

Un approccio alla radiazione di corpo nero

Simone Zuccher

14 novembre 2015

Indice

1	Un po' di storia sul corpo nero	1
1.1	Planck, rivoluzionario inconsapevole?	3
2	La legge di Planck	3
2.1	La legge di spostamento di Wien	4
2.2	La legge di Stefan-Boltzmann	4
A	Calcolo numerico dell'integrale improprio	5
B	Alcune grandezze tipiche dell'irraggiamento	5

1 Un po' di storia sul corpo nero

Nell'anno 1800, l'astronomo W. Herschel scoprì che le proprietà della luce proveniente dal Sole si estendono al di là della luce visibile, più precisamente verso l'infrarosso¹. Egli dimostrò che la radiazione invisibile ad occhio nudo obbedisce comunque alle leggi della riflessione e della rifrazione che caratterizzano la luce visibile.

Nel 1804 Sir John Leslie mostrò² che la potenza per unità di area irradiata da un corpo dipende dalla temperatura e dalla natura della sua superficie. In particolare, egli osservò che il colore nero della superficie assicura un assorbimento o un'emissione comunque superiori rispetto ad una superficie liscia alla stessa temperatura.

Verso la fine degli anni '50 dell'Ottocento, era ormai noto che oggetti a diversa temperatura e fatti di materiale diverso emettono una quantità di radiazione diversa. Chiamiamo **emittanza**, e la indichiamo con $M(T)$, la potenza per unità di area emessa da una sorgente estesa, attraverso una semisfera, quando la sorgente si trova alla temperatura T (per una descrizione più completa delle grandezze fotometriche si veda la sezione B). La grandezza $M(T)$ include tutte le lunghezze d'onda contenute nella radiazione e si misura in W/m^2 . L'emittanza per unità di intervallo di lunghezza d'onda, che indichiamo con $M_\lambda(\lambda, T)$ prende il nome di **emittanza spettrale** o **emittanza monocromatica**. Chiaramente essa dipende, oltre che dalla temperatura T , anche dalla lunghezza d'onda λ ed il suo integrale su tutte

le lunghezze d'onda equivale a $M(T)$:

$$M(T) = \int_0^{+\infty} M_\lambda(\lambda, T) d\lambda.$$

L'emittanza spettrale $M_\lambda(\lambda, T)$, quindi, si misura in W/m^3 . Oltre ad emettere radiazione, un corpo riceve la radiazione proveniente da altri corpi, in parte riflettendola e in parte assorbendola. Indichiamo con $a_\lambda(\lambda, T)$ la *frazione* di potenza per unità di area e per unità di intervallo di lunghezza d'onda *assorbita* da un corpo³. Nel 1859 Kirchhoff⁴ ipotizzò che il rapporto tra l'emittanza spettrale e la frazione di potenza spettrale assorbita, per un corpo che si trovi in equilibrio termico con l'ambiente circostante, fosse una *funzione universale* di λ e T , completamente indipendente dal materiale e dalla forma dell'oggetto:

$$\frac{M_\lambda(\lambda, T)}{a_\lambda(\lambda, T)} = f(\lambda, T).$$

Alcuni corpi sono in grado di assorbire più di altri la radiazione incidente. Al limite, si può pensare ad un oggetto ideale che assorba completamente tutta la radiazione incidente, per il quale $a_\lambda(\lambda, T) \equiv 1$. Esso prende il nome di **corpo nero** ed è definito come *un corpo (o un dispositivo) che assorbe tutta la radiazione incidente, a tutte le lunghezze d'onda (o frequenze), senza rifletterne alcuna*. Proprio grazie a questa definizione, se indichiamo con $M_{\text{cn}}(\lambda, T)$ l'emittanza spettrale di un corpo nero, possiamo scrivere

$$\frac{M_\lambda(\lambda, T)}{a_\lambda(\lambda, T)} = \frac{M_{\text{cn}}(\lambda, T)}{1} = f(\lambda, T),$$

¹William Herschel, LL. D. F. R. S Herschel, W. *Experiments on the Refrangibility of the Invisible Rays of the Sun*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London (1776-1886). 1800-01-01. 90:284-292, file pdf disponibile a [questo link](#).

²John Leslie, *An Experimental Inquiry into the Nature and Propagation of Heat*, 1st Ed, p.552 (1804), file pdf disponibile a [questo link](#).

³Un corpo investito da una radiazione elettromagnetica, in generale, può assorbire una frazione $\epsilon(\lambda, T)$ dell'energia incidente, può riflettere una frazione $\rho(\lambda, T)$ e può lasciarsi trapassare da una frazione $\tau(\lambda, T)$ dell'energia incidente. In ogni caso, $\epsilon(\lambda, T) + \rho(\lambda, T) + \tau(\lambda, T) = 1$, per i corpi opachi $\tau(\lambda, T) \equiv 0$.

⁴Gustav Kirchhoff, *Ueber den Zusammenhang von Emission und Absorption von Licht und Wärme*, Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 783-787 (1859), file pdf disponibile a [questo link](#).

da cui

$$f(\lambda, T) = M_{\text{cn}}(\lambda, T).$$

In definitiva, per determinare la funzione universale $f(\lambda, T)$ basta determinare l'emittanza spettrale di un corpo nero ad una certa temperatura. Nonostante $f(\lambda, T)$ sia una funzione di 2 variabili, λ e T , nelle considerazioni che seguiranno la temperatura sarà fissata ad un generico valore T , per cui può essere tranquillamente considerata alla stregua di un parametro e la notazione può essere allegerita scrivendo $f_T(\lambda)$.

Un corpo nero è, evidentemente, un "oggetto" puramente ideale in quanto nessun oggetto o dispositivo reale è in grado di assorbire il 100% della radiazione incidente, senza lasciarne sfuggire alcuna. Da un punto di vista pratico-sperimentale, un buon esempio è una cavità con pareti a temperatura omogenea e che comunica con l'esterno solo attraverso un piccolissimo foro sicché, una volta entrata attraverso il foro, la radiazione rimane intrappolata all'interno con scarsissima probabilità di uscirne. L'occhio umano può essere pensato come un corpo nero.

Nel 1864 il fisico irlandese John Tyndal portò a termine una serie di misure sulla radiazione emessa da un corpo nero a varie temperature e lunghezze d'onda. Grazie a questi dati sperimentali, nel 1879 il fisico-matematico-poeta sloveno Jožef Stefan formulò la famosa legge (sperimentale)

$$M_{\text{cn}}(T) = \sigma T^4 \quad \text{con} \quad \sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}.$$

Essa fornisce l'emittanza *totale*, su tutte le lunghezze d'onda, ossia la potenza irradiata, per unità di superficie, da un corpo nero che si trova alla temperatura T . Dopo qualche anno, nel 1884, Ludwig Boltzmann, allievo di Stefan e ormai uno dei più grandi fisici del tempo, ricavò la stessa legge da un punto di vista teorico basandosi unicamente su considerazioni di tipo termodinamico.

Negli anni appena successivi al 1890, furono ottenuti dei dati sperimentali per la funzione $f_T(\lambda)$ a lunghezze d'onda non troppo elevate (inferiori ai 10 μm). La disponibilità di questi dati portò i fisici, negli ultimi anni dell'Ottocento, a cercare delle leggi sperimentali che da un lato fossero in accordo con gli esperimenti e dall'altro con la legge di Stefan-Boltzmann (ricavata dapprima sperimentalmente e poi confermata teoricamente).

Nel 1895 il fisico tedesco Friedrich Paschen propose l'espressione

$$f_T(\lambda) = a \cdot \lambda^{-\gamma} \cdot e^{-\frac{b}{\lambda T}},$$

dove le costanti a , b e γ erano determinate sulla base dei dati sperimentali da lui stesso raccolti. Egli ottenne $\gamma \approx 5.7$.

Nel 1896 Wilhelm Wien, fisico teorico tedesco, osservò che, affinché la legge proposta da Paschen fosse in accordo con quella di Stefan-Boltzmann doveva essere $\gamma = 5$, da cui

$$f_T(\lambda) = \frac{a}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{b}{\lambda T}}}, \quad a, b \quad \text{da determinare.} \quad (1.1)$$

Nel 1899 il fisico tedesco Max Planck, amico e collega di Wien, partendo da considerazioni di tipo termodinamico, riuscì a dedurre teoricamente la stessa formula, che per questo motivo è conosciuta anche come formula di Wien-Planck. Tuttavia, proprio nel Novembre 1899 i due fisici tedeschi Otto Lummer e Ernst Pringsheim furono in grado

di ottenere nuovi dati sperimentali, riportati in figura 1 per lunghezze d'onda più elevate, che erano sistematicamente in disaccordo con la formula (1.1) di Wien-Planck.

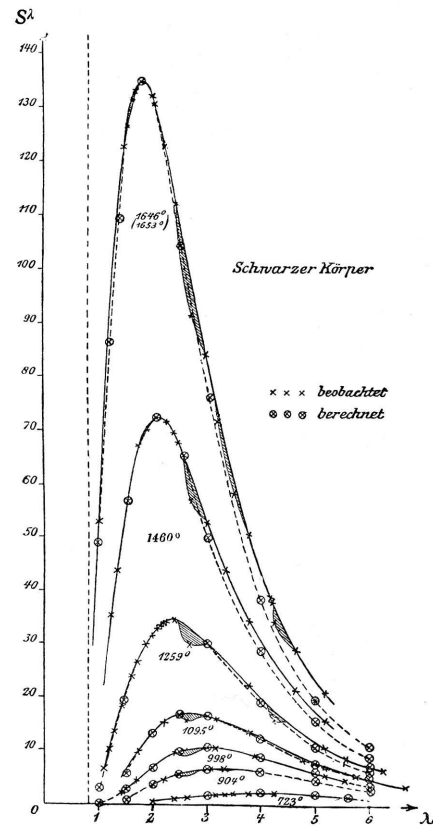


Figura 1: Dati sperimentali O. Lummer, E. Pringsheim, *Verh. Deutsch. Phys. Gesell.* 1 (1899) 226.

Nel Febbraio 1900 nuovi dati sperimentali⁵ mostrarono una deviazione fino al 50% dalla legge di Wien-Planck al punto che durante tutto l'anno 1900 Planck si sforzò di derivare altre forme di $f_T(\lambda)$ che fossero in accordo con gli ultimi dati sperimentali disponibili. Come prima cosa Planck modificò la legge di Wien-Planck introducendo un fattore correttivo a denominatore in modo che ci fosse maggior accordo con i dati sperimentali:

$$f_T(\lambda) = \frac{a}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{b}{\lambda T}} - 1}, \quad a, b \quad \text{da determinare.} \quad (1.2)$$

La prima derivazione di questa legge, nell'ottobre del 1900, si basò esclusivamente su considerazioni fenomenologiche di tipo termodinamico, senza nessuna ipotesi particolare riguardante le proprietà macroscopiche della radiazione. L'accordo con i dati sperimentali era incredibilmente buono. Tuttavia Planck, un fisico ormai affermato nell'ambito della termodinamica, non si limitò a questo ma cercò di arrivare alla stessa formula utilizzando considerazioni di meccanica statistica sviluppate da Boltzmann. Nel Dicembre del 1900, Planck assunse che la radiazione potesse essere suddivisa in *pacchetti discreti* ϵ di energia detti *quanti*. In realtà, partire da un comportamento discreto per poi passare al limite continuo era un trucco abbastanza comune per risolvere problemi *continui*. Probabilmente questo fu anche l'intento di Planck, che riuscì a ritrovare la formula (1.2) solo a patto

⁵O. Lummer, E. Pringsheim, *Verh. Deutsch. Phys. Gesell.* 2 (1900) 163.

che i pacchetti di energia fossero espressi come

$$\epsilon = hf$$

dove $f = c/\lambda$ è la frequenza della radiazione e h una costante universale da determinare in base ai dati sperimentali.

Sotto queste ipotesi, la (1.2) fu ricavata su solide basi teoriche nella forma

$$f_T(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}, \quad (1.3)$$

dove, oltre alla velocità della luce $c = 3.00 \times 10^8$ ms/, fecero la loro prima comparsa le costanti h (solo successivamente chiamata *costante di Planck* in onore del grande fisico tedesco) e k (successivamente chiamata *costante di Boltzmann* in onore di quest'ultimo). Grazie ai dati sperimentali di Kurlbaum (1898) e di Lummer e Pringsheim (1900), furono ricavati i valori numerici delle due costanti $h = 6.55 \times 10^{-34}$ m² kg/s e $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K (si osservi che la costante di Boltzmann ha lo stesso valore oggi accettato con 3 cifre significative, mentre il valore della costante di Planck oggi accettato con 3 cifre significative è $h = 6.63 \times 10^{-34}$ m² kg/s, poco diversa dal valore determinato ai primi del '900). È interessante osservare che Planck non considerasse necessariamente la radiazione discreta, ma fu in qualche modo costretto ad introdurre l'idea dei pacchetti discreti di energia al solo fine di poter derivare la (1.2).

Nei primissimi anni del '900, altri fisici (inglesi) proposero delle alternative alla legge di Planck. Nel 1900 Lord Rayleigh propose la formula

$$f_T(\lambda) = \frac{aT}{\lambda^4} e^{-\frac{b}{\lambda T}}, \quad a, b \text{ da determinare,}$$

dove la parte aT/λ^4 aveva una qualche origine fenomenologica, mentre la parte esponenziale $e^{-\frac{b}{\lambda T}}$ era stata messa in modo brutale con il solo fine di riprodurre, in qualche modo, i dati sperimentali.

Nel 1905 James Jeans ricavò rigorosamente, dalle equazioni di Maxwell, e quindi nell'ambito di quella che oggi chiamiamo *fisica classica*, la legge

$$f_T(\lambda) = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4},$$

nota come legge di Rayleigh-Jeans, dove c è la velocità della luce e k la costante di Boltzmann. È immediato verificare che la legge di Rayleigh-Jeans non è altro che il limite della equazione di Planck (1.3) per $\lambda \rightarrow +\infty$. Infatti

$$\lambda \rightarrow +\infty \implies e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \approx \frac{hc}{\lambda kT}$$

da cui l'approssimazione della legge di Planck per $\lambda \rightarrow +\infty$

$$f_T(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{\lambda kT}{hc} = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4},$$

che è la legge di Rayleigh-Jeans. Nonostante questo ottimo accordo per $\lambda \rightarrow +\infty$, per radiazioni di lunghezza d'onda piccola ($\lambda \rightarrow 0$), la formula di Rayleigh-Jeans è in evidente contrasto sia con il buon senso ($f_T(\lambda) \rightarrow +\infty$ per $\lambda \rightarrow 0$) sia con i dati sperimentali (vedi figura 1). Questo fatto venne in seguito stigmatizzato come *catastrofe ultravioletta* in quanto

per lunghezze d'onda nell'ultravioletto (piccole) si otteneva una densità di radiazione infinita. A sua discolpa, Jeans affermava che, per qualche ragione ignota, le equazioni di Maxwell non erano applicabili nel range di basse lunghezze d'onda. È interessante ricordare che più tardi Jeans non solo si convertì alla teoria quantistica, ma divenne uno dei suoi maggiori sostenitori in Inghilterra.

Si osservi che, nonostante sui libri di scuola superiore si trovi spesso scritto che Planck fosse stato motivato, nella sua ricerca, dalla *catastrofe ultravioletta*, questa affermazione è falsa in quanto la legge di Rayleigh-Jeans fu ottenuta nel 1905, e quindi *dopo* la legge di Planck, ottenuta nel Dicembre del 1900.

1.1 Planck, rivoluzionario inconsapevole?

Si dice spesso che Planck avesse passato il resto della sua vita nel tentativo di rimuovere l'ipotesi della quantizzazione dell'energia.

Effettivamente, nel 1931, in una lettera al fisico sperimentale Robert W. Wood, Planck scrisse che dovette introdurre la strana ipotesi dei quanti in un "atto di disperazione" (*akt der verzweiflung*), essendo egli stesso per natura pacifico e contrario a dubbie avventure, [...] ma era necessario trovare, ad ogni costo, una interpretazione teorica del problema. Egli credette per lungo tempo che questa fosse solo una sorta di ipotesi matematica, che non trovava ragion d'essere nei reali scambi di energia tra materia e radiazione. Egli non sospettava affatto che la meccanica classica e l'elettrodinamica potessero fallire. Addirittura, in seguito, Planck ebbe modo di sottolineare che la sua legge altro non era che "una formula di interpolazione basata su una fortunata congettura". Insomma, Planck fu un rivoluzionario suo malgrado, certamente inconsapevole della portata della sua scoperta. Non a caso, nei primi anni del '900 non ci fu alcuna pubblicazione sulla teoria quantistica, nemmeno da parte dello stesso Planck. Mentre la legge di radiazione da lui proposta fu immediatamente accettata, l'ipotesi di quantizzazione, che noi consideriamo la grande novità concettuale introdotta da Planck, passò quasi inosservata. Nonostante questo, Planck ricevette il Nobel nel 1918 proprio per la sua scoperta dei quanti di energia.

L'effettiva realizzazione che la legge derivata da Planck contenesse l'idea di pacchetti discreti fu graduale ed avvenne soprattutto grazie al contributo di altri eminenti scienziati dell'epoca, del calibro di Hendrik A. Lorentz, Paul Ehrenfest, Max von Laue ed Albert Einstein. Fu proprio Einstein, all'epoca 26enne e ancora poco conosciuto, a capire il senso profondo e la portata dell'ipotesi di quantizzazione. Egli basò su di essa la sua teoria dei quanti di luce (o fotoni), pubblicata nel Marzo del 1905, che segnò la grande svolta aprendo un nuovo filone di ricerca, in seguito percorso da numerosissimi fisici, malgrado l'iniziale scetticismo di molti (fra cui lo stesso Planck).

2 La legge di Planck

Riscriviamo la legge di Planck introducendo l'emittanza spettrale $M_\lambda(\lambda)$ (al posto di $f_T(\lambda)$)

$$M_\lambda(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}, \quad (2.4)$$

dove, come detto, $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg/s}$ è la costante di Planck, $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$ è la velocità della luce nel vuoto, $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ è la costante di Boltzmann e T è la temperatura assoluta in Kelvin.

L'interpretazione della legge di Planck è la seguente: a temperatura T , l'integrale della funzione $M_\lambda(\lambda)$ su tutte le lunghezze d'onda λ (tra 0 e $+\infty$) fornisce l'emittanza totale, ossia la potenza irradiata per unità di superficie (attraverso una semisfera) da un corpo nero quando si trova alla temperatura T :

$$M_{\text{cn}}(T) = \int_0^{+\infty} M_\lambda(\lambda) d\lambda.$$

Evidentemente, siccome $c = \lambda f$, dove f la frequenza dell'onda elettromagnetica, è possibile ricavare da $M_\lambda(\lambda)$ l'espressione analitica dell'emittanza spettrale per unità di variazione di frequenza $M_f(f)$ che, integrata su tutte le frequenze (tra 0 e $+\infty$), fornisce l'emittanza totale $M_{\text{cn}}(T)$ del corpo nero alla temperatura T

$$M_{\text{cn}}(T) = \int_0^{+\infty} M_f(f) df.$$

Si osservi che, essendo $\lambda = c/f$, per ottenere $M_f(f)$ occorre operare correttamente il cambio di variabile da λ a f nell'integrale definito. Questo comporta sia il cambio degli estremi di integrazione $\lambda \rightarrow 0 \implies f \rightarrow +\infty$ e $\lambda \rightarrow +\infty \implies f \rightarrow 0$, sia la riscrittura del differenziale $d\lambda$ in termini di f e df :

$$d\lambda = \frac{d\lambda}{df} df = \frac{d}{df} \left(\frac{c}{f} \right) df = -\frac{c}{f^2} df.$$

Eseguendo la sostituzione di variabile si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} M_\lambda(\lambda) d\lambda &= \int_{+\infty}^0 M_\lambda(c/f) \cdot \left(-\frac{c}{f^2} \right) df \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2\pi hc^2}{\left(\frac{c}{f} \right)^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \frac{c}{f^2} df \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2\pi hf^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} df, \end{aligned}$$

da cui

$$M_f(f) = \frac{2\pi hf^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}. \quad (2.5)$$

2.1 La legge di spostamento di Wien

Ci concentriamo sulla funzione $M_\lambda(\lambda)$, la cui espressione è riportata nell'equazione (2.4). Eventuali punti di massimo di $M_\lambda(\lambda)$ sono determinabili studiando il segno della derivata prima di $M'_\lambda(\lambda)$ (per comodità dividiamo per la costante moltiplicativa $2\pi hc^2$):

$$\begin{aligned} \frac{M'_\lambda(\lambda)}{2\pi hc^2} &= \left[-\frac{5\lambda^4}{\lambda^{10}} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} + \frac{1}{\lambda^5} \left(-\frac{\frac{hc}{kT} \left(-\frac{1}{\lambda^2} \right) e^{\frac{hc}{\lambda kT}}}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)^2} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{\lambda^6 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)^2} \left[5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right) - \frac{hc}{\lambda kT} e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \right] \end{aligned}$$

Gli zeri di $M'_\lambda(\lambda)$ si ottengono risolvendo

$$5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right) - \frac{hc}{\lambda kT} e^{\frac{hc}{\lambda kT}} = 0.$$

Essa diventa particolarmente maneggevole se sostituiamo $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ ottenendo $5(e^x - 1) - xe^x = 0$ da cui

$$1 - e^{-x} = \frac{x}{5}.$$

Questa equazione non è risolvibile con carta e penna. Tuttavia, ricorrendo al metodo grafico, si può disegnare la funzione $y = 1 - e^{-x}$ (una esponenziale crescente passante per l'origine ed avente asintoto orizzontale $y = 1$ per $x \rightarrow +\infty$) e la funzione $y = \frac{x}{5}$ (una banale retta passante per l'origine). Dai grafici è immediato notare che le due funzioni si intersecano per $x = 0$ e per $x \approx 5$. Utilizzando un metodo numerico adatto (Newton o bisezione), e partendo sufficientemente vicini a 5, si arriva alla soluzione $x_{\text{max}} \approx 4.96511423174428$. Ricordando che $x = \frac{hc}{\lambda kT}$, si ottiene

$$\frac{hc}{\lambda_{\text{max}} kT} = x_{\text{max}} \implies \lambda_{\text{max}} T = \frac{hc}{k x_{\text{max}}}$$

da cui $\lambda_{\text{max}} T \approx \frac{6.62606956 \times 10^{-34} \times 2.9979246 \times 10^8}{1.3806488 \times 10^{-23} \times 4.9651142} = 2.897772 \times 10^{-3} \text{ m K}$, nota come legge di Wien

$$\lambda_{\text{max}} T = 2.897772 \times 10^{-3} \text{ m K}. \quad (2.6)$$

2.2 La legge di Stefan-Boltzmann

Si può dimostrare che

$$M_{\text{cn}}(T) = \int_0^{+\infty} M_\lambda(\lambda) d\lambda = \int_0^{+\infty} M_f(f) df = \sigma T^4 \quad (2.7)$$

con $\sigma = 5.670367 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$. Le conoscenze necessarie per arrivarci trascendono i contenuti di un corso di analisi uno o due, e quindi non è possibile riportare qui la dimostrazione. Tuttavia, possiamo verificare la validità della (2.7) integrando numericamente $M_\lambda(\lambda)$ o $M_f(f)$. Per comodità, calcoliamo numericamente l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{2\pi hf^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} df$$

e poi confrontiamo il suo valore con σT^4 . Per procedere all'integrazione, riarrangiamo il tutto in funzione della variabile adimensionale

$$t = \frac{hf}{kT}$$

in modo che $f \rightarrow 0 \implies t \rightarrow 0$ e $f \rightarrow +\infty \implies t \rightarrow +\infty$. Ricavando $f = \frac{kT}{h} t \implies df = \frac{kT}{h} dt$, si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{2\pi hf^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} df &= \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^{+\infty} \frac{f^3}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} df \\ &= \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{kT}{h} t \right)^3}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} \left(\frac{kT}{h} dt \right) \\ &= \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt \end{aligned}$$

Questa scrittura ha il vantaggio di essere il prodotto tra la costante $\frac{2\pi k^4}{c^2 h^3}$, il fattore T^4 , e l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt = \frac{\pi^4}{15}$$

Come detto, il valore dell'integrale può essere verificato tramite integrazione numerica (vedi appendice A per i dettagli). In conclusione,

$$\int_0^{+\infty} M_f(f) df = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} T^4$$

Se denotiamo la costante che moltiplica T^4 con σ , si ha

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} = 5.670367 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}.$$

A Calcolo numerico dell'integrale improprio

Vogliamo calcolare, il più correttamente possibile, l'approssimazione numerica dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt,$$

dove entrambi gli estremi di integrazione sono problematici in quanto l'integranda non esiste in $t = 0$ (anche se il suo limite per $t \rightarrow 0$ è zero) e non è chiaro che valore numerico dare al secondo estremo di integrazione t_{\max} in modo da mimare il comportamento $t_{\max} \rightarrow +\infty$.

Il problema per $t \rightarrow 0^+$ è facilmente risolvibile dal punto di vista numerico assegnando all'integranda valore nullo nell'origine (come detto, essa tende a 0^+ quando $t \rightarrow 0^+$). Per risolvere il problema del secondo estremo di integrazione, basta operare un cambio di variabile da t ad s che riscali il dominio di integrazione da $t \in (0; +\infty)$ a $s \in (0; 1)$. È immediato verificare che la sostituzione che assicura questo fatto è

$$s = \frac{t}{t+1}.$$

Da questa espressione ricaviamo sia t sia il differenziale dt

$$t = \frac{s}{1-s}, \quad dt = \frac{ds}{(1-s)^2}$$

da cui, operando il cambio di variabile nell'integrale,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt &= \int_0^1 \frac{\left(\frac{s}{1-s}\right)^3}{e^{\frac{s}{1-s}} - 1} \frac{ds}{(1-s)^2} \\ &= \int_0^1 \frac{s^3}{(1-s)^5 (e^{\frac{s}{1-s}} - 1)} ds. \end{aligned}$$

Suddividendo l'intervallo $[0; 1]$ in 1600 punti (quindi in 1599 intervalli), l'integrazione numerica con il metodo dei trapezi fornisce

$$\int_0^1 \frac{s^3}{(1-s)^5 (e^{\frac{s}{1-s}} - 1)} ds = 6.49393940226683,$$

che è corretto fino alla *quindicesima* cifra significativa rispetto al valore esatto $\pi^4/15$.

B Alcune grandezze tipiche dell'irraggiamento

L'irraggiamento è l'unico meccanismo di trasmissione del calore che non richiede l'interposizione di un mezzo tra l'oggetto *riscaldante* e quello *riscaldato* (gli altri meccanismi, che richiedono comunque l'interposizione di materia, sono la conduzione e la convezione). Come noto, l'irraggiamento avviene tramite radiazione elettromagnetica che viaggia alla velocità della luce.

Le sorgenti radiative, che possono essere *puntiformi* o *estese*, emettono in tutte le direzioni ed irradiano verso gli oggetti circostanti con un certo *angolo solido*.

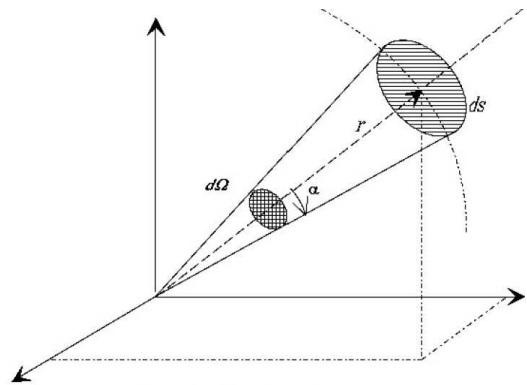


Figura 2: Definizione di angolo solido

Con riferimento alla figura 2, consideriamo un punto V ed una curva chiusa \mathcal{C} (non intrecciata) che non passi da V . Le semirette uscenti da V e passanti per i punti di \mathcal{C} identificano una superficie infinita \mathcal{S} che divide lo spazio in due regioni. Ciascuna di queste due regioni, unita con la superficie \mathcal{S} , prende il nome di *angolo solido*. In pratica, l'angolo solido è l'estensione allo spazio tridimensionale del concetto di angolo piano.

L'unità di misura dell'angolo solido nel Sistema Internazionale è lo *steradiano*, il cui simbolo è *st*. Esso è l'estensione naturale del radiante. Così come l'angolo in radianti è definito come il rapporto $\alpha_{\text{rad}} = \ell/r$ tra la lunghezza dell'arco di circonferenza ℓ con centro nel vertice dell'angolo ed il raggio r della circonferenza stessa, così lo steradiano è definito come il rapporto tra l'area A della porzione di superficie sferica con centro nel vertice vista sotto l'angolo solido Ω ed il quadrato del raggio della sfera

$$\Omega = \frac{A}{r^2}.$$

Dalla figura 2 è evidente che $d\Omega = dA/r^2$. L'angolo solido che circonda una sorgente puntiforme (l'estensione allo spazio dell'angolo giro) è quindi pari al rapporto tra l'area della superficie sferica di raggio r ed il quadrato del raggio, pertanto vale $4\pi r^2/r^2 = 4\pi$.

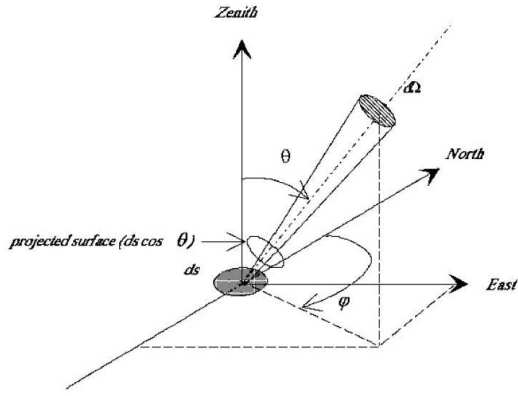


Figura 3: Sistema di riferimento in coordinate sferiche

In figura 3 è rappresentata una piccola porzione dA della superficie di un corpo radiante *esteso*. L'angolo (piano) θ è l'angolo tra la direzione in cui viene emessa la radiazione e la normale (detta zenith) alla superficie dA . Chiaramente, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. L'angolo (piano) ϕ , invece, è formato da una particolare retta parallela alla superficie dA , presa come retta di riferimento, e la semiretta ottenuta proiettando sul piano di dA la direzione di propagazione della radiazione. Chiaramente, $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Un osservatore che guarda la superficie dA lungo la direzione θ non vede esattamente la superficie dA , ma la sua *proiezione lungo la direzione θ* , che ha estensione più piccola e pari a $dA \cos \theta$ (le superfici si proiettano esattamente come i segmenti).

Con questi concetti, è ora possibile definire la **radianza** L di una *sorgente estesa* come l'energia dE emessa dalla sorgente nell'intervallo di tempo dt , in direzione θ , sotto l'angolo solido $d\Omega$ e per unità di "area proiettata" lungo la direzione θ

$$L(\theta, \phi) = \frac{dE}{dt d\Omega dA \cos \theta} = \frac{dP}{d\Omega dA \cos \theta},$$

dove si è introdotta la potenza irradiata $dP = dE/dt$. Nel caso in cui L sia indipendente da θ e ϕ , la sorgente prende il nome di *sorgente Lambertiana* (o *isotropa*). Un corpo nero è certamente una sorgente *estesa* e *Lambertiana*.

Un'altra grandezza interessante per la misura della radiazione emessa da una sorgente è l'**emittanza** M . Essa è definita come la potenza emessa da una sorgente estesa per unità di superficie *attraverso una semisfera*. In pratica,

$$M = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi/2} L(\theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta \right] d\phi.$$

Nel caso particolare di sorgente Lambertiana, siccome L è costante in tutte le direzioni può essere portata fuori dall'integrale, che si riduce a

$$M = L \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi L.$$

Per un corpo nero, quindi

$$M = \pi L.$$

Se consideriamo la radiazione emessa in direzione θ da un'area infinitesima dA di una sorgente estesa e vista sotto

un angolo solido Ω , si può definire la **densità di energia per unità di volume**

$$du = \frac{dE}{dV},$$

dove il volume dV è quello "spazzato" dall'area dA in direzione θ , ossia è il volume spazzato dall'area $dA \cos \theta$, alla velocità di propagazione della radiazione che è c , la velocità della luce. Dalle definizioni di du e di L segue

$$du = \frac{dE}{dV} = \frac{L(\theta, \phi) dt d\Omega dA \cos \theta}{dA \cos \theta c dt} = \frac{L(\theta, \phi) d\Omega}{c}.$$

Nel caso particolare di sorgente Lambertiana, come è un corpo nero, L non dipende dalla direzione, per cui integrando su tutti gli angoli solidi si ha

$$du = \frac{L}{c} d\Omega \implies u = \frac{L}{c} \int_{\text{sfera}} d\Omega = \frac{L}{c} 4\pi.$$

In conclusione, per una sorgente estesa e Lambertiana (o isotropa) come è un corpo nero, vale la relazione

$$u = \frac{4\pi}{c} L.$$

Le grandezze fotometriche fin qui descritte includono *tutte* le frequenze o lunghezze d'onda possibili. Tuttavia, può essere interessante misurare ciascuna di queste grandezze solo in un ristretto intervallo di lunghezze d'onda, per esempio tra λ e $\lambda + d\lambda$, oppure in un ristretto intervallo di frequenze, tra f e $f + df$. Con riferimento alla radianza, introduciamo la **radianza spettrale** per unità di intervallo di **lunghezza d'onda** come

$$L_\lambda(\theta, \phi) = \frac{dE}{dt d\Omega dA \cos \theta d\lambda} = \frac{dP}{d\Omega dA \cos \theta d\lambda},$$

legata a $L(\theta, \phi)$ dalla relazione

$$L(\theta, \phi) = \int_0^{+\infty} L_\lambda(\theta, \phi) d\lambda.$$

Allo stesso modo è possibile definire la **radianza spettrale** per unità di intervallo di **frequenza** come

$$L_f(\theta, \phi) = \frac{dE}{dt d\Omega dA \cos \theta df} = \frac{dP}{d\Omega dA \cos \theta df},$$

anch'essa legata a $L(\theta, \phi)$ dalla relazione

$$L(\theta, \phi) = \int_0^{+\infty} L_f(\theta, \phi) df.$$

Chiaramente, tutte le altre grandezze come l'emittanza M e la densità di energia per unità di volume u possono essere definite in modo "spettrale", intendendo che sono definite per unità di intervallo di lunghezza d'onda o per unità di intervallo di frequenza, dipendentemente dal pedice utilizzato.

Siccome un corpo nero è Lambertiano, per esso valgono tutte le seguenti relazioni

$$M_\lambda = \pi L_\lambda, \quad u_\lambda = \frac{4\pi}{c} L_\lambda, \quad M_\lambda = \frac{c}{4} u_\lambda,$$

$$M_f = \pi L_f, \quad u_f = \frac{4\pi}{c} L_f, \quad M_f = \frac{c}{4} u_f.$$

Evidentemente, basta dare una qualsiasi di queste grandezze per ricavare le altre. Per esempio, l'equazione (1.3) è

l'emittanza spettrale, per unità di intervallo di lunghezza d'onda, di un corpo nero che si trova alla temperatura T , $M_{\lambda,\text{cn}}$. Da essa possiamo ricavare la radianza spettrale, per unità di intervallo di lunghezza d'onda

$$L_{\lambda,\text{cn}} = \frac{M_{\lambda,\text{cn}}}{\pi} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1},$$

e la densità spettrale di energia per unità di volume

$$u_{\lambda,\text{cn}} = \frac{4\pi}{c} L_{\lambda,\text{cn}} = \frac{8\pi hc^3}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}.$$

Dal punto di vista strettamente tecnico, Planck nel suo articolo del Dicembre 1900 ricavò la densità spettrale di energia per unità di volume in funzione della frequenza,

$$u_{f,\text{cn}} = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}.$$