

# Dinamica dei Fluidi

## Lezione 01 – a.a. 2009-2010

Simone Zuccher

21 Aprile 2010

**Nota.** Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore ([zuccher@sci.univr.it](mailto:zuccher@sci.univr.it)).

### 1 Risoluzione numerica delle equazioni dello strato limite 2D su lamina piana in corrente uniforme

Consideriamo il problema dello strato limite bidimensionale su una lamina piana per un fluido incomprimibile in coordinate cartesiane  $(x, y)$

$$u_x + v_y = 0 \quad (1.1)$$

$$uu_x + vu_y = \nu u_{yy} \quad (1.2)$$

e le relative condizioni al contorno

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad u(x, \infty) = 1$$

e condizioni iniziali

$$u(0, y) = 1, \quad v(0, y) = 0.$$

Moltiplicando l'equazione di continuità per  $u$  e sommandola all'equazione della quantità di moto, si ottiene il sistema in forma conservativa

$$u_x + v_y = 0 \quad (1.3)$$

$$(u^2)_x + (uv)_y = \nu u_{yy}, \quad (1.4)$$

che risulta più agevole da risolvere numericamente in quanto “assorbe” meglio la discontinuità della soluzione al bordo d'attacco  $x = 0$ . Si noti che le equazioni sono paraboliche in  $x$ . Pertanto, partendo dalla condizione iniziale a  $x = x_{\text{in}}$  (posizione iniziale), è possibile marciare in  $x$  tramite uno schema esplicito fino a  $x = x_{\text{fi}}$  (posizione finale).

Per quanto riguarda la discretizzazione, siccome i gradienti di velocità sono più forti in prossimità di  $y = 0$  e  $x = 0$ , utilizziamo una griglia cartesiana  $(x_i, y_j)$  non equispaziata con i punti maggiormente addensati in prossimità di tali zone (si veda la figura 1). Per

semplicità utilizziamo uno schema a differenze finite: Eulero esplicito (a passo variabile) in  $x$  e differenze finite del second'ordine (non equispaziate) in  $y$ . Inoltre, assumiamo che le variabili  $u_{i,j}$  e  $v_{i,j}$  siano note nei nodi della griglia cartesiana, ma ad ogni  $x$  soddisfiamo l'equazione di continuità in  $(x_i, \frac{y_j+y_{j-1}}{2})$  (punti intermedi della griglia in  $y$ , indicati con  $\square$ ), mentre l'equazione della quantità di moto viene soddisfatta in  $(x_i, y_j)$ , indicati con  $\bullet$  in figura 1. Pertanto, le equazioni diventano:

$$\frac{\frac{u_{i,j}+u_{i,j-1}}{2} - \frac{u_{i-1,j}+u_{i-1,j-1}}{2}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{y_j - y_{j-1}} = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{u_{i,j}^2 - u_{i-1,j}^2}{x_i - x_{i-1}} + \frac{u_{i,j+1}v_{i,j+1} - u_{i,j-1}v_{i,j-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} - \nu \frac{\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{y_{j+1}-y_j} - \frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{y_j-y_{j-1}}}{\frac{y_{j+1}-y_{j-1}}{2}} = 0 \quad (1.6)$$

Si osservi che le derivate rispetto ad  $x$  sono del prim'ordine esplicite, mentre quelle rispetto ad  $y$  sono del second'ordine esplicite. In realtà le derivate nell'equazione di continuità sono effettivamente differenze finite centrate (in  $y$ ), mentre nell'equazione della quantità di moto le derivate (prime e seconde) rispetto a  $y$  sarebbero corrette se valutate nel punto  $(x_i, \frac{y_{j+1}+y_{j-1}}{2})$ . Tuttavia questo errore non è maggiore di quello (del second'ordine) che si commette utilizzando le differenze finite centrate.

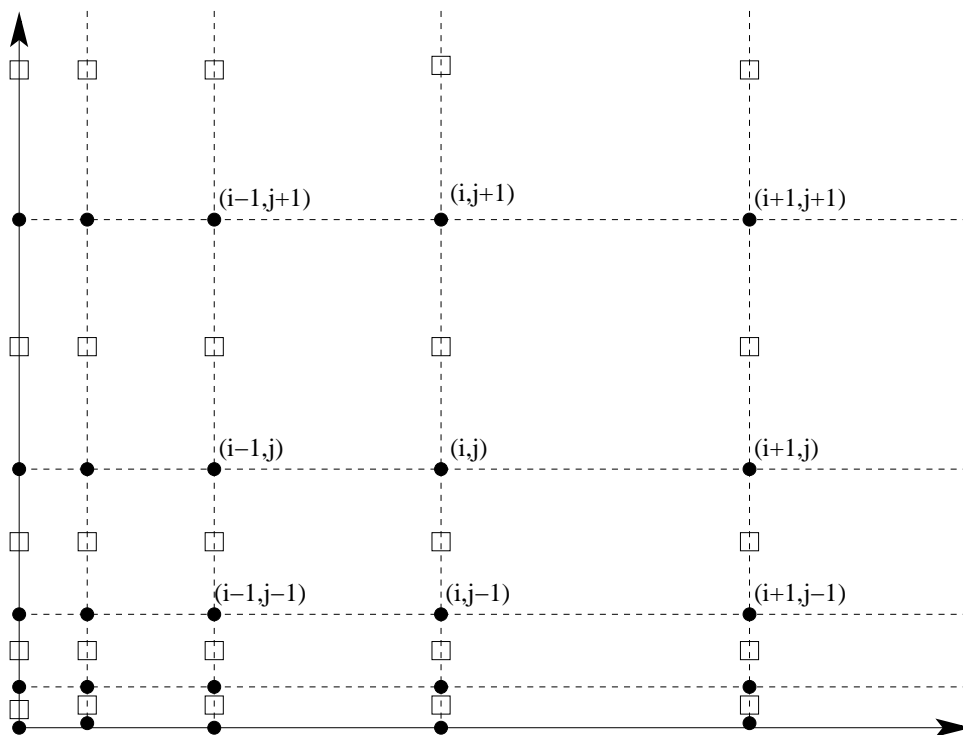


Figura 1: Griglia non equispaziata con nodi concentrati vicino alla parete ( $y = 0$ ) e vicino al bordo d'attacco ( $x = 0$ ). Le variabili  $u$  e  $v$  sono riferite ai nodi ( $\bullet$ ); l'equazione di continuità è verificata nei punti  $(x_i, \frac{y_j+y_{j-1}}{2})$ , indicati con  $\square$ , mentre l'equazione della quantità di moto è verificata nei nodi ( $\bullet$ ).

Un griglia come quella in figura 1 prende il nome di *staggered grid* (griglia “staghe-

rata”) ed è utilizzata qui perché altrimenti se l’equazione di continuità fosse soddisfatta nei nodi (•) allora i valori delle variabili nei nodi dispari (in  $y$ , a  $x$  fissata) risulterebbero disaccoppiati da quelli pari e la soluzione sarebbe oscillante.

Fissato  $x = x_i$ , per risolvere il problema è necessario solamente conoscere la soluzione alla  $x$  precedente,  $x = x_{i-1}$ . Le incognite correnti possono essere ordinate in un unico vettore  $f = [u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_N, v_N]^T$  che varia solo con  $y$ , essendo  $y_1 = 0$  e  $y_N = y_{\max} \approx \infty$ . In altre parole,

$$u_1 = u_{i,1}, \quad v_1 = v_{i,1}, \quad u_2 = u_{i,2}, \quad v_2 = v_{i,2}, \quad \dots, \quad u_N = u_{i,N}, \quad v_N = v_{i,N}.$$

Così facendo, ad ogni  $x = x_i$ , si ottiene il sistema non lineare formato dalle equazioni (1.5)-(1.6) che può essere riscritto in modo compatto come

$$\mathbf{b}(\mathbf{f}) = \mathbf{0},$$

e risolto utilizzando il metodo di Newton:

$$\mathbf{b}(\mathbf{f}) \approx \mathbf{b}(\bar{\mathbf{f}}) + [\mathbf{J}(\bar{\mathbf{f}})](\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f} = \bar{\mathbf{f}} - [\mathbf{J}(\bar{\mathbf{f}})]^{-1}\mathbf{b}(\bar{\mathbf{f}}),$$

dove  $\bar{\mathbf{f}}$  è una soluzione di tentativo e  $[\mathbf{J}(\bar{\mathbf{f}})]$  è lo Jacobiano ivi valutato.

Come detto, questa procedura viene ripetuta da  $x_{\text{in}}$  a  $x = x_{\text{f}}$ .

**Esercizio 1.7** *Scrivere un proprio script (in Octave o Matlab) che risolva il problema dato marciando da  $x = 0$  a  $x = 1$ .*

**Esercizio 1.8** *Utilizzare lo script cambiando i vari parametri (numero di punti in  $x$ ,  $y$ , “addensamento”,  $y_{\max}$ , verificando i risultati ottenuti. Quando si può pensare di aver risolto abbastanza correttamente il problema numerico?*

**Esercizio 1.9** *Nel caso non sia già stato fatto nella prima stesura, riscrivere lo script in modo da evitare i cicli (altrimenti non c’è guadagno in Octave o Matlab).*