# Dinamica dei Fliudi
# Lezione 03 – a.a. 2009-2010

Simone Zuccher

30 Aprile 2010

**Nota**. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

## 1 Profilo di Blasius (corrente esterna uniforme)

Nel caso di corrente esterna uniforme, ovvero $U_\mathrm{e}(x) = U =$ costante, supponendo che i profili di velocità siano "simili" al variare di $x$, ovvero che siano una "riscalatura" di una funzione universale, le equazioni dello strato limite di Prandtl si riducono all'equazione differenziale ordinaria

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \tag{1.1}$$

con le relative condizioni al contorno

$$f(0) = f'(0) = 0 \tag{1.2}$$
$$f'(\infty) = 1, \tag{1.3}$$

formando un problema ai limiti non lineare del terz'ordine. Se $f(\eta)$ è la soluzione (numerica, tabulata, o approssimata in qualsiasi altro modo) del precedente problema e la variabile indipendente è $\eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$, allora i profili di velocità "riscalati" in funzione delle variabili fisiche $(x, y)$ sono

$$u(x,y) = U f'\left(y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right) \tag{1.4}$$
$$v(x,y) = \frac{U}{2}\left[\frac{y}{x} f'\left(y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right) - \sqrt{\frac{\nu}{U x}} f\left(y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right)\right]. \tag{1.5}$$

Dalle funzioni $f(\eta)$, $f'(\eta)$ e $f''(\eta)$, si possono ottenere diverse informazioni utili riguardo allo strato limite su lamina piana.

## 1.1 Spessore dello strato limite

Il profilo di $f'(\eta) = u(\eta)/U$ mostra che il 99% della velocità esterna viene raggiunta per $\eta \approx 5$. Questo significa che lo spessore di strato limite è circa

$$\delta_{99} = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U}}.$$

Pertanto, su una lamina piana immersa in una corrente d'aria ($\nu = 1.48 \cdot 10^{-5}$) a velocità di 10 m/s (36 km/h) lo spessore dello strato limite a 1 m dal bordo d'attacco è $\delta_{99} \approx$ 6 mm.

## 1.2 Valore asintotico della velocità normale alla parete

Siccome quanto $\eta \to \infty$ si ha $f'(\eta) \to 1$, si ottiene

$$v(x, \infty) = \frac{U}{2}\left[\frac{y}{x} - \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} f(\eta)\right] = \frac{U}{2}\sqrt{\frac{\nu}{Ux}}\left[y\sqrt{\frac{U}{\nu x}} - f(\eta)\right] = U\sqrt{\frac{\nu}{Ux}}\left[\frac{\eta - f(\eta)}{2}\right].$$

Essendo $f(\eta)$ lineare con $\eta$, dai valori numerici si ha

$$v_\infty(x) = 0.8604 \cdot U\sqrt{\frac{\nu}{Ux}}.$$

Riprendendo l'esempio precedente, ad un metro dal bordo d'attacco la velocità in direzione perpendicolare alla parete sufficientemente al di fuori dallo strato limite, per una corrente d'aria ($\nu = 1.48 \cdot 10^{-5}$) a velocità di 10 m/s (36 km/h), è $v_\infty \approx 0.01$ m/s. Pertanto, la presenza della lamina piana, anche se di spessore nullo, causa uno scostamento dalla corrente parallela.

## 1.3 Resistenza di attrito

La resistenza di attrito si calcola facilmente come integrale dello sforzo tangenziale a parete:

$$D = 2\int_0^L \tau(x, 0) b \, \mathrm{d}x,$$

dove $L$ è la distanza dal bordo d'attacco (tipicamente la lunghezza della lamina, se si è interessati alla resitenza totale), $b$ è la larghezza della lamina piana, e il fattore 2 è dovuto al fatto che la lamina piana ha due facce. Si ha

$$\tau_0(x) = \tau(x, 0) = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu U\sqrt{\frac{U}{\nu x}} f''(0) = 0.332 \cdot \mu U\sqrt{\frac{U}{\nu x}},$$

da cui

$$D = 2\int_0^L \tau(x, 0) b \, \mathrm{d}x = 0.664 \cdot b\mu U\sqrt{\frac{U}{\nu}} \int_0^L \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = 1.328 \cdot bU\sqrt{\mu\rho U L} = 1.328 \cdot b\sqrt{U^3 \mu\rho L}.$$

Introducendo il coefficiente di attrito definito come

$$c_f = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A},$$

essendo per la lamina piana $A = 2bL$, si ottiene

$$c_f = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = \frac{1.328 \cdot b\sqrt{U^3 \mu \rho L}}{\frac{1}{2}\rho U^2 2bL} = \frac{1.328}{\sqrt{\frac{UL}{\nu}}} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}},$$

dove $Re_L = \frac{UL}{\nu}$ denota il numero di Reynolds basato sulla lunghezza della lamina.

# 2 Grandezze caratteristiche dello strato limite

Siccome la presenza dello strato limite provoca un difetto di velocità rispetto alla corrente esterna imperturbata, in presenza di strato limite si osserva sia una diminuzione della portata in massa sia una diminuzione della quantità di moto.

## 2.1 Lo spessore di spostamento

Ha senso, quindi, chiedersi di quanto dovrebbe essere "spostata" verso l'esterno la parete in modo tale che la portata in massa effettiva rimanga uguale a quella di una corrente uniforme. Chiamiamo *spessore di spostamento* e lo indichiamo con $\delta^*$ (o $\delta_1$) proprio questa distanza. A seguito della definizione si ha

$$\rho U \delta^* = \int_0^\infty \rho\,(U - u)\ \mathrm{d}y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho U \delta^* = \rho U \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right)\ \mathrm{d}y,$$

da cui la definizione

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right)\ \mathrm{d}y.$$

Per lo strato limite su lamina piana si ha

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right)\ \mathrm{d}y = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int_0^\infty [1 - f'(\eta)]\ \mathrm{d}\eta = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}[\tilde{\eta} - f(\tilde{\eta})],$$

dove $\tilde{\eta} \to \infty$. Siccome $f(\eta)$ è lineare con $\eta$ e la differenza $[\eta - f(\eta)] = 1.7208$ per $\eta \to \infty$, si ha

$$\delta^* = 1.7208\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\delta^*}{x} = \frac{1.7208}{\sqrt{Re_x}},$$

con $Re_x = \frac{Ux}{\nu}$.

## 2.2 Lo spessore di quantità di moto

Sempre a seguito del fatto che lo strato limite causa un difetto di velocità rispetto alla corrente uniforme, ha senso chiedersi di quanto dovrebbe essere "spostata" verso l'esterno la parete in modo tale che la quantità di moto effettiva rimanga uguale a quella della corrente uniforme. Chiamiamo *spessore di quantità di moto* e lo indichiamo con $\theta$ (o $\delta_2$) proprio questa distanza. A seguito della definizione si ha

$$\rho U^2 \theta = \int_0^\infty \rho u \, (U - u) \, \mathrm{d}y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho U^2 \theta = \rho U^2 \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \mathrm{d}y,$$

da cui la definizione

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \mathrm{d}y.$$

Per lo strato limite su lamina piana si ha

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \mathrm{d}y = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int_0^\infty f'(\eta) \, [1 - f'(\eta)] \, \mathrm{d}\eta = 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{U}},$$

ovvero

$$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}},$$

## 2.3 Fattore di forma

Un ultimo parametro che distingue uno strato limite da un altro è il fattore di forma $H$ definito dal rapporto

$$H = \frac{\delta^*}{\theta}.$$

Si osservi che, siccome $\delta^* > \theta$, allora $H > 1$. In particolare, per lo strato limite di Blasius esso risulta costante e pari a $H = 2.5916$; mentre per strati limite turbolenti si ha $1.15 < H < 1.4$. Pertanto, al diminuire di $H$ il profilo di velocità diventa più "pieno", caratteristica tipica dei profili turbolenti.

# 3 Equazione integrale di von Kàrmàn

Ripartendo dalle equazioni dello strato limite

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3.6}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_\mathrm{e} \frac{\mathrm{d}U_\mathrm{e}}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{3.7}$$

a $x$ fissata integriamo l'equazione della quantità di moto in direzione normale alla parete tra 0 e un valore $h$ *esterno* allo strato limite ottenendo:

$$\int_0^h \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U_\mathrm{e} \frac{\mathrm{d}U_\mathrm{e}}{\mathrm{d}x} \right] \mathrm{d}y = \int_0^h \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \, \mathrm{d}y = \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_0^h = -\frac{\mu}{\rho} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_0 = -\frac{\tau(x, 0)}{\rho} = -\frac{\tau_\mathrm{w}(x)}{\rho},$$

dove si è indicato con $\tau_\mathrm{w}$ lo sforzo tangenziale a parete e dove si è usato il fatto che al di fuori dello strato limite $u(y) = U_\mathrm{e}$ e pertanto $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$. Sfruttando l'equazione di continuità ed integrando in $y$, la velocità $v$ è

$$v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y',$$

che serve per ottenere il secondo termine dell'equazione integrale

$$\int_0^h \left[ v\frac{\partial u}{\partial y} \right] dy = -\int_0^h \left[ \left( \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y' \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right] dy.$$

Integrando per parti e consideranto $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ come fattore differenziale e $\displaystyle\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y'$ come fattore finito, si ha

$$\int_0^h \left[ v\frac{\partial u}{\partial y} \right] dy = -\left[ u \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y' \right]_0^h + \int_0^h u\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y = -U_\mathrm{e}\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y' + \int_0^h u\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^h \left[ u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - U_\mathrm{e}\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{e}}{\mathrm{d}x} \right] \mathrm{d}y &= \int_0^h \left[ 2u\frac{\partial u}{\partial x} - U_\mathrm{e}\frac{\partial u}{\partial x} - U_\mathrm{e}\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{e}}{\mathrm{d}x} \right] \mathrm{d}y \\
&= \int_0^h \left[ \frac{\partial u^2}{\partial x} - \left( \frac{\partial}{\partial x}(U_\mathrm{e}u) - u\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{e}}{\mathrm{d}x} \right) - U_\mathrm{e}\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{e}}{\mathrm{d}x} \right] \mathrm{d}y \\
&= \int_0^h \left[ \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2 - U_\mathrm{e}u\right) - (U_\mathrm{e} - u)\,\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{e}}{\mathrm{d}x} \right] \mathrm{d}y \\
&= -\int_0^h \frac{\partial}{\partial x}\left(u(U_\mathrm{e} - u)\right) dy - \frac{\mathrm{d}U_\mathrm{e}}{\mathrm{d}x}\int_0^h (U_\mathrm{e} - u) dy \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\left( \int_0^{h\to\infty} u(U_\mathrm{e} - u) dy \right) - \frac{\mathrm{d}U_\mathrm{e}}{\mathrm{d}x}\int_0^{h\to\infty} (U_\mathrm{e} - u) dy \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\left(U_\mathrm{e}^2\theta\right) - \frac{\mathrm{d}U_\mathrm{e}}{\mathrm{d}x}U_\mathrm{e}\delta^*,
\end{aligned}$$

dove si è passati al limite $h \to \infty$ perché le funzioni integrande sono nulle fuori dallo strato limite. In conclusione,

$$\frac{\tau_\mathrm{w}(x)}{\rho} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(U_\mathrm{e}^2\theta\right) + \delta^* U_\mathrm{e}\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{e}}{\mathrm{d}x},$$

nota come *equazione integrale di von Kàrmàn.* La potenza di questa equazione integrale consiste nel fatto che può essere applicata sia per strati limite laminari che turbolenti. Introducendo il coefficiente di attrito *locale*

$$C_f = \frac{\tau_\mathrm{w}}{\frac{1}{2}\rho U_\mathrm{e}^2}$$

si ottiene la forma adimensionale dell'equazione integrale

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} + (H+2)\frac{\theta}{U_\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{e}}{\mathrm{d}x}.$$

Nel caso particolare di lamina piana, siccome $\dfrac{\mathrm{d}U_\mathrm{e}}{\mathrm{d}x} = 0$, su una singola faccia si ha

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}.$$

Integrando in $x$ tra 0 ed $L$ si ottiene il coefficiente di attrito *globale* su una faccia

$$c_f = \int_0^L C_f \,\mathrm{d}x = 2\theta_L,$$

da cui il coefficiente di attrito su entrambe le facce

$$c_f = 4\theta_L.$$

In conclusione, il coefficiente di attrito di una lamina piana può essere dedotto sperimentalmente misurando il solo spessore di quantità di moto al bordo di uscita della lamina.