Capitolo 3

Equazioni e disequazioni

3.1 Princìpi di equivalenza

1. Sommando o sottraendo la stessa quantità ad entrambi i membri di un'equazione o di una disequazione essa non cambia, ovvero:

$$A(x) \geq B(x) \iff A(x) + k(x) \geq B(x) + k(x).$$

2. Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un'equazione o di una disequazione per la stessa quantità *positiva e non nulla* essa non cambia, ovvero:

$$k(x) > 0 \Longrightarrow A(x) \geq B(x) \iff A(x) \cdot k(x) \geq B(x) \cdot k(x).$$

3. Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un'equazione o di una disequazione per la stessa quantità *negativa e non nulla* l'equazione non cambia mentre la disequazione cambia *senso*, ovvero:

$$k(x) < 0 \Longrightarrow A(x) = B(x) \iff A(x) \cdot k(x) = B(x) \cdot k(x),$$

$$k(x) < 0 \Longrightarrow A(x) \geq B(x) \iff A(x) \cdot k(x) \leq B(x) \cdot k(x).$$

Pertanto, quando si cambiano di segno tutti termini di una disequazione (ovvero si moltplicano tutti per -1) bisogna *ricordarsi* di cambiare anche il senso. Sia per le equazioni che per le disequazioni, non si può mai dividere o moltiplicare per zero.

3.2 Intere di primo grado

3.2.1 Equazioni intere di primo grado

Utilizzando i princìpi richiamati nella sezione 3.1, un'equazione intera di primo grado può sempre essere ricondotta alla forma

$$ax + b = 0.$$

Nel caso $a \neq 0$ la soluzione è banalmente $x = -b/a$, mentre se $a = 0$ la disequazione può essere impossibile se $b \neq 0$ o indeterminata se $b = 0$.

Esercizio 3.1 *Risolvere l'equazione* $x - 1 + (x-1)^3 = x^3 - 3x^2$.

Risoluzione. Si ha: $x-1+(x-1)^3 = x^3-3x^2 \iff x-1+x^3-3x^2+3x-1 = x^3-3x^2 \iff 4x-2=0 \iff 2x-1=0 \iff 2x=1 \iff x=\frac{1}{2}$. ■

Esercizio 3.2 *Risolvere l'equazione* $x-1+(x-1)^2=(x-1)(x+1)-x$.

Risoluzione. Si ha: $x-1+(x-1)^2=(x-1)(x+1)-x \iff x-1+x^2-2x+1=x^2-1-x \iff 1=0$, pertanto l'equazione è *impossibile*. ■

Esercizio 3.3 *Risolvere l'equazione* $3x^2+x+2+(x-1)(x^2+x+1)=(x+1)^3-2x$.

Risoluzione. Si ha: $3x^2+x+2+(x-1)(x^2+x+1)=(x+1)^3-2x \iff 3x^2+x+2+x^3-1=x^3+3x^2+3x+1-2x \iff x+1=x+1 \iff 0=0$, indipendentemente dal valore di x, pertanto l'equazione è *indeterminata*. ■

3.2.2 Disequazioni intere di primo grado

Utilizzando i princìpi richiamati nella sezione 3.1, una disequazione intera di primo grado può sempre essere ricondotta alla forma

$$ax+b \geq 0.$$

Nel caso $a>0$ la soluzione è banalmente $x \geq -b/a$, se $a<0$ la soluzione è $x \leq -b/a$ (si osservi il cambio si *senso*), mentre se $a=0$ la disequazione può essere impossibile se $b<0$ o indeterminata se $b \geq 0$. In ogni caso, prima di dividere per il coefficiente a di x è buona norma, nel caso esso sia negativo, fare un passaggio "di preparazione" cambiando i segni in modo che esso diventi positivo.

Esercizio 3.4 *Risolvere la disequazione* $\sqrt{2}-x>1$.

Risoluzione. Si ha $\sqrt{2}-x>1 \iff -x>1-\sqrt{2} \iff x<\sqrt{2}-1$. ■

Esercizio 3.5 *Risolvere la disequazione* $(x-1)^2<(2-x)^2+2x-1$.

Risoluzione. Si ha $(x-1)^2<(2-x)^2+2x-1 \iff x^2-2x+1<4-4x+x^2+2x-1 \iff 2<0$, pertanto la disequazione data è *impossibile*. ■

Esercizio 3.6 *Risolvere la disequazione* $(x-1)^2>(2-x)^2+2x-1$.

Risoluzione. Si ha $(x-1)^2>(2-x)^2+2x-1 \iff x^2-2x+1>4-4x+x^2+2x-1 \iff 2>0$, che è sempre verificata indipendentemente dal valore di x. Pertanto, la disequazione data è *indeterminata*. ■

3.3 Razionali fratte

3.3.1 Equazioni razionali fratte

Le equazioni fratte sono quelle in cui l'incognita si trova al denominatore, non quelle in cui compaiono delle frazioni. Per esempio, l'equazione

$$\frac{x+1}{3}-5x=\frac{x-56}{\sqrt{3}}$$

è intera, mentre l'equazione

$$\frac{2x^3+4x^2+18}{x^2+8x+15}+\frac{2(x+1)}{x+3}=2x-1+\frac{3(5-3x)}{x+5}$$

è fratta. Le equazioni fratte si risolvono seguendo questi semplici passi:

1. si scompongono i denominatori delle singole frazioni (si veda la sezione 2.3);
2. si impongono le *condizioni di esistenza* di ciascuna frazione richiedendo che i denominatori siano diversi da zero (i.e. si risolvono delle equazioni con "$\neq$" al posto di "$=$");
3. si eseguono le operazioni tra frazioni algebriche utilizzando quanto visto nella sezione 2.4 e riconducendosi ad un unico denominatore uguale sia per il menbro di sinistra che per quello di destra (minimo comune multiplo);
4. si tolgono i denominatori moltiplicando ciascun membro dell'equazione per il minimo comune multiplo, che è certamente non nullo grazie alle condizioni di esistenza;
5. si svolgono i calcoli come per le comuni equazioni intere e si trovano le eventuali soluzioni dell'equazione intera;
6. si confrontano le soluzioni trovate con le condizioni di esistenza e si determina se le soluzioni sono *accettabili* oppure no. Se tutte le soluzioni trovate contraddicono le condizioni di esistenza, l'equazione è impossibile. Se si arriva ad una identità, l'equazione non è indeterminata ma vanno esclusi i valori di x secondo quanto imposto dalle condizioni di esistenza.

Esercizio 3.7 *Risolvere l'equazione*

$$\frac{2x^3+4x^2+18}{x^2+8x+15}+\frac{2(x+1)}{x+3}=2x-1+\frac{3(5-3x)}{x+5}.$$

Risoluzione. Procediamo alla scomposizione dei denominatori:

$$\frac{2x^3+4x^2+18}{(x+3)(x+5)}+\frac{2(x+1)}{x+3}=2x-1+\frac{3(5-3x)}{x+5},$$

quindi le condizioni di esistenza impongono

$$x+3\neq 0 \Longrightarrow x\neq -3 \quad \text{e} \quad x+5\neq 0 \Longrightarrow x\neq -5.$$

Il minimo comune multiplo è $(x+3)(x+5)$ per cui si ha:

$$\frac{2x^3+4x^2+18+2(x+1)(x+5)}{(x+3)(x+5)}=\frac{(2x-1)(x+3)(x+5)+3(5-3x)(x+3)}{(x+3)(x+5)},$$

moltiplicando a sinistra e a destra per il minimo comune multiplo $(x+3)(x+5)$, che è certamente diverso da zero perché siamo sotto le ipotesi $x\neq -3$ e $x\neq -5$, si ottiene

$$2x^3+4x^2+18+2(x+1)(x+5)=(2x-1)(x+3)(x+5)+3(5-3x)(x+3),$$

ovvero
$2x^3+4x^2+18+2x^2+2x+10x+10=2x^3+15x^2+22x-15+15x-9x^2+45-27x \iff$ $12x+28=10x+30 \iff 2x=2 \iff x=1$, che è accettabile in quanto $1\neq -3$ e $1\neq -5$. ■

Esercizio 3.8 *Risolvere l'equazione*

$$\frac{2x}{x-3}-\frac{5}{x}=\frac{6x}{3x-9}+\frac{2}{3x}.$$

Risoluzione. Procendendo con la scomposizione dei denominatori si ha

$$\frac{2x}{x-3}-\frac{5}{x}=\frac{6x}{3(x-3)}+\frac{2}{3x},$$

da cui le condizioni di esistenza

$$x-3\neq 0 \Longrightarrow x\neq 3, \quad x\neq 0 \Longrightarrow x\neq 0 \quad \text{e} \quad 3x\neq 0 \Longrightarrow x\neq 0.$$

Quindi, semplicemente, $x\neq 0$ e $x\neq 3$. Il minimo comune multiplo è $3x(x-3)$ da cui

$$\frac{3x\cdot 2x-5\cdot 3(x-3)}{3x(x-3)}=\frac{6x^2+2(x-3)}{3x(x-3)}.$$

Moltiplicando entrambi i membri per il denominatore $3x(x-3)$ (sicuramente diverso da zero in virtù delle condizioni di esistenza $x\neq 0$ e $x\neq 3$) e svolgendo i calcoli si ottiene $6x^2-15x+45=6x^2+2x-6 \iff -17x=-51 \iff -x=-3 \iff x=3$. Questo risultato contraddice le condizioni di esistenza, per cui l'equazione risulta *impossibile.* ■

3.3.2 Disequazioni razionali fratte

Le disequazioni fratte si presentano nella stessa forma delle equazioni fratte, tranne che al posto del simbolo "$=$" si trova uno tra i simboli "$\geq$", "$\leq$", "$>$", "$<$". Le disuguaglianze del tipo "$>$" e "$<$" sono dette *strette.* A differenza delle equazioni fratte, ora i denominatori sono importanti perché contribuiscono al segno della frazione algebrica equivalente che si ottiene portando tutti i termini della disequazione allo stesso membro. Pertanto, nelle disequazioni fratte *i denominatori non vanno mai tolti.* I passi da percorrere per risolvere agevolmente una disequazione fratta sono i seguenti:

1. si portano tutti i termini al membro di sinistra in modo da ottenere un'espressione (qualsivoglia complicata) "maggiore" o "minore" di zero;
2. si eseguono le solite operazioni tra frazioni algebriche utilizzando quanto visto nella sezione 2.4 e facendo attenzione a non eliminare il denominatore: così facendo ci si riconduce ad una disequazione del tipo
$$\frac{N(x)}{D(x)}\geq 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{N(x)}{D(x)}\leq 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{N(x)}{D(x)}>0 \quad \text{oppure} \quad \frac{N(x)}{D(x)}<0;$$
3. *indipendentemente dal senso* della disequazione fratta ottenuta, si studia il segno del numeratore imponendo $N(x)>0$ oppure $N(x)\geq 0$ a seconda che la disequazione sia stretta (senza l'uguale) o meno, e lo si riporta su una linea orizzontale utilizzando queste convenzioni: un segno "$+$" dove il numeratore è positivo, un segno "$-$" dove il numeratore è negativo, un pallino pieno "$\bullet$" dove il numeratore cambia segno se la disequazione fratta è del tipo "$\geq$" oppure "$\leq$", un pallino vuoto "$\circ$" dove il numeratore cambia segno se la disequazione fratta è stretta, ovvero del tipo "$>$" oppure "$<$";

4. *indipendentemente dal senso* della disequazione fratta, si studia quando il denominatore è *strettamente positivo* e si riporta il risultato su un'altra linea orizzontale, posta sotto alla precedente, seguendo le stesse convenzioni del numeratore con la differenza che il denominatore *non è mai nullo* e quindi avrà, al più, pallini vuoti;
5. dalla tabella dei segni si calcolano gli intervalli nei quali la frazione $N(x)/D(x)$ è positiva, negativa, nulla (pallino pieno) o non esiste (pallino vuoto);
6. guardando l'ultima espressione della disequazione fratta (ovvero l'ultimo passaggio prima dello studio dei segni del numeratore e del denominatore) si determina la soluzione della disequazione e, per comodità, la si riporta su un'ulteriore linea orizzontale contrassegnandola con un'ondina ed i rispettivi pallini (pieni o vuoti).

Osservazione 3.9 *Le condizioni di esistenza sono automaticamente incluse dal momento che il segno del denominatore viene studiato tramite una disuguaglianza stretta.*

Esercizio 3.10 *Risolvere la disequazione*

$$-\frac{x}{2-x} \geq \frac{x}{2-x} + \frac{x-1}{x-2}.$$

Risoluzione. Portando tutto al primo membro si ha

$$-\frac{x}{2-x} - \frac{x}{2-x} - \frac{x-1}{x-2} \geq 0,$$

da cui, svolgendo i calcoli e riducendosi ad un'unica frazione algebrica, la disequazione diventa (il lettore lo verifichi)

$$\frac{x+1}{2-x} \leq 0. \tag{3.11}$$

L'espressione 3.11 è nella forma $N(x)/D(x) \leq 0$, per cui studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore per poi riportare graficamente i risultati in una tabella dei segni.
Numeratore. Essendo la disuguaglianza non stretta, imponiamo $N(x) \geq 0$ da cui $x+1 \geq 0 \iff x \geq -1$.
Denominatore. Sebbene la disuguaglianza sia non stretta, imponiamo $D(x) > 0$ da cui $2-x > 0 \iff x < 2$.

Riportiamo ora i risultati nella tabella dei segni tracciando tre linee orizzontali, una per il

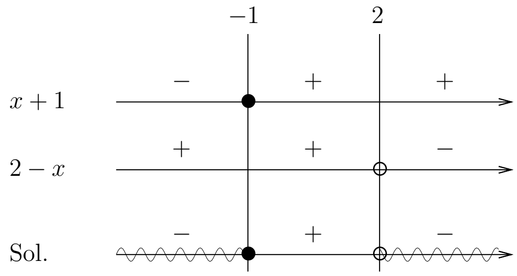


Tabella 3.1: Studio dei segni per la disequazione 3.11.

numeratore, una per il denominatore e una per la soluzione finale, riportando vicino ad esse, rispettivamente, l'espressione del numeratore, quella del denominatore e "Sol."; tracciamo anche due linee verticali in corrispondenza dei valori -1 e 2, che prendono il nome di *capi-saldi*. In base alle convezioni scelte, si ottiene lo schema riportato in tabella 3.1. Si osservino, per il numeratore, i segni positivi a destra di -1, quelli negativi altrove e il pallino pieno in -1, essendo $x \geq -1$; per il denominatore si osservi la disposizione dei segni e, soprattutto, il pallino vuoto. Facendo i prodotti dei segni nei singoli intervalli si ottengono i segni riportati sull'ultima linea contrassegnata da "Sol.". Si osservi la frazione si annulla dove si annulla il numeratore (pallino pieno in -1) e non esiste dove si annulla il denominatore (pallino vuoto in 2). Siccome l'utimo passaggio prima dello studio dei singoli segni, ovvero la disequazione 3.11, richiedeva quando la frazione fosse negativa o nulla, la soluzione è l'unione degli intervalli corrispondenti al segno "$-$" sull'ultima linea, enfatizzata dall'ondina. In conclusione la soluzione è $x \leq -1 \vee x > 2$. ■

Osservazione 3.12 *Le disequazioni fratte che si presentano nella forma $N(x)/D(x) \geq (\leq)\ 0$ e per le quali il numeratore e il denominatore possono essere scomposte come prodotto di più fattori si trattano studiando il segno di ciascun fattore (sia esso al numeratore o al denominatore), e costruendo nella tabella dei segni.*

Esercizio 3.13 *Risolvere la disequazione*

$$\frac{(x+1)(3-x)}{x-2} \leq 0. \tag{3.14}$$

Risoluzione. Procediamo allo studio del segno di ciascun fattore, tenendo presente che se si trova al numeratore lo studieremo ≥ 0, mentre se si trova al denominatore lo studieremo > 0. Si ha: $x+1 \geq 0 \iff x \geq -1$; $3-x \geq 0 \iff x \leq 3$; $x-2 > 0 \iff x > 2$. Pertanto,

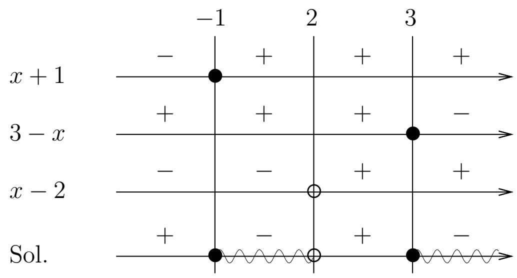


Tabella 3.2: Studio dei segni per la disequazione 3.14.

utilizzando le solite convenzioni, si ottiene la tabella 3.2 da cui la soluzione $-1 \leq x < 2 \vee x \geq 3$ enfatizzata dall'ondina sull'ultima riga. ■

3.4 Intere di secondo grado

3.4.1 Equazioni intere di secondo grado

Utilizzando i princìpi richiamati nella sezione 3.1, un'equazione intera di secondo grado può sempre essere ricondotta alla forma

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{3.15}$$

È facile dimostrare (si veda l'esercizio 3.22) che

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{se} \quad \Delta = b^2 - 4ac \geq 0. \tag{3.16}$$

Siccome le radici quadrate di numeri negativi non esistono (in campo reale), le soluzioni dell'equazione (3.15) sono:

1. reali e distinte se $\Delta > 0$
2. reali e coincidenti se $\Delta = 0$
3. non esistono reali se $\Delta < 0$.

Siccome Δ *discrimina* tra le possibilità, è chiamato *discriminante*.

Osservazione 3.17 *Si osservi che, se $\Delta \geq 0$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ per cui si ha*

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + x = \quad & a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] = \\ & a[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2] = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = \\ & a(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Pertanto, se $\Delta \geq 0$, il trinomio $ax^2 + bx + x$ si scompone come

$$ax^2 + bx + x = a(x - x_1)(x - x_2). \tag{3.18}$$

Il trinomio speciale *non è altro che questa composizione nel caso particolare $a = 1$.*

La formula risolutiva (3.16) è generale e si riferisce al caso di equazione *completa*, ovvero quello in cui nessuno dei coefficienti è nullo. Tuttavia, essa può essere semplificata nel caso in cui b o c siano nulli (escludiamo il caso $a = 0$ che porta ad un'equazione di primo grado già trattata nella sezione 3.2.1):

1. caso $b = 0$. L'equazione, che prende il nome di *pura* in quanto contiene solo il termine di secondo grado e il termine noto, diventa $ax^2 + c = 0$, da cui $x^2 = -\frac{c}{a}$. Pertanto, si possono verificare due sottocasi:
   (a) se $\frac{c}{a} > 0$ l'equazione è impossibile perché un numero positivo o nullo (x^2) non può mai essere negativo ($-\frac{c}{a} < 0$, se $\frac{c}{a} > 0$);
   (b) se $\frac{c}{a} \leq 0$ l'equazione ammette le due soluzioni opposte $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ e $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.
2. caso $c = 0$. L'equazione, che prende il nome di *spuria* in quanto manca il termine noto, diventa $ax^2 + bx = 0 \iff x(ax + b) = 0$, per cui ammette sempre due soluzioni $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Inoltre, nel caso in cui b sia divisibile per 2, la formula (3.16) può essere riscritta nella seguente forma, nota come *formula ridotta*

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} \quad \text{se} \quad \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac \geq 0. \tag{3.19}$$

Esercizio 3.20 *Risolvere l'equazione*

$$4(2 - x)(x + 2) + 20 = 36(x + 1) - x(2x + 7).$$

Risoluzione. $4(2-x)(x+2)+20 = 36(x+1) - x(2x+7) \iff 4(4-x^2)+20 = 36x+36-2x^2-7x \iff 16-4x^2+20 = 36x+36-2x^2-7x \iff -2x^2-29x \iff 2x^2+29x \iff x(2x+29) = 0$ ovvero, per la legge di annullamento del prodotto di due fattori, si ha $x_1 = 0$ e $x_2 = -\dfrac{29}{2}$. ■

Esercizio 3.21 *Risolvere l'equazione*

$$3x^2 + 2\sqrt{3}x - 3 = 0.$$

Risoluzione. Volendo applicare la formula ridotta (3.19), calcoliamo dapprima $\Delta/4 = (b/2)^2 - ac = 3 + 9 = 12 = (2\sqrt{3})^2$. Pertanto,

$$x_1 = \frac{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \frac{-\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \frac{-\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

■

Esercizio 3.22 *Si dimostri che, se $b^2 - 4ac \geq 0$, le soluzioni di $ax^2 + bx + c = 0$ sono*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Risoluzione. Riscriviamo l'equazione canonica in modo da ottenere $\square^2 = \lozenge$ con $\square$ contenente la variabile x e $\lozenge \geq 0$ ed indipendente da x. Si ha $ax^2 + bx + c = 0 \iff 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \iff 4a^2x^2 + 4abx = -4ac \iff 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \iff (2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$. Se denotiamo il membro di destra come $\Delta = b^2 - 4ac$, si hanno due casi:

1. $\Delta < 0 \implies$ equazione impossibile in quanto un quadrato di binomio non può essere negativo;

2. $\Delta \geq 0 \implies (2ax+b)^2 = \Delta \iff 2ax_1 + b = -\sqrt{\Delta}$ e $2ax_2 + b = \sqrt{\Delta}$ da cui si ottengono, rispettivamente, $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

■

Esercizio 3.23 *Partendo dalla formula* (3.16) *per la risoluzione delle equazioni di secondo grado, ricavare la formula ridotta* (3.19).

Risoluzione. Consideriamo, ad esempio, $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Si ha $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1}{2}\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}$, dove $\frac{\Delta}{4} = \frac{b^2-4ac}{4} = \frac{b^2}{4} - ac = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$. ■

3.4.2 Disequazioni intere di secondo grado

Utilizzando i princìpi richiamati nella sezione 3.1, una disequazione intera di secondo grado può sempre essere ricondotta alla forma

$$ax^2 + bx + c \geq 0. \tag{3.24}$$

Per la soluzione di questa disequazione si può procedere in due modi: (1) tentando di scomporre il polinomio di secondo grado oppure (2) ricorrendo al metodo grafico considerando il polinomio come una parabola.

1. Il trinomio di secondo grado ax^2+bx+c è scomponibile se $\Delta = b^2-4ac \geq 0$; in particolare se $\Delta = 0$ il trinomio è un quadrato perfetto, mentre se $\Delta > 0$ il trinomio è scomponibile come
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$
dove x_1 e x_2 sono le due radici del trinomio stesso, ovvero
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$
Fatta la scomposizione, si procede allo studio del segno di ciascun fattore come nel caso delle disequazioni fratte viste nella Sezione 3.3.2.

   Se, invece, $\Delta < 0$ il trinomio $ax^2 + bx + c$ *non è scomponibile* e, quindi, non si annulla mai. Pertanto, esso è sempre positivo oppure è sempre negativo. Per capire di quale caso si tratti, basta sostituire ad x un valore e vedere il segno del risultato. Siccome $x = 0$ è particolarmente comodo ed "estrae" il termine noto c del trinomio si ha che se $c > 0$ allora $ax^2 + bx + c$ è sempre positivo, mentre se $c < 0$ allora $ax^2 + bx + c$ è sempre negativo.

2. Il metodo grafico è un modo molto veloce ed immediato per risolvere le disequazioni di secondo grado e consiste nell'osservare che la disequazione (3.24), dopo aver posto $y = ax^2 + bx + c$, può essere risolta graficamente individuando gli intervalli della variabile x per i quali la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ si trova sopra o coincide con l'asse delle ascisse. Evidentemente, se la disequazione è del tipo $ax^2 + bx + c < 0$, si procede sempre ponendo $y = ax^2 + bx + c$, ma cercando gli intervalli della variabile x per i quali la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ si trova sotto (strettamente) all'asse delle ascisse.

   Come per il metodo (1), si possono verificare 3 casi:

   (a) la parabola $y = ax^2 + bx + c$ interseca l'asse delle ascisse, ovvero $\Delta > 0$
   (b) la parabola $y = ax^2 + bx + c$ è tangente al'asse delle ascisse, ovvero $\Delta = 0$
   (c) la parabola $y = ax^2 + bx + c$ *non* interseca l'asse delle ascisse, ovvero $\Delta < 0$.

   La concavità della parabola (verso l'alto o verso il basso) dipende, come noto, dal segno del coefficiente di secondo grado a: se $a > 0$ è verso l'alto, se $a < 0$ è verso il basso.

   Ricapitolando, i passi da seguire per la soluzione delle disequazioni di secondo grado con il medoto della parabola sono 2:

   (a) in base al segno del coefficiente a si disegna una parabola con concavità verso l'alto (se $a > 0$) o verso il basso (se $a < 0$), facendo attenzione a non tracciare l'asse delle ascisse

(b) in base al segno del Δ si disegna l'asse delle ascisse evidenziando 2 intersezioni se $\Delta > 0$, una sola (asse tangente) se $\Delta = 0$ o nessuna (asse e parabola non hanno punti in comune) se $\Delta < 0$.

Esercizio 3.25 *Si risolva, nei due modi, la disequazione*

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \tag{3.26}$$

e si confrontino i risultati.

Risoluzione. Vediamo i due modi.

1. Scomponendo si ottiene $(x-2)(x-3) \geq 0$. Lo studio dei segni porta a

$$x - 2 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 2, \qquad x - 3 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 3,$$

riassunti nella tabella 3.3. Si osservi che la prima riga è riferita al fattore $x-2$ con i segni "+" a destra di 2 e quelli "−" a sinistra di 2. In modo analogo, la seconda riga è riferita

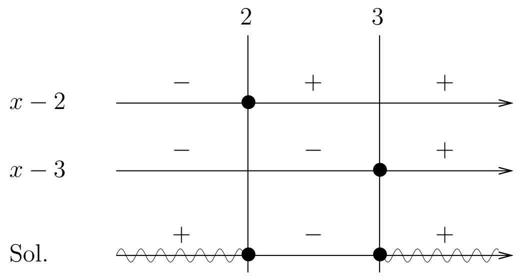


Tabella 3.3: Studio dei segni dei fattori $x-2$ e $x-3$ per la disequazione 3.26.

al fattore $x-3$ con i segni "+" a destra di 3 e quelli "−" a sinistra di 3. Si notino i pallini pieni sia in 2 che in 3 in quanto la disuguaglianza non è stetta. Il segno del prodotto dei fattori è riportato nella terza riga: esso è positivo per valori di x esterni a 2 e 3 e negativo altrove. Pertanto, siccome la disequazione 3.26 richiede gli intervalli in cui il prodotto è positivo, la soluzione è $x \leq 2 \vee x \geq 3$.

2. Il secondo modo (metodo grafico tramite l'utilizzo della parabola) considera $y = x^2 - 5x + 6$ una parabola. Si ha:

   (a) $a = 1 > 0 \Longrightarrow$ parabola con convessa (concavità verso l'alto)

   (b) $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0 \Longrightarrow$ due intersezioni con l'asse x che sono $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 2$ e $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 3$.

   La parabola è, quindi, come quella in figura 3.1. Si osservi che $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ equivale a chiedere che la parabola di equazione $y = x^2 - 5x + 6$ sia positiva, ovvero che la y sia sopra l'asse x. Questo succede, come si nota dal grafico, solo per valori di x esterni a 2 e 3, mentre la parabola è negativa per valori interni. Pertanto, la soluzione è è $x \leq 2 \vee x \geq 3$.

■

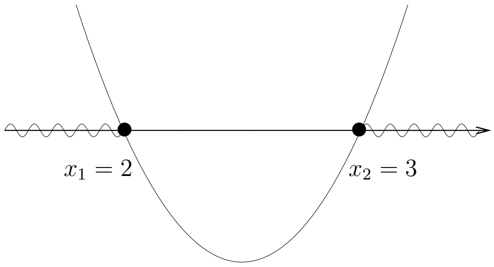


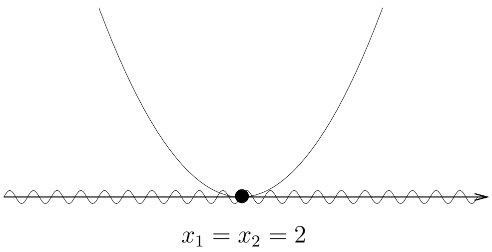
Figura 3.1: Risoluzione grafica della disequazione 3.26 tramite l'utilizzo della parabola.

Esercizio 3.27 *Si risolvano, utilizzando il metodo grafico della parabola, le disequazioni*

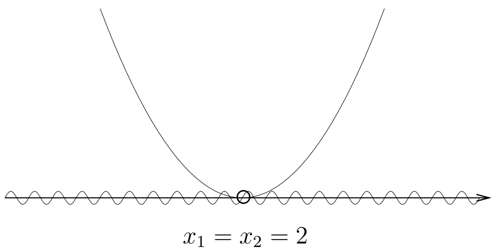
$$1.\ x^2-4x+4 \geq 0, \qquad 2.\ x^2-4x+4 > 0, \qquad 3.\ x^2-4x+4 \leq 0, \qquad 4.\ x^2-4x+4 < 0. \quad (3.28)$$

Risoluzione. La parabola $y = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ ha la concavità verso l'alto ed è tangente all'asse x nel punto $x = 2$, come riportato in figura 3.2.

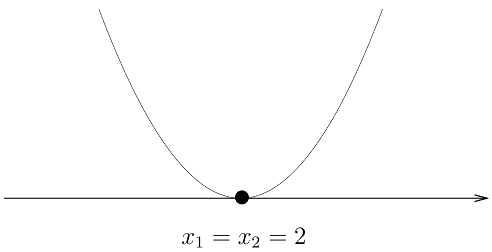
1. $x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$



2. $x^2 - 4x + 4 > 0 \Longrightarrow x \neq 2$



3. $x^2 - 4x + 4 \leq 0 \Longrightarrow x = 2$



4. $x^2 - 4x + 4 < 0 \Longrightarrow$ impossibile

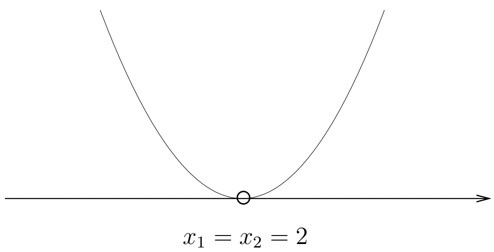


Figura 3.2: Risoluzione grafica delle disequazioni 3.28 tramite l'utilizzo della parabola.

1. $x^2 - 4x + 4 \geq 0$. Siccome la parabola è tangente all'asse x e sempre maggiore o uguale a zero, la disequazione risulta sempre verificata e la soluzione è $\forall x \in \mathbb{R}$. In figura 3.2 (in alto a sinistra) si noti l'ondina ovunque e il pallino pieno in $x = 2$.

2. $x^2 - 4x + 4 > 0$. In questo caso viene richiesto quando la parabola è strettamente maggiore di zero. Siccome la parabola è zero per $x = 2$ e positiva altrove, bisogna escludere il solo punto di tangenza e quindi la soluzione è $x \neq 2$. In figura 3.2 (in alto a destra) si noti l'ondina ovunque e il pallino vuoto in $x = 2$.

3. $x^2 - 4x + 4 \leq 0$. Siccome viene richiesto quando la parabola è negativa o nulla, l'unica soluzione si ha quando la parabola è zero, ovvero per $x = 2$, in quanto altrove la parabola è sempre positiva. La soluzione è quindi $x = 2$. In figura 3.2 (in basso a sinistra) si noti l'assenza dell'ondina e il pallino pieno in $x = 2$.

4. $x^2 - 4x + 4 < 0$. La parabola è sempre positiva o nulla e quindi la disequazione non è mai verificata. Pertanto la disequazione è impossibile. In figura 3.2 (in basso a destra) si noti l'assenza dell'ondina e il pallino vuoto in $x = 2$.

■

3.5 Intere di grado superiore al secondo

3.6 Sistemi

3.7 Irrazionali

3.8 Con valore assoluto

3.9 Logaritmiche

3.10 Esponenziali

3.11 Goniometriche

TODO