

dipende dalla derivata della velocità alla parete. Siccome nei profili turbolenti questa derivata è maggiore che nel caso laminare (figura 5), la resistenza di attrito viscoso per strati limite turbolenti è maggiore che nel caso laminare. Pertanto, si vorrebbe mantenere la corrente laminare il più possibile su aerei (ali e fusoliere), sommergibili, automobili, e su tutte le macchine che si muovono all'interno di un fluido consumando energia.

Un'altra caratteristica interessante della transizione alla turbolenza, che si riscontra non solo nello strato limite ma anche nella corrente in un condotto come l'esperimento di Reynolds, è il fenomeno dell'*intermittenza*. La figura 6 mostra, sempre per gli

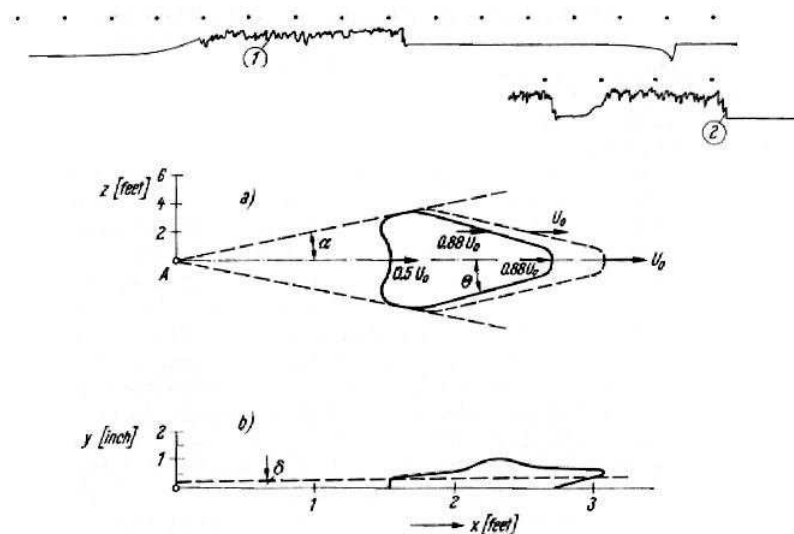


Figura 6: Crescita di uno spot turbolento artificiale in uno strato limite su lamina piana ad incidenza nulla, come misurato da Schubauer e Klebanoff (1955). (Schlichting).

esperimenti di Schubauer e Klebanoff (1955), che nel caso della lamina piana il processo di transizione è *intermittente* nel senso che in certe regioni irregolari non c'è il passaggio totale alla turbolenza ma si osserva principalmente lo strato limite turbolento alternato a quello laminare. Queste regioni, chiamate *spot turbolenti*, hanno forma più o meno irregolare, ma assimilabile ad una "V", e appaiono ad intervalli irregolari e in zone distribuite in modo del tutto casuale. Ai bordi di queste regioni caratterizzate da moto turbolento si alternano sia il moto laminare che turbolento.

3 Stabilità lineare per correnti piane e parallele

Lo scopo dell'analisi di stabilità lineare è di trovare una risposta alla domanda: *come è possibile che una corrente inizialmente laminare diventi turbolenta?*

L'approccio classico alla teoria della stabilità lineare dello strato limite laminare si basa sulla *linearizzazione* delle equazioni di Navier–Stokes nell'intorno di un *flusso base* noto. Una volta ricavate le equazioni per i piccoli disturbi, il flusso base viene detto *stabile* se l'ampiezza dei disturbi rimane limitata, *instabile* altrimenti, ossia se l'ampiezza dei disturbi cresce. La stabilità può essere ulteriormente suddivisa in *stabilità asintotica*

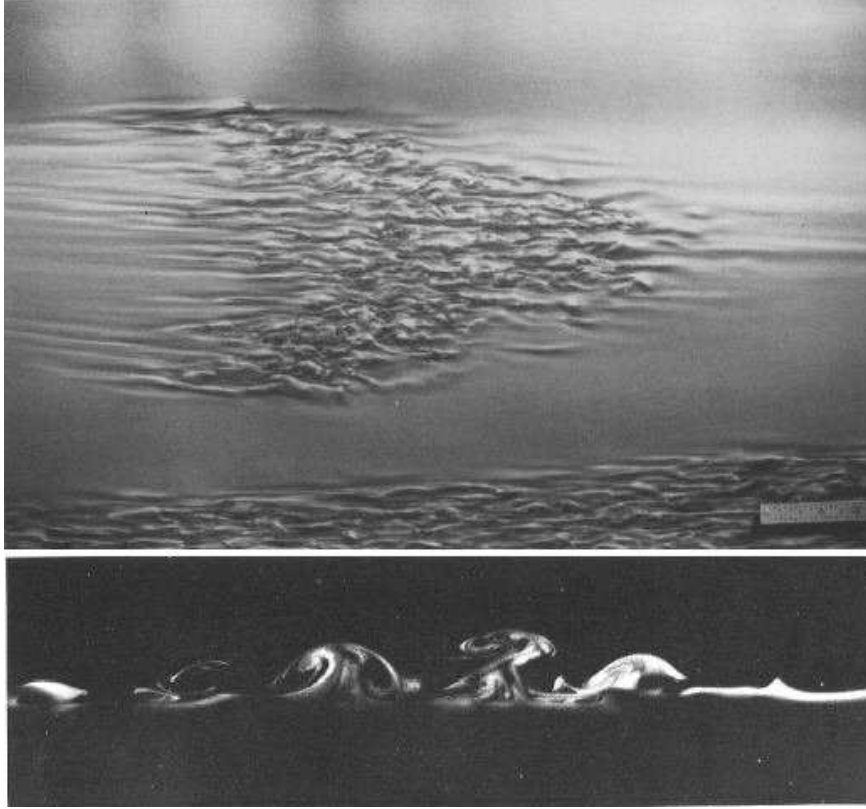


Figura 7: Spot turbulento: visione dall'alto, laterale e sezione.

(nota anche come *stabilità in senso stretto*) se il disturbo tende a zero, oppure in *stabilità marginale* se il disturbo, pur rimanendo limitato, non sparisce del tutto. Per introdurre l'analisi di stabilità, consideriamo il caso semplice di una corrente incomprimibile a densità costante. Si ricordi che, sotto queste ipotesi, la termodinamica (ovvero l'equazione dell'energia) risulta completamente disaccoppiata dal resto delle equazioni (continuità e conservazione del momento della quantità di moto) pertanto la pressione, che è definita a meno di una costante p_0 , può essere espressa tramite il potenziale termodinamico $\mathcal{P} = (p - p_0)/\rho$. Se indichiamo con

$$U(x, y, z, t), \quad V(x, y, z, t), \quad W(x, y, z, t), \quad \mathcal{P}(x, y, z, t)$$

rispettivamente le tre componenti della velocità e la pressione (intesa come potenziale termodinamico), allora le equazioni di Navier-Stokes nel caso incomprimibile a densità

costante diventano

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + \mathcal{V} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} + \mathcal{W} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial z^2} \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \mathcal{V} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \mathcal{W} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial z^2} \right) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} + \mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} + \mathcal{V} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y} + \mathcal{W} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial z^2} \right). \quad (3.4)$$

Consideriamo un flusso base (U, V, W, P) costituito da una corrente bidimensionale, parallela e stazionaria. Indichiamo con $U = U(y)$ la componente di velocità nella direzione della corrente, con $V \equiv 0$ la componente in direzione perpendicolare alla parete e con $W \equiv 0$ la componente trasversale alla corrente. Si osservi che $U = U(y)$ e $V \equiv 0$ per l'ipotesi di corrente parallela, mentre $W \equiv 0$ per l'ipotesi di corrente bidimensionale. Sotto queste ipotesi, le variabili $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{P}$ sono la somma del flusso base (U, V, W, P) e della perturbazione $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p})$ (supposta piccola e dipendente dal tempo):

$$\mathcal{U}(x, y, z, t) = U(y) + \tilde{u}(x, y, z, t), \quad \mathcal{V}(x, y, z, t) = \tilde{v}(x, y, z, t)$$

$$\mathcal{W}(x, y, z, t) = \tilde{w}(x, y, z, t), \quad \mathcal{P}(x, y, z, t) = P(x, y) + \tilde{p}(x, y, z, t).$$

Inserendo queste variabili nelle equazioni di Navier–Stokes, trascurando i termini di second'ordine (ovvero i prodotti delle perturbazioni $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}$) e considerando che il flusso base (U, P) è già soluzione delle equazioni di Navier–Stokes, si ottengono facilmente le equazioni linearizzate

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{dU}{dy} \tilde{v} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} \right) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} \right) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right). \quad (3.8)$$

Si osservi che nelle equazioni linearizzate sono presenti pochissimi termini grazie alle ipotesi sul flusso base (stazionario, parallelo, bidimensionale). Siccome le equazioni alle derivate parziali (3.5)-(3.8) hanno i coefficienti dipendenti dalla sola y , le soluzioni possono essere espresse come onde del tipo

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}) = (u(y), v(y), w(y), p(y)) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}.$$

Inserendo queste espressioni nelle (3.5)-(3.8) si ottiene il sistema di equazioni

$$i\alpha u + v' + i\beta w = 0 \quad (3.9)$$

$$-i\omega u + i\alpha U u + U' v = -i\alpha p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta u \quad (3.10)$$

$$-i\omega v + i\alpha U v = -p' + \frac{1}{\text{Re}} \Delta v \quad (3.11)$$

$$-i\omega w + i\alpha U w = -i\beta p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta w, \quad (3.12)$$

dove il simbolo Δ denota l'operatore laplaciano

$$\Delta = \frac{d^2}{dy^2} - (\alpha^2 + \beta^2),$$

e dove con U' si è indicato dU/dy e analogamente $v' = dv/dy$ e $p' = dp/dy$, essendo tutte funzioni della sola y . Con l'intento di ridurre il numero di incognite da quattro a due, introduciamo la componente della vorticità nella direzione y

$$\eta = i\beta u - i\alpha w \quad (3.13)$$

in modo da riscrivere le equazioni (3.9)-(3.12) nelle sole incognite (η, v) . Osserviamo anzitutto che risolvendo per le variabili (u, w) il sistema formato dalla definizione di η (3.13) e dall'equazione di continuità (3.9), si ottengono immediatamente le espressioni di u e w

$$u = \frac{i(\alpha v' - \beta \eta)}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{e} \quad w = \frac{i(\alpha \eta + \beta v')}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (3.14)$$

Moltiplichiamo ora l'equazione (3.10) per $i\beta$ e l'equazione (3.12) per $i\alpha$

$$i(\alpha U - \omega)i\beta u + U'i\beta v = \alpha\beta p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta i\beta u$$

$$i(\alpha U - \omega)i\alpha w = \alpha\beta p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta i\alpha w,$$

e sottraiamo la seconda dalla prima ottenendo

$$i(\alpha U - \omega)[i\beta u - i\alpha w] + U'i\beta v = \frac{1}{\text{Re}} \Delta [i\beta u - i\alpha w].$$

Usando la definizione di η (si veda l'equazione (3.13)), questa equazione diventa semplicemente

$$i(\alpha U - \omega)\eta + U'i\beta v = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \eta. \quad (3.15)$$

Concentrandoci sull'equazione (3.12) e sostituiamo in essa l'espressione (3.14) per w

$$i(\alpha U - \omega) \frac{i(\alpha \eta + \beta v')}{\alpha^2 + \beta^2} = -i\beta p + \frac{i\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{1}{\text{Re}} \Delta \eta + \frac{i\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{1}{\text{Re}} \Delta v'.$$

Rimpiazzando in quest'ultima $\Delta\eta/\text{Re}$ con l'espressione ricavata dall'equazione (3.15), semplificando l'unità immaginaria i in tutti i termini e moltiplicandoli per $\alpha^2 + \beta^2$ si ha

$$i(\alpha U - \omega)(\alpha\eta + \beta v') = -\beta(\alpha^2 + \beta^2)p + \alpha[i(\alpha U - \omega)\eta + U'i\beta v] + \beta\frac{1}{\text{Re}}\Delta v',$$

da cui, elidendo il termine $i(\alpha U - \omega)\alpha\eta$ a destra e sinistra e semplificando i rimanenti termini per β , si ottiene

$$i(\alpha U - \omega)v' = -(\alpha^2 + \beta^2)p + i\alpha U'v + \frac{1}{\text{Re}}\Delta v'. \quad (3.16)$$

Si osservi che questa equazione contiene le incognite p e v , così come l'equazione (3.11), mentre l'idea originaria era di riscrivere il sistema di equazioni (3.9)-(3.12) nelle sole incognite (η, v) . La pressione p può essere facilmente eliminata sia dalla (3.11) che dalla (3.16) sommando le equazioni ottenute moltiplicando la (3.11) per $-(\alpha^2 + \beta^2)$ e derivando la (3.16) rispetto a y . Così facendo si hanno le due equazioni

$$-i(\alpha U - \omega)(\alpha^2 + \beta^2)v = (\alpha^2 + \beta^2)p' - (\alpha^2 + \beta^2)\frac{1}{\text{Re}}\Delta v$$

$$i\alpha U'v' + i(\alpha U - \omega)v'' = -(\alpha^2 + \beta^2)p' + i\alpha U''v + i\alpha U'v' + \frac{1}{\text{Re}}\Delta v'',$$

che sommate danno, dopo aver eliso $i\alpha U'v'$ a destra e sinistra della seconda,

$$i(\alpha U - \omega)[v'' - (\alpha^2 + \beta^2)v] = i\alpha U''v + \frac{1}{\text{Re}}\Delta[v'' - (\alpha^2 + \beta^2)v].$$

Dopo aver osservato che $v'' - (\alpha^2 + \beta^2)v = \Delta v$, questa equazione può essere riscritta in modo compatto come

$$i(\alpha U - \omega)\Delta v - i\alpha U''v = \text{Re}^{-1}\Delta\Delta v, \quad (3.17)$$

che è un'equazione differenziale ordinaria del quart'ordine e omogenea per la sola incognita v . Essa fu derivata indipendentemente da Orr (1907) e Sommerfeld (1908) e per questa ragione prende il nome di *equazione di Orr-Sommerfeld*. Le opportune condizioni al contorno ad essa associate richiedono che la perturbazione si annulli agli estremi del dominio:

$$\begin{array}{ll} v(\pm h) = v'(\pm h) = 0 & \text{correnti in condotti} \\ v(0) = v'(0) = 0; \quad v(\infty) = v'(\infty) = 0 & \text{strati limite} \\ v(\pm\infty) = v'(\pm\infty) = 0 & \text{free shear layers.} \end{array}$$

In conclusione, il sistema di equazioni lineari (3.9)-(3.12) nelle incognite (u, v, w, p) è stato ricondotto alle sole equazioni (3.15) e (3.17) nelle incognite (η, v) , ovvero i due sistemi

$$\begin{cases} i\alpha u + v' + i\beta w = 0 \\ i(\alpha U - \omega)u + U'v = -i\alpha p + \text{Re}^{-1}\Delta u \\ i(\alpha U - \omega)v = -p' + \text{Re}^{-1}\Delta v \\ i(\alpha U - \omega)w = -i\beta p + \text{Re}^{-1}\Delta w \end{cases} \quad (3.18)$$

e

$$\begin{cases} i(\alpha U - \omega)\eta + i\beta U'v = \text{Re}^{-1}\Delta\eta \\ i(\alpha U - \omega)\Delta v - i\alpha U''v = \text{Re}^{-1}\Delta\Delta v \end{cases} \quad (3.19)$$

sono del tutto equivalenti. Si osservi che le condizioni al contorno per η in presenza di pareti solide sono omogenee ($\eta = 0$) a seguito della definizione di η . Una possibile strategia di soluzione del problema (3.19) consiste nel risolvere dapprima la seconda equazione ottenendo v e poi sostituirla nella prima per ottenere η . Dal momento che sia l'equazione di Orr-Sommerfeld (che è nella sola incognita v) sia le condizioni al contorno per v sono omogenee, risolvere la seconda equazione del problema (3.19) equivale a risolvere un problema agli autovalori dal quale si deriva una relazione di dispersione del tipo

$$D(\alpha, \beta, \omega, \text{Re}) = 0.$$

Se si considera la stabilità temporale, allora α, β e Re sono fissati e reali, mentre ω è complesso e la sua parte immaginaria fornisce il tasso di crescita temporale; per la stabilità spaziale ω e Re sono fissati e reali, mentre (a β fissato) la parte immaginaria di α (o la parte immaginaria di β se α è fissato) fornisce la crescita spaziale. La soluzione $v(y)$ è detta autofunzione.

Nel caso di disturbo bidimensionale, si ha $\beta = 0$ e $w = 0$; pertanto $\eta \equiv 0$ ed è quindi necessario risolvere la sola equazione di Orr-Sommerfeld (3.17). Anche se storicamente i primi disturbi ad essere studiati furono bidimensionali, la (3.17) governa anche quelli tridimensionali. Infine, sempre nel caso bidimensionale, anziché utilizzare le variabili primitive \tilde{u} e \tilde{v} si può introdurre la funzione di corrente $\tilde{\psi} = \psi(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}$ tale che

$$\tilde{u} = \tilde{\psi}_y = \psi' e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \quad \text{e} \quad \tilde{v} = -\tilde{\psi}_x = -i\alpha\psi e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)},$$

che significa che $\psi(y)$ soddisfa la stessa equazione di $v(y)$ (l'equazione di Orr-Sommerfeld (3.17)) essendo $v(y) = -i\alpha\psi(y)$. L'analisi di stabilità permette di ricavare le curve di stabilità neutra, ovvero (nel caso di disturbo bidimensionale con $\beta = w = 0$) il luogo dei punti del piano $\text{Re}-\alpha$ oppure $\text{Re}-\omega$ per i quali la crescita è nulla, come quelle riportate in figura 8.

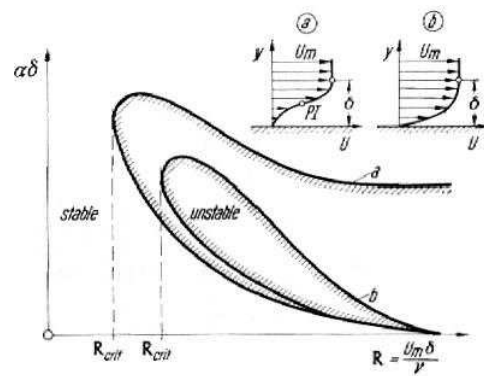


Figura 8: Curva di stabilità neutra nel caso di analisi spaziale. (a) flusso base con punto di flesso (instabilità non viscosa); (b) flusso base di strato limite su lamina piana o accelerante (instabilità viscosa). Si notino le diverse regioni di stabilità all'esterno e di instabilità all'interno dipendentemente dal tipo di stabilità (viscosa o non viscosa) considerata (Schlichting).