Compendio di

Calcolo Combinatorio

in preparazione all'esame di stato

Simone Zuccher

12 aprile 2013

Indice

Lo scopo del *calcolo combinatorio* è di dire in quanti modi si possono fare certe cose, ad esempio quanti anagrammi esistono (anche senza significato) della parola *CIAO* o *MAMMA*, quanti gruppi di tre persone si possono fare avendo a disposizione 100 persone, in quanti modi si possono far sedere attorno ad un tavolo rotondo 9 persone facendo in modo che 2 non siano mai vicine (perché non si sopportano) e così via. Il calcolo combinatorio ha, quindi, una grande utilità pratica.

1 Permutazioni semplici

Immaginiamo di avere 4 caselle numerate (1, 2, 3 e 4) nelle quali si vogliono mettere 4 oggetti diversi tra loro (ad esempio 4 frutti diversi, una mela, una pera, una banana ed un'arancia). Quanti sono tutti i modi possibili in cui si possono riempire le 4 caselle con i 4 frutti a disposizione? Basta ragionare nel modo seguente: nella posizione 1 si hanno 4 possibilità (ciascuno dei 4 frutti), nella posizione 2 si hanno 3 possibilità (i 3 frutti rimasti), nella posizione 3 si hanno solo 2 possibilità e nella posizione 4 solo una (l'ultimo frutto rimasto). Pertanto, le possibilità sono:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Definizione 1.1 *Dati n oggetti distinti, chiamiamo permutazioni semplici degli n oggetti tutti i gruppi che si possono formare con gli n oggetti dati prendendoli, ogni volta, tutti.*

Il numero di *permutazioni semplici* di n oggetti viene indicato con P_n e, per quanto visto nell'esempio dei 4 frutti, si ha

$$P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Il prodotto $n(n-1)(n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ prende il nome di *fattoriale* del numero naturale n, pertanto

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Si osservi che

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)!$$

e così via. Quindi se si conosce il fattoriale di $n-1$ è immediato calcolare il fattoriale di n. Andando a ritroso è però necessario calcolare il fattoriale di 0, che è 1, così come il fattoriale di 1:

$$0! = 1, \qquad 1! = 1.$$

Partendo da questi si posso costruire tutti i fattoriali dei numeri naturali successivi:

$$\begin{aligned} 2! &= 2 \cdot 1 = 2 \\ 3! &= 3 \cdot 2! = 6 \\ 4! &= 4 \cdot 3! = 24 \\ 5! &= 5 \cdot 3! = 120 \\ 6! &= 6 \cdot 120 = 720 \\ 7! &= 7720 = 5040. \end{aligned}$$

2 Permutazioni con ripetizione

Le permutazioni semplici rispondono alla domanda: quanti anagrammi si possono fare della parola *CIAO* (includendo anche le parole che non hanno significato)? Evidentemente, essendo $n = 4$, gli anagrammi possibili sono $P_4 = 4! = 24$. Tuttavia se nella parola sono presenti delle lettere che si ripetono, le cose si complicano: quanti sono gli anagrammi della parola *MAMMA*? In questo caso scambiando tra loro le 3 M e le 2 A non si aumentano le possibilità, quindi il numero di anagrammi della parola *MAMMA* si calcola dividendo il numero di permutazioni delle 6 lettere a disposizione per il numero di permutazioni delle 3 M e per il numero di permutazioni delle 2 A:

$$\frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 5 \cdot 2 = 10.$$

Definizione 2.2 *Dati n oggetti dei quali il primo si ripete k_1 volte ($k_1 < n$), il secondo k_2 volte ($k_2 < n$), il terzo k_3 volte ($k_3 < n$) e l'ultimo k_n volte ($k_n < n$) in modo che $k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_n = n$, chiamiamo permutazioni con ripetizione tutti i gruppi che si possono formare con gli n oggetti dati prendendoli, ogni volta, tutti.*

Il numero di *permutazioni con ripetizione* di n oggetti viene indicato con $P_n^{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n}$ e, per quanto visto a proposito dell'anagramma di *MAMMA*, si ha

$$P_n^{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\ldots k_n!}.$$

3 Disposizioni semplici

Immaginiamo di avere 4 caselle numerate (1, 2, 3 e 4) nelle quali si vogliono mettere 6 oggetti diversi tra loro (ad esempio 6 frutti diversi, una mela, una pera, una banana, un'arancia un kiwi ed una pesca). Come per le permutazioni semplici, la prima casella può essere riempita in 6 possibili modi, la seconda in 5, la terza in 4 e l'ultima in 3. Pertanto il numero di modi possibili di disporre i 6 oggetti in 4 caselle sono

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$$

Definizione 3.3 *Dati n oggetti distinti, si dicono disposizioni semplici di n oggetti di classe k (con $k \leq n$, con tutti gli oggetti presi al massimo una sola volta) tutti i raggruppamenti di k oggetti che si possono formare in modo che due raggruppamenti differiscano o per gli oggetti presenti o per l'ordine in cui gli oggetti sono disposti.*

Si osservi che due gruppi distinti possono essere formati dagli stessi oggetti purché l'ordine in cui sono disposti sia diverso. Il numero di *disposizioni semplici* di n oggetti di classe k viene indicato con $D_{n,k}$ e si ha

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Evidentemente, se $k = n$, ossia se si prendono *tutti* gli n oggetti a disposizione, si ricade nel caso delle permutazioni semplici:

$$D_{n,n} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1) = P_n.$$

4 Disposizioni con ripetizione

Quanti numeri di 4 cifre si possono comporre con la tastiera del telefono? Facile, tutti i numeri tra 0000 e 9999, ossia 10000. Tuttavia, con le sole cifre 1, 2 e 3 quanti numeri di 4 cifre si possono comporre con il telefono? Basta seguire questo ragionamento: la prima cifra può essere scelta in 3 modi, la seconda pure, così come la terza e la quarta, pertanto il numero di numeri di 4 cifre costruiti con le cifre 1, 2 e 3 sono:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81.$$

Definizione 4.4 *Dati n oggetti distinti, si dicono disposizioni con ripetizione di n oggetti di classe k (k può essere maggiore, minore o uguale ad n) tutti i raggruppamenti di k oggetti che si possono formare, anche ripetendo un oggetto fino a k volte, in modo che due raggruppamenti differiscano o per gli oggetti o per l'ordine in cui sono disposti.*

È importante osservare che, come detto nella definizione, un raggruppamento può essere formato dallo stesso oggetto ripetuto fino a k volte. Il numero di *disposizioni con ripetizione* di n oggetti di classe k viene indicato con $D'_{n,k}$ e si ha

$$D'_{n,k} = n^k.$$

5 Combinazioni semplici

In una classe ci sono 25 studenti e l'insegnante decide di interrogarne 4 (tutti assieme). Quanti gruppi di 4 ragazzi può interrogare l'insegnante? Si osservi che, a differenza delle disposizioni semplici, in questo caso *non conta l'ordine* in cui gli oggetti vengono raggruppati e quindi due gruppi differiscono *esclusivamente per gli oggetti in essi contenuti.* Pertanto il numero di gruppi di 4 persone costituibili a partire da 25 ragazzi sono il numero di disposizioni semplici di 25 ragazzi presi a gruppi di 4 diviso per il numero di permutazioni dei 4 studenti presenti in ciascun gruppo:

$$\frac{D_{25,4}}{4!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 12650$$

Definizione 5.5 *Dati n oggetti distinti, si dicono combinazioni semplici di n oggetti di classe k (con $k \leq n$, con tutti gli oggetti presi al massimo una sola volta) tutti i raggruppamenti di k oggetti che si possono formare in modo che due raggruppamenti differiscano per gli oggetti presenti in essi.*

Quindi due gruppi formati dagli stessi oggetti sono lo stesso gruppo (si pensi ad una squadra di calcio, piuttosto che ai gruppetti di ragazzi che sono interrogati). Il numero di *combinazioni semplici* di n oggetti di classe k viene indicato con $C_{n,k}$ e si ha

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!}.$$

Si osservi che, moltiplicando $C_{n,k}$ a numeratore e a denominatore per $(n-k)!$ si ha

$$\begin{aligned} C_{n,k} &= \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

In definitiva,

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

6 Combinazioni con ripetizione

Definizione 6.6 *Dati n oggetti distinti, si dicono combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k (k può essere maggiore, minore o uguale ad n) tutti i raggruppamenti di k oggetti che si possono formare, anche ripetendo un oggetto fino a k volte, in modo che due raggruppamenti differiscano per gli oggetti.*

Anche in questo caso è importante osservare che, come detto nella definizione, un raggruppamento può essere formato dallo stesso oggetto ripetuto fino a k volte. Il numero di *combinazioni con ripetizione* di n oggetti di classe k viene indicato con $C'_{n,k}$ e si ha

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n+k-1)}{k!}.$$

7 Coefficiente binomiale

Il simbolo $C_{n,k}$, utilizzato per indicare il numero di combinazioni semplici di n oggetti di classe k, viene anche indicato con il simbolo seguente che si legge semplicemente *n su k*:

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Si osservi che valgono le seguenti proprietà:

$$\binom{n}{1} = n, \qquad \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1},$$

Il nome *coefficiente binomiale* deriva dal fatto che la potenza n-esima di un binomio $(a+b)^n$ può essere espressa in modo compatto come

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

dove $\binom{n}{k}$ sono proprio i coefficienti dei vari termini. Per esempio, $(a+b)^4$ è

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^{4-k} b^k \\ &= \binom{4}{0} a^{4-0}b^0 + \binom{4}{1} a^{4-1}b^1 + \binom{4}{2} a^{4-2}b^2 + \\ &\quad \binom{4}{3} a^{4-3}b^3 + \binom{4}{4} a^{4-4}b^4 \\ &= \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3 b + \binom{4}{2} a^2b^2 + \\ &\quad \binom{4}{3} ab^3 + \binom{4}{4} b^4 \end{aligned}$$

Osservando che

$$\begin{aligned} \binom{4}{0} &= \frac{4!}{0!4!} = 1 \\ \binom{4}{1} &= \frac{4!}{1!3!} = \frac{4\cdot 3!}{3!} = 4 \\ \binom{4}{2} &= \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2!}{2!2!} = \frac{4\cdot 3}{2!} = 6 \\ \binom{4}{3} &= \frac{4!}{3!1!} = \frac{4\cdot 3!}{3!} = 4 \\ \binom{4}{4} &= \frac{4!}{4!0!} = 1, \end{aligned}$$

in definitiva si ha

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

che equivale a calcolare la potenza di un binomio utilizzando i coefficienti del *Triangolo di Tartaglia*.

Si osservi che la potenza del binomio permette anche di calcolare 2^n come $(a+b)^n$ con $a = b = 1$:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

8 Esercizi

Le soluzioni ed alcune risoluzioni sono riportate di seguito agli esercizi.

1. Quanti numeri di 3 cifre, tutte distinte, si possono formare con i numeri 3, 5, 6, 7, 9?
2. Quanti numeri di 3 cifre, che cominciano per 5 e che sono formati da cifre tutte distinte, si possono formare con i numeri 4, 5, 6, 7, 8, 9?
3. Quante parole di 5 lettere distinte si possono formare con un alfabeto di 21 lettere?
4. Quanti anagrammi esistono della parola *MISSISSIPPI*? Quanti di questi cominciano per M e terminano per S?

5. Quante sono le terne che si possono formare con i 90 numeri del lotto?

6. In quanti modi si possono mettere in fila 5 persone?

7. In quanti modi si possono mettere in fila 4 ragazzi e 3 ragazze?

8. In quanti modi si possono mettere in fila 4 ragazzi e 3 ragazze in modo che i ragazzi siano tutti vicini tra loro e le ragazze tutte vicine tra loro?

9. In quanti modi si possono mettere in fila 4 ragazzi e 3 ragazze in modo che le ragazze siano tutte vicine tra loro?

10. Verifica la seguente identità

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n+1}{n-k+1}\binom{n}{k}.$$

11. Risolvere l'equazione

$$\binom{x}{x-2} = 2x.$$

12. Quante partite di calcio vengono complessivamente disputate (tra andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2003, sessione ordinaria)

13. Calcolare se esiste un numero naturale n per il quale risulti

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 1\,048\,576.$$

(Esame di stato Liceo Scientifico ordinario, 2001, sessione supplettiva)

14. Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90.
(Esame di stato Liceo Scientifico ordinario, 2003, sessione ordinaria)

15. Un professore interroga i suoi alunni due alla volta. Stabilire quante possibili coppie diverse può interrogare sapendo che la classe è composta da 20 alunni.
(Esame di stato Liceo Scientifico ordinario, scuole italiane all'estero, 2004, sessione ordinaria)

16. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$, quante sono le applicazioni (funzioni) di A in B?
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2004, sessione ordinaria)

17. Una classe è formata da 27 alunni: 15 femmine e 12 maschi. Si deve costruire una delegazione di 5 alunni, di cui 3 femmine e 2 maschi. Quante sono le possibili delegazioni?
(Esame di stato Liceo Scientifico ordinario, 2005, sessione supplettiva)

18. Alla finale dei 200 m piani partecipano 8 atleti, fra i quali figurano i nostri amici Antonio e Pietro. Calcolare il numero dei possibili ordini di arrivo che registrino i nostri due amici tra i primi 3 classificati.
(Esame di stato Liceo Scientifico ordinario, 2004, sessione supplettiva)

19. In quanti modi 10 persone possono disporsi su dieci sedili allineati? E attorno ad un tavolo circolare?
(Esame di stato Liceo Scientifico ordinario, 2010, sessione supplettiva)

20. Il numero delle combinazioni di n oggetti presi 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti presi 3 a 3. Si trovi n.
(Esame di stato Liceo Scientifico ordinario e PNI, 2011, sessione ordinaria)

21. Dimostrare la seguente formula:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dove n e k sono numeri naturali tali che $0 < k < n$. Essa spiega una delle regole sulle quali è basata la costruzione del *Triangolo di Tartaglia* (da Niccolò Fontana, detto Tartaglia, 1505 circa – 1557): enunciarla.
(Esame di stato Liceo Scientifico ordinario, 2005, sessione supplettiva)

22. Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n-2}$, $\binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?
(Esame di stato Liceo Scientifico ordinario e PNI, 2010, sessione ordinaria)

23. Si dimostri l'identità:

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$$

con n e k naturali e $n > k$.
(Esame di stato Liceo Scientifico ordinario e PNI, 2009, sessione ordinaria)

24. Come si definisce $n!$ (n fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Qual è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?
(Esame di stato Liceo Scientifico PNI, 2005, sessione ordinaria)

25. Si risolva l'equazione:

$$4\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3}.$$

(Esame di stato Liceo Scientifico ordinario, 2007, sessione ordinaria)

26. Si risolva la disequazione:

$$\binom{x}{3} > \frac{15}{2}\binom{x}{2}.$$

(Esame di stato Liceo Scientifico ordinario, 2007, sessione supplettiva)

Soluzione/risoluzione degli esercizi

1. Siccome le cifre dei numeri devono essere tutte *distinte* ed due numeri formati dalle stesse cifre differiscono se l'ordine delle cifre è diverso, si tratta di una disposizione semplice di 5 oggetti di classe 3: $D_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

2. La prima cifra è 5, le altre 2 possono essere scelte tra le rimanenti 5 cifre ma queste 2 cifre devono essere diverse tra loro, quindi i numeri possibili sono le disposizioni semplici 5 oggetti di classe 2: $D_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$.

3. Essendo le lettere *distinte* e siccome 2 parole differiscono per l'ordine delle lettere presenti in esse, si tratta della disposizione semplice di 21 oggetti di classe 5: $D_{21,5} = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 2\,441\,880$.

4. La parola *MISSISSIPPI* è formata da 11 lettere, di cui quelle ripetute sono 4 S, 4 I e 2 P, pertanto il numero dei suoi anagrammi è $P_{11}^{4,4,2} = \dfrac{11!}{4!4!2!} = 34650$. Quanto si fissano la prima lettera a M e l'ultima a S rimangono 9 lettere di cui 3 S, 4 I e 2 P, pertanto il numero dei suoi anagrammi è $P_9^{3,4,2} = \dfrac{9!}{3!4!2!} = 1260$.

5. Ogni numero può essere estratto una sola volta, inoltre nelle terne non conta l'ordine di estrazione, pertanto sono le combinazioni semplici di 90 oggetti presi a gruppi di 3: $D_{90,3} = \dbinom{90}{3} = \dfrac{90!}{3!(90-3)!} = \dfrac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 97!} = 15 \cdot 89 \cdot 88 = 117\,480$.

6. 120.

7. Si osservi che, comunque, si tratta di mettere in fila 7 persone diverse, ossia di permutazioni semplici di 7 oggetti: $P_7 = 5040$.

8. Si osservi, anzitutto, che mettere prima i 4 ragazzi e poi le 3 ragazze è una possibilità, mentre mettere prima le ragazze e poi i ragazzi è un'altra. Concentriamo sulla prima: i ragazzi si possono mettere in 4! modi e le ragazze in 3! modi, quindi in totale le permutazioni sono $2 \cdot 4!3! = 288$.

9. 720.

10. Ricordando che
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!}$$
e
$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)!}\end{aligned}$$
si ha
$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)!} \\ &= \frac{(n-k+1)n! + k \cdot n!}{k(k-1)!(n-k+1)(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n-k+1+k)}{(n-k+1)k!(n-k)!} \\ &= \frac{n+1}{n-k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n+1}{n-k+1}\binom{n}{k}\end{aligned}$$

11. Prima di tutto bisogna assicurasi che l'espressione abbia significato, ossia che x e $x-2$ siano dei *naturali non negativi* pertanto le condizioni di esistenza sono
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \implies x \geq 2, \quad x \in \mathbb{N}.$$
Ricordando che $\dbinom{x}{x-2} = \dfrac{x!}{(x-2)!(x-x+2)!}$ si ha $\dbinom{x}{x-2} = 2x \iff \dfrac{x!}{(x-2)!2!} = 2x \iff \dfrac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!2!} = 2x \iff \dfrac{x(x-1)}{2} = 2x \iff x^2 - x = 4x \iff x^2 - 5x = 0 \implies x = 0 \vee x = 5$. Siccome, per le condizioni di esistenza, deve essere $x \geq 2$, l'unica soluzione accettabile è $x = 5$.

12. 306.

13. 20.

14. 109 736

15. 190.

16. 81.

17. 30 030.

18. 36.

19. $10! = 3\,628\,800$ e $9! = 362\,880$.

20. $n = 7$.

21. Si pensi a come si costruisce il triangolo di tartaglia al livello n, dove il coefficiente k (a parte il primo e l'ultimo) è la somma dei coefficienti k e $k-1$ ottenuti al livello $n-1$.

22. $n = 7$.

23. Si proceda come al solito.

24. Si veda la teoria.

25. $n = 6 \vee n = 10$.

26. $x \geq 25, x \in \mathbb{N}$.