



Appendice Q

Il problema di Riemann della gasdinamica

Introduzione Questa appendice è dedicata allo studio del problema di Riemann della gasdinamica, cioè il problema ai valori iniziali per le equazioni di Eulero in una dimensione, soggetto a una condizione iniziale di tipo molto particolare. Essa è costituita da un salto delle variabili fra due stati, con una distribuzione uniforme a sinistra della discontinuità e un'altra distribuzione pure uniforme a destra, fino all'infinito. La soluzione del problema di Riemann dipende dai valori delle variabili negli stati sinistro e destro, ed è sempre di tipo similare, ossia tutte le grandezze hanno un valore costante su ogni raggio del piano spazio-temporale uscente dal punto in cui si trova inizialmente il salto. Inoltre, la soluzione è costituita in generale da tre onde distinte generate dal disintegrarsi della discontinuità iniziale e che si propagano con velocità determinate. Lo studio delle soluzioni dei problemi di Riemann ha quindi un grande interesse per le comprensioni delle onde non lineari che si propagano nei fluidi comprimibili.

Esiste tuttavia un altro importante motivo per studiare a fondo il problema di Riemann e per costruire un metodo per la sua risoluzione, per valori iniziali arbitrari: i metodi di calcolo moderni per la risoluzione delle equazioni di Eulero in campo transonico, supersonico e ipersonico si basano proprio sulla risoluzione di problemi di Riemann. Infatti, una volta suddiviso il dominio computazionale in celle elementari, contigue e senza sovrapposizione, chiamate *volumi finiti*, si procede all'integrazione spaziale delle equazioni su ciascuna cella. Si ottengono così delle equazioni in forma discreta, pronte per essere integrate nel tempo risolvendo a ogni livello temporale tutti i problemi di Riemann definiti a cavallo di ogni interfaccia fra coppie di celle contigue. Le tecniche di simulazione numerica delle correnti comprimibili nei regimi suddetti utilizzano quindi algoritmi che si basano sulla risoluzione esatta o approssimata di un grandissimo numero di problemi di Riemann.

In queste pagine il problema di Riemann è affrontato considerando inizialmente un gas dotato di proprietà termodinamiche arbitrarie. La soluzione di tale problema nella sua veste generale è definita da un sistema di due equazioni non lineari in due incognite, secondo un'impostazione introdotta dal primo autore di questo testo assieme ad Alberto Guardone. Questa formulazione originale del problema di Riemann è poi particolarizzata nel penultimo paragrafo al caso di gas ideale politropico, che è di grande interesse per le applicazioni computazionali, e nell'ultimo paragrafo al gas di van der Waals, sia politropico sia non politropico.

Q.1 Autovalori e autovettori delle equazioni di Eulero

Deduzione dell'equazione del volume specifico v

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{v} \right) = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\nabla \rho = \nabla \left(\frac{1}{v} \right) = -\frac{1}{v^2} \nabla v$$

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{v} \right) - \frac{1}{v^2} \mathbf{u} \cdot \nabla v + \frac{1}{v} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v - v \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Per formulare il problema di Riemann della gasdinamica è comodo scrivere le equazioni di Eulero in forma quasi lineare scegliendo come variabili indipendenti il volume specifico v (invece della densità ρ), la velocità \mathbf{u} e l'entropia specifica s del fluido (invece della sua energia interna e). Dato che $v = 1/\rho$, è facile trasformare l'equazione di conservazione della massa in un'equazione per la variabile v , ottenendo:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v = v \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Ricordiamo inoltre che, in assenza di urti e discontinuità, l'equazione di bilancio dell'energia interna, quando la viscosità e la conduzione termica del fluido possono essere considerate trascurabili, è equivalente all'equazione di trasporto dell'entropia s :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla s = 0.$$





Di conseguenza il sistema delle equazioni di Eulero per correnti unidimensionali può essere scritto come

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_s \frac{\partial v}{\partial x} + v \left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_v \frac{\partial s}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} &= 0,\end{aligned}$$

dove $P = P(s, v)$ rappresenta un'equazione di stato del fluido. La scelta delle variabili termodinamiche v e s al posto di ρ ed e non è obbligatoria, ma permette di ottenere alcuni risultati in modo più immediato, oltre a costituire un utile esercizio per imparare a usare delle variabili alternative rispetto a quelle usuali. Introducendo il vettore delle incognite e la matrice

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} v \\ u \\ s \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} u & -v & 0 \\ v \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_s & u & v \left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_v \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

il precedente sistema iperbolico non lineare può essere scritto nella forma compatta

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0.$$

Problema agli autovalori e velocità caratteristiche

Come già discusso nel paragrafo 9.10, gli autovalori della matrice $\mathbf{A}(\mathbf{w})$ del sistema iperbolico forniscono le velocità con cui si propagano le informazioni nel fluido. In generale gli autovalori λ di una matrice \mathbf{A} si ottengono risolvendo l'**equazione caratteristica**

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Nel caso fluidodinamico in esame, la matrice del sistema iperbolico dipende dal vettore \mathbf{w} per cui anche i suoi autovalori saranno funzione di \mathbf{w} . Questo legame di dipendenza è fondamentale per stabilire le caratteristiche fisiche differenti delle onde che possono propagarsi nel fluido considerato. L'equazione caratteristica del nostro problema agli autovalori sarà quindi scritta nel seguente modo

$$\det[\mathbf{A}(\mathbf{w}) - \lambda(\mathbf{w}) \mathbf{I}] = \begin{vmatrix} u - \lambda & -v & 0 \\ v \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_s & u - \lambda & v \left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_v \\ 0 & 0 & u - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante secondo gli elementi dell'ultima riga si ottiene

$$(u - \lambda) \begin{vmatrix} u - \lambda & -v \\ v \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_s & u - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

e calcolando il determinante 2×2 si ha

$$(u - \lambda) \left[(u - \lambda)^2 + v^2 \left(\frac{\partial P(s, v)}{\partial v} \right)_s \right] = 0.$$

Introducendo ora la velocità del suono

$$c \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s} = \sqrt{-v^2 \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_s},$$





l'equazione caratteristica assume la forma seguente

$$(u - \lambda)[(u - \lambda)^2 - c^2] = 0,$$

e gli autovalori sono le soluzioni delle due equazioni

$$u - \lambda = 0 \quad \text{e} \quad (u - \lambda)^2 - c^2 = 0.$$

I tre autovalori, ordinati in modo crescente, sono quindi

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c.$$

Volendo indicare esplicitamente la dipendenza delle velocità caratteristiche λ_1 , λ_2 e λ_3 dallo stato \mathbf{w} del fluido scriveremo più estesamente

$$\lambda_1(\mathbf{w}) = u - c(s, v), \quad \lambda_2(\mathbf{w}) = u, \quad \lambda_3(\mathbf{w}) = u + c(s, v).$$

Il confronto con quanto ottenuto nel paragrafo 9.10 mostra che gli autovalori del sistema iperbolico non dipendono dalla scelta particolare delle variabili, come, ad esempio, v , u e s , nel calcolo presente.

Per comprendere come il carattere non lineare del sistema iperbolico si realizzi nei suoi diversi autovalori è necessario determinare gli autovettori associati agli autovalori. Per fare questo è sufficiente sostituire l'autovalore nella matrice del sistema e risolvere poi il sistema lineare omogeneo risultante. Consideriamo il primo autovalore $\lambda_1 = u - c(s, v)$; la sostituzione negli elementi diagonali della matrice fornisce il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{pmatrix} c(s, v) & -v & 0 \\ v(\frac{\partial P}{\partial v})_s & c(s, v) & v(\frac{\partial P}{\partial s})_v \\ 0 & 0 & c(s, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ U_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = 0,$$

nelle tre incognite V_1 , U_1 e S_1 , dove $c(s, v)$ è la velocità del suono. Per la terza equazione $S_1 = 0$ e il sistema si riduce a

$$\begin{pmatrix} c(s, v) & -v \\ -c^2(s, v)/v & c(s, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ U_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Le due equazioni sono la stessa equazione, $c(s, v) V_1 - vU_1 = 0$, per cui l'autovettore è definito a meno di una costante di normalizzazione e, senza alcuna limitazione di generalità, si può scegliere come autovettore $(V_1, U_1, S_1) = (v, c(s, v), 0)$. In modo analogo si ottiene l'autovettore associato al terzo autovalore $\lambda_3 = u + c(s, v)$, che si può prendere come $(V_3, U_3, S_3) = (v, -c(s, v), 0)$. L'autovettore associato all'autovalore intermedio $\lambda_2 = u$ si ottiene scrivendo il sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & -v & 0 \\ v(\frac{\partial P}{\partial v})_s & 0 & v(\frac{\partial P}{\partial s})_v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ U_2 \\ S_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Dalla prima equazione segue $U_2 = 0$ e il sistema si riduce a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v(\frac{\partial P}{\partial v})_s & v(\frac{\partial P}{\partial s})_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ S_2 \end{pmatrix} = 0.$$

La prima equazione è soddisfatta comunque mentre la seconda equazione richiede

$$(\frac{\partial P}{\partial v})_s V_2 + (\frac{\partial P}{\partial s})_v S_2 = 0.$$

Pertanto, si può scegliere il secondo autovettore $(V_2, U_2, S_2) = (-(\frac{\partial P}{\partial s})_v, 0, (\frac{\partial P}{\partial v})_s)$. Scriveremo i tre autovettori insieme nel modo seguente

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} v \\ c(s, v) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} -(\frac{\partial P}{\partial s})_v \\ 0 \\ (\frac{\partial P}{\partial v})_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} v \\ -c(s, v) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

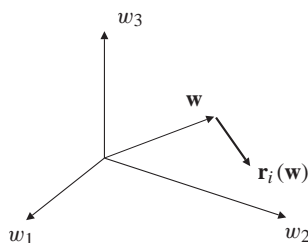


Figura Q.1 Autovettore locale $\mathbf{r}_i(\mathbf{w})$ in \mathbf{w}





Q.2 Non linearità genuina e degenerazione lineare

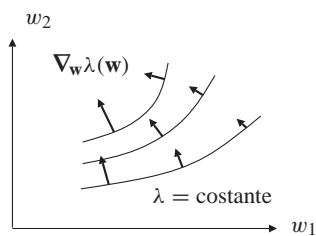


Figura Q.2 Linee di livello dell'autovalore λ e campo vettoriale del suo gradiente $\nabla_{\mathbf{w}}\lambda$

Ciascuno degli autovettori $\mathbf{r}_i(\mathbf{w})$ definisce un campo vettoriale nello spazio dei vettori $\mathbf{w} = (v, u, s)$. Ciascuno degli autovalori $\lambda_i(\mathbf{w})$ definisce a sua volta un campo scalare nello stesso spazio a tre dimensioni. Il gradiente di ogni autovalore costituisce un altro campo *vettoriale*, $\nabla_{\mathbf{w}}\lambda(\mathbf{w})$, sempre nel medesimo spazio, dove $\nabla_{\mathbf{w}}$ rappresenta appunto l'operatore gradiente nello spazio dei vettori \mathbf{w} .

Nel caso delle equazioni di Eulero della gasdinamica i campi vettoriali del gradiente dei tre autovalori sono

$$\nabla_{\mathbf{w}}\lambda_1(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\partial c}{\partial v}\right)_s \\ 1 \\ -\left(\frac{\partial c}{\partial s}\right)_v \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\mathbf{w}}\lambda_2(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\mathbf{w}}\lambda_3(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial c}{\partial v}\right)_s \\ 1 \\ \left(\frac{\partial c}{\partial s}\right)_v \end{pmatrix}.$$

La natura non lineare o meno degli autovalori dipende da una ben precisa relazione *geometrica* tra il campo vettoriale dell'autovettore considerato e il campo vettoriale ottenuto come gradiente dell'autovalore corrispondente. Consideriamo allora il seguente prodotto scalare nello spazio dei vettori \mathbf{w} , fra il campo vettoriale di un autovettore e quello del gradiente dell'autovalore corrispondente:

$$\mathbf{r}(\mathbf{w}) \cdot \nabla_{\mathbf{w}}\lambda(\mathbf{w}).$$

L'annullamento di questo prodotto in un punto \mathbf{w} indica l'ortogonalità fra i due campi nel punto stesso.

Se questo prodotto scalare non si annulla mai per qualunque \mathbf{w} , allora l'autovalore è detto **genuinamente non lineare**. In questo caso il *segno* del prodotto scalare è lo stesso per qualunque vettore \mathbf{w} permesso. Al contrario, se il prodotto scalare è nullo per ogni \mathbf{w} , l'autovalore si dice **linearmente degenerare**.

Nel caso delle equazioni di Eulero della gasdinamica si vede immediatamente che il primo e il terzo autovalore sono tali che

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{w}) \cdot \nabla_{\mathbf{w}}\lambda_1(\mathbf{w}) = -v\left(\frac{\partial c}{\partial v}\right)_s + c, \quad \mathbf{r}_3(\mathbf{w}) \cdot \nabla_{\mathbf{w}}\lambda_3(\mathbf{w}) = v\left(\frac{\partial c}{\partial v}\right)_s - c.$$

Pertanto questi autovalori saranno genuinamente non lineari o meno a seconda del valore dell'espressione $c - v\left(\frac{\partial c}{\partial v}\right)_s$. È immediato ricavare che

$$c(s, v) - v \frac{\partial c(s, v)}{\partial v} = c(s, \rho) + \rho \frac{\partial c(s, \rho)}{\partial \rho} = \frac{\partial[\rho c(s, \rho)]}{\partial \rho} = c\Gamma,$$

dove nell'ultimo passaggio è stata introdotta la grandezza adimensionale

$$\Gamma \equiv \frac{1}{c} \frac{\partial[\rho c(s, \rho)]}{\partial \rho},$$

chiamata **derivata fondamentale della gasdinamica**. I prodotti scalari relativi al primo e al terzo autovalore si possono allora scrivere come

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{w}) \cdot \nabla_{\mathbf{w}}\lambda_1(\mathbf{w}) = c\Gamma \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_3(\mathbf{w}) \cdot \nabla_{\mathbf{w}}\lambda_3(\mathbf{w}) = -c\Gamma.$$

Come gli autovalori, anche il loro carattere genuinamente non lineare oppure linearmente degenerare è una proprietà intrinseca del sistema iperbolico; esso dipende dall'annullamento dei prodotti scalari indicati e quest'ultimo è determinato esclusivamente dal valore della funzione Γ . In altre parole, la non linearità genuina e la degenerazione lineare di ciascun autovalore risultano essere le stesse qualunque siano le variabili usate per calcolare il prodotto scalare. Nel seguito supporremo sempre che risulti $\Gamma \neq 0$ in tutto il campo dei valori permessi delle variabili termodinamiche. Questa condizione è sempre verificata sempre nel caso di gas ideale politropico, per il quale si vede facilmente che $\Gamma = \frac{1}{2}(\gamma + 1)$. Anche nel caso di gas di van der Waals la condizione è verificata, tranne che per i gas con molecole aventi almeno 7 atomi e purché il gas si trovi in una regione molto piccola di condizioni termodinamiche. La perdita di non linearità genuina sarà comunque esclusa dalla nostra analisi.

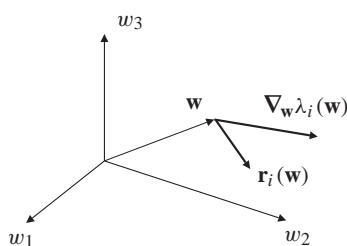


Figura Q.3 Non linearità genuina: $\mathbf{r}_i(\mathbf{w}) \cdot \nabla_{\mathbf{w}}\lambda_i(\mathbf{w}) \neq 0, \forall \mathbf{w}$





Si può notare che l'annullamento dell'espressione $c - v \left(\frac{\partial c}{\partial v} \right)_s$ può essere stabilito anche esaminando la derivata seconda $\frac{\partial^2 P(s, v)}{\partial v^2}$. Infatti, un calcolo diretto mostra che

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P(s, v)}{\partial v^2} &= -\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left[-\rho^2 \frac{\partial P(s, \rho)}{\partial \rho} \right] \\ &= \rho^2 \left[2\rho \frac{\partial P(s, \rho)}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 P(s, \rho)}{\partial \rho^2} \right] \\ &= \rho^3 \left[2 \frac{\partial P(s, \rho)}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 P(s, \rho)}{\partial \rho^2} \right] \\ &= \rho^3 \left[2c^2 + \rho \left(\frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right)_s \right] = 2\rho^3 c \left[c + \rho \left(\frac{\partial c}{\partial \rho} \right)_s \right] \\ &= \frac{2c}{v^3} \left[c - v \frac{\partial c(s, v)}{\partial v} \right]. \end{aligned}$$

Vale la pena di osservare che la derivata seconda $\frac{\partial^2 P(s, v)}{\partial v^2}$ è semplicemente la derivata terza della relazione fondamentale:

$$\frac{\partial^2 P(s, v)}{\partial v^2} = -e_{vvv}(s, v),$$

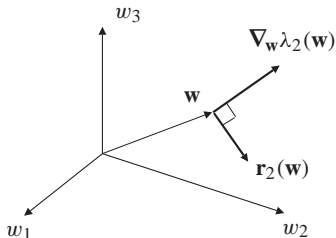


Figura Q.4 Degenerazione lineare: $\mathbf{r}_2(\mathbf{w}) \cdot \nabla_{\mathbf{w}} \lambda_2(\mathbf{w}) = 0, \forall \mathbf{w}$

per cui la perdita di non linearità genuina risulta connessa con le proprietà termodinamiche fondamentali del gas in esame, ma non può essere garantita dalla sua stabilità termodinamica, che dipende solo dalle derivate seconde.

Consideriamo infine l'autovalore intermedio: si vede facilmente che risulta

$$\mathbf{r}_2(\mathbf{w}) \cdot \nabla_{\mathbf{w}} \lambda_2(\mathbf{w}) = -\left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_v \times 0 + 0 \times 1 + \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_s \times 0 = 0,$$

per cui il secondo autovalore è sempre linearmente degenere, indipendentemente dalle proprietà termodinamiche del gas considerato.

Quanto ricavato mostra che il sistema iperbolico delle equazioni di Eulero ha un carattere *misto*, contemporaneamente non lineare e lineare. È questa una proprietà strutturale delle equazioni della gasdinamica in una dimensione che ha anche un corrispettivo ancora più fondamentale nelle equazioni multidimensionali. Nel caso unidimensionale la presenza dell'autovalore intermedio linearmente degenere con le sue caratteristiche specifiche permette di formulare in modo naturale le equazioni che definiscono il problema di Riemann e ne permettono la risoluzione, come si vedrà più avanti.

Q.3 Generalità del problema di Riemann

Come anticipato nell'introduzione il problema di Riemann della gasdinamica è un problema ai valori iniziali per le equazioni di Eulero in una dimensione, con una condizione iniziale molto particolare: le incognite del problema hanno un salto in un determinato punto, normalmente per $x = 0$, e hanno una distribuzione uniforme a sinistra e uniforme a destra della discontinuità, fino all'infinito. Mancando qualunque scala spaziale nella definizione del problema, la soluzione deve essere di tipo similare, ovvero il valore di tutte le variabili sarà costante su ciascun raggio del piano spaziotemporale uscente dalla discontinuità iniziale. La soluzione del problema di Riemann dipenderà evidentemente dai valori delle variabili nello stato sinistro e nello stato destro.





A prima vista, si potrebbe ritenere che l'evoluzione del fluido a partire dalla discontinuità debba essere la propagazione del salto iniziale con una determinata velocità. Infatti, da quanto studiato nel paragrafo 11.2, sappiamo che, quando si considera un salto particolare in cui la velocità e la pressione non variano nell'attraversamento di esso mentre la densità (ovvero il volume specifico) è discontinua, la soluzione delle equazioni di Eulero è una discontinuità di contatto che trasla con la velocità iniziale uniforme del gas. Tuttavia noi siamo interessati al problema di Riemann generico con valori *arbitrari* delle 3 variabili, sia a sinistra sia a destra del salto, mentre nel caso particolare appena considerato i valori di *due* variabili erano determinati dagli altri dati iniziali del problema. Una situazione simile si incontrerebbe anche nel caso in cui i dati a sinistra e destra della discontinuità fossero scelti in modo da soddisfare le tre condizioni di salto di Rankine–Hugoniot dell'urto normale discusse nel paragrafo 11.3, o meglio una loro versione scritta in un sistema di riferimento non solidale con l'urto stesso. In altre parole, viene così eliminata la restrizione che l'urto sia fermo. In tal caso, la soluzione del problema di Riemann sarebbe una singola onda d'urto che si propaga con una determinata velocità. Anche in questo caso tutti i valori iniziali non sarebbero però arbitrari, bensì vincolati ancora da *due* relazioni. Infine, un terzo caso in cui i valori iniziali delle variabili a cavallo del salto sono soggetti sempre a *due* vincoli è quello delle onde di rarefazione instazionarie studiate nel paragrafo 11.5. In questo caso l'entropia specifica è la stessa a sinistra e a destra ed esiste un ulteriore vincolo sui valori iniziali da rispettare affinché la soluzione del problema possa essere effettivamente un'onda di rarefazione.

In tutti questi casi particolari esaminati, l'esistenza di *due* vincoli sui dati iniziali del problema di Riemann ha come conseguenza che la sua soluzione è costituita da una *sola* onda—discontinuità di contatto, onda d'urto oppure onda di rarefazione. Se si esamina invece un problema generico, con *tutti* i sei dati forniti in modo arbitrario e indipendente, allora la soluzione sarà più complicata e comprenderà in generale più di un'onda. Se si rimuove uno solo dei due vincoli, la soluzione comprenderà in generale due onde mentre se si rimuovono entrambi i vincoli allora la soluzione comprenderà in generale tre onde. In altre parole, la soluzione del problema di Riemann della gasdinamica consiste normalmente di tre onde distinte, ciascuna delle quali, in alcuni casi particolari, potrà avere intensità nulla e quindi potrà non comparire nella soluzione.

Se ora ricordiamo il problema del tubo d'urto e la sua soluzione discussi nel paragrafo 11.6, abbiamo visto che in quel caso la discontinuità iniziale si disintegra in tre onde. L'onda intermedia è una discontinuità di contatto che si propaga con la velocità locale u del fluido, che coincide con l'autovalore intermedio (linearmente degenero) del sistema iperbolico. Le altre due onde si propagano con velocità che sono in relazione con le velocità caratteristiche degli autovalori estremi, $u - c$ e $u + c$: nel caso del tubo d'urto esaminato, le onde sono un'onda di rarefazione che si propaga nel gas verso sinistra e un'onda d'urto che si propaga verso destra. Ovviamente, con condizioni iniziali invertite, ossia con una sovrappressione del gas nella regione a destra rispetto a quello della regione a sinistra, si avrebbe la propagazione di un'onda d'urto verso sinistra e di un'onda di rarefazione verso destra. Questo tipo di soluzione, con un'onda di rarefazione e un'onda d'urto, è frequente ma non è l'unica possibile in presenza di tre onde. Infatti, fermo restando che l'onda intermedia è sempre una discontinuità di contatto, il problema di Riemann ammette anche soluzioni con due onde d'urto oppure con due onde di rarefazione. Queste soluzioni possono verificarsi a condizione che i due valori iniziali della velocità comportino, rispettivamente, la collisione fra le porzioni di gas ai due lati della discontinuità, nel caso in cui $u_\ell > 0$ e $u_r < 0$, oppure l'allontanamento relativo, se invece $u_\ell < 0$ e $u_r > 0$. In particolare, nell'ultimo caso di formazione di due onde di rarefazione si può anche raggiungere una condizione di rarefazione estrema che comporta la separazione delle due porzioni di gas e la conseguente formazione di una zona di vuoto fra di esse. In conclusione, la soluzione del problema di Riemann sarà costituita da tre onde, di cui l'onda intermedia è sempre una discontinuità di contatto mentre le altre due onde possono essere indifferentemente un'onda d'urto oppure un'onda di rarefazione. Ognuna delle tre onde potrà essere





eventualmente di intensità nulla. Infine, nel caso in cui le due onde estreme sono entrambe onde di rarefazione, si potrà anche verificare la formazione di una regione di vuoto fra le due parti di gas che si allontanano l'una dall'altra.

Interpretazione geometrica

Come mostreremo più avanti, i valori iniziali del problema di Riemann permettono di stabilire il tipo di onde della soluzione senza dovere risolvere esplicitamente il problema. Alternativamente, la soluzione completa del problema di Riemann può essere determinata anche senza sapere se la prima e la terza onda rappresentino un'onda d'urto piuttosto che un ventaglio di rarefazione, ma scoprendo il loro tipo solo al termine del procedimento risolutivo. Seguiremo questo secondo metodo e adotteremo un'interpretazione geometrica diretta del problema di Riemann che sfrutta le proprietà strutturali dell'onda intermedia che, come già detto, è in ogni caso una discontinuità di contatto.

Consideriamo lo spazio tridimensionale delle variabili (v, P, u) ed esprimiamo i dati iniziali del problema in tale spazio, per cui avremo i due punti (v_ℓ, P_ℓ, u_ℓ) e (v_r, P_r, u_r) . La discontinuità di contatto separa due stati che possiamo indicare come $(v_{*,\ell}, P_*, u_*)$ e $(v_{*,r}, P_*, u_*)$ dato che la pressione e la velocità sono le stesse e che solo il volume specifico (ovvero la densità) è discontinua. La soluzione del problema di Riemann consiste allora nel determinare i valori $v_{*,\ell}$, $v_{*,r}$, P_* e u_* e nel determinare al contempo il tipo di onda – urto o rarefazione – che si verifica a sinistra e a destra della discontinuità di contatto. Possiamo formulare il problema come la ricerca nello spazio delle variabili (v, P, u) dei due punti $(v_{*,\ell}, P_*, u_*)$ e $(v_{*,r}, P_*, u_*)$ che corrispondono ai due stati intermedi del gas fra gli stati iniziali (v_ℓ, P_ℓ, u_ℓ) e (v_r, P_r, u_r) . Il primo stato intermedio $(v_{*,\ell}, P_*, u_*)$, a sinistra della discontinuità di contatto, sarà collegato allo stato iniziale sinistro (v_ℓ, P_ℓ, u_ℓ) da un'onda d'urto oppure di rarefazione; similmente il secondo stato intermedio $(v_{*,r}, P_*, u_*)$, a destra della discontinuità di contatto, sarà collegato allo stato iniziale destro (v_r, P_r, u_r) da un'onda d'urto oppure di rarefazione. Il tipo dell'onda a sinistra e il tipo dell'onda a destra dipendono dai valori incogniti $v_{*,\ell}$, $v_{*,r}$, P_* e u_* , e quindi potranno emergere alla fine del procedimento di risoluzione. D'altra parte la scelta fra il tipo di onda che si ha a sinistra come pure quello a destra dipenderà dal fatto che l'onda potrà essere un urto solo se l'entropia aumenta mentre in caso contrario l'onda dovrà essere un ventaglio di rarefazione. Per i gas che soddisfano la condizione di non linearità genuina e con $\Gamma > 0$, come i gas ideali politropici, l'onda d'urto è necessariamente compressiva, per cui la densità del gas aumenta, mentre il ventaglio di espansione è sempre rarefattivo, per cui la densità diminuisce. È possibile quindi scrivere le funzioni che incorporano questa scelta confrontando il volume specifico con i valori noti di v_ℓ e di v_r .

Q.4 Discontinuità di contatto

Ricaviamo ora le caratteristiche proprie della discontinuità di contatto. Consideriamo un'onda che si propaga con la velocità data dall'autovalore intermedio del sistema iperbolico delle equazioni di Eulero e determiniamo l'andamento delle variabili in un'onda di questo tipo. Questo processo consiste nel determinare la funzione vettoriale $\mathbf{w} = \mathbf{w}(q)$ che soddisfa il seguente sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\frac{d\mathbf{w}}{dq} = \alpha(q) \mathbf{r}_2(\mathbf{w}),$$

dove q è un parametro che rappresenta la variabile indipendente mentre $\alpha(q)$ è una funzione arbitraria la cui scelta fissa una determinata parametrizzazione della soluzione. Data la forma del secondo autovettore $\mathbf{r}_2(\mathbf{w})$ delle equazioni di Eulero, le equazioni





del sistema si scrivono come

$$\begin{cases} \frac{dv}{dq} = -\alpha(q) \frac{\partial P(s, v)}{\partial s}, \\ \frac{du}{dq} = 0, \\ \frac{ds}{dq} = \alpha(q) \frac{\partial P(s, v)}{\partial v}. \end{cases}$$

Pertanto la velocità u è costante nell'onda considerata. Inoltre, prendendo il rapporto della prima equazione con la terza si ottiene

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{\partial P(s, v)}{\partial s} / \frac{\partial P(s, v)}{\partial v}.$$

Se ora definiamo la funzione (di tre variabili)

$$\Phi(s, v, P_0) \equiv P(s, v) - P_0,$$

l'equazione

$$\Phi(s, v, P_0) = 0$$

rappresenta la definizione implicita di una funzione $v = v(s)$ per un valore fissato P_0 . La derivata $dv(s)/ds$ di tale funzione si calcola mediante il teorema di derivazione della funzione implicita:

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{\frac{\partial \Phi(s, v, P_0)}{\partial s}}{\frac{\partial \Phi(s, v, P_0)}{\partial v}} = -\frac{\frac{\partial P(s, v)}{\partial s}}{\frac{\partial P(s, v)}{\partial v}},$$

dato che P_0 è una costante. Dal momento che l'espressione della derivata implicita coincide con la derivata dv/ds lungo l'onda considerata, la pressione P rimane costante nell'onda. In conclusione, come già visto nel paragrafo 11.2, nella discontinuità di contatto $u(q) = u_*$ e $P(q) = P_*$, dove u_* e P_* denotano i valori costanti della velocità e della pressione nella discontinuità di contatto. Naturalmente, la terza variabile v potrà essere discontinua e quindi indicheremo con $v_{*,\ell}$ e $v_{*,r}$ il volume specifico del gas rispettivamente a sinistra e a destra della discontinuità.

Q.5 Equazioni del problema di Riemann

A questo punto possiamo sfruttare queste proprietà strutturali dell'onda intermedia per scrivere le equazioni che definiscono il problema di Riemann. Indichiamo con $u(v; \ell)$ e $P(v; \ell)$ rispettivamente la velocità e la pressione dell'onda che lega lo stato sinistro $\ell = (v_\ell, P_\ell, u_\ell)$ con uno stato di volume specifico v qualsiasi. Le due funzioni $u = u(v; \ell)$ e $P = P(v; \ell)$ avranno una forma analitica diversa a seconda che l'onda sia un'onda d'urto o di rarefazione e ciò dipenderà dal fatto che v assuma un valore inferiore (urto) oppure superiore (rarefazione) rispetto a quello di v_ℓ . In modo analogo, siano $u(v; \mathbf{r})$ e $P(v; \mathbf{r})$, rispettivamente, la velocità e la pressione dell'onda che lega lo stato destro $\mathbf{r} = (v_r, P_r, u_r)$ con uno stato di volume specifico v qualsiasi. Anche la forma di queste due funzioni sarà diversa a seconda vi sia un'onda d'urto o un'onda di rarefazione e la scelta dipende dal valore di v rispetto a quello di v_r . Precisamente, le funzioni della velocità introdotte avranno la forma seguente

$$u(v; \ell) \equiv \begin{cases} u^{\text{rar}}(v; \ell) & \text{se } v > v_\ell \\ u^{\text{RH}}(v; \ell) & \text{se } v < v_\ell \end{cases} \quad \text{e} \quad u(v; \mathbf{r}) \equiv \begin{cases} u^{\text{rar}}(v; \mathbf{r}) & \text{se } v > v_r \\ u^{\text{RH}}(v; \mathbf{r}) & \text{se } v < v_r \end{cases}$$





Le funzioni della pressione dipendono dai valori delle sole variabili termodinamiche nello stato sinistro e destro e non dai valori della velocità. Per non appesantire la notazione introducendo altri simboli, questa dipendenza è indicata dagli stessi vettori ℓ e \mathbf{r} usati nelle funzioni della velocità, le quali dipendono invece da tutte e tre le grandezze dello stato considerato.

dove gli indici ^{rar} e ^{RH} denotano, rispettivamente, la soluzione dell'onda di rarefazione e la soluzione dell'onda d'urto fornita dalle condizioni di Rankine–Hugoniot, che saranno ricavate più avanti. Notiamo che in tutte le funzioni che definiscono la velocità si dovrebbe indicare anche l'autovalore al quale si riferiscono: ad esempio la funzione $u(v; \ell)$ si riferisce al primo autovalore λ_1 ed è quindi diversa dalla funzione $u(v; \mathbf{r})$ che si riferisce al terzo autovalore λ_3 , per cui per mostrare questa loro differenza si dovrebbero scrivere, ad esempio, come $u_1(v; \ell)$ e $u_3(v; \mathbf{r})$. Tuttavia, nel seguito, per non appesantire troppo la notazione, questo fatto rimarrà sottinteso nel senso che la presenza della variabile ℓ nelle funzioni che definiscono la velocità indicherà sempre che si considera la curva uscente dallo stato ℓ in connessione con l'autovalore λ_1 e in modo analogo la variabile \mathbf{r} sarà sempre associata all'autovalore λ_3 .

Le funzioni relative alla pressione sono

$$P(v; \ell) \equiv \begin{cases} P^{\text{rar}}(v; \ell) & \text{se } v > v_\ell \\ P^{\text{RH}}(v; \ell) & \text{se } v < v_\ell \end{cases} \quad \text{e} \quad P(v; \mathbf{r}) \equiv \begin{cases} P^{\text{rar}}(v; \mathbf{r}) & \text{se } v > v_r \\ P^{\text{RH}}(v; \mathbf{r}) & \text{se } v < v_r \end{cases}$$

e sono invece indipendenti dall'autovalore che si considera.

Risolvere il problema di Riemann significa determinare i valori $v_{*,\ell}$, $v_{*,r}$, P_* e u_* che caratterizzano le condizioni a cavallo della discontinuità di contatto. Per semplificare la notazione indichiamo le due incognite con $v \equiv v_{*,\ell}$ e $w \equiv v_{*,r}$. L'uguaglianza dei valori della velocità e dei valori della pressione sui due lati della discontinuità di contatto richiede che v e w siano soluzione del seguente sistema di due equazioni

$$\begin{cases} u(v; \ell) = u(w; \mathbf{r}), \\ P(v; \ell) = P(w; \mathbf{r}), \end{cases}$$

che si scrive nella forma standard:

$$\begin{cases} \phi_{(\ell,r)}(v, w) = 0, \\ \psi_{(\ell,r)}(v, w) = 0, \end{cases}$$

avendo definito le due funzioni

$$\begin{aligned} \phi_{(\ell,r)}(v, w) &\equiv u(v; \ell) - u(w; \mathbf{r}), \\ \psi_{(\ell,r)}(v, w) &\equiv P(v; \ell) - P(w; \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Per risolvere il sistema mediante il metodo iterativo di Newton si deve il calcolare la matrice jacobiana:

$$\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(v, w)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_{(\ell,r)}(v, w)}{\partial v} & \frac{\partial \phi_{(\ell,r)}(v, w)}{\partial w} \\ \frac{\partial \psi_{(\ell,r)}(v, w)}{\partial v} & \frac{\partial \psi_{(\ell,r)}(v, w)}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du(v; \ell)}{dv} & -\frac{du(w; \mathbf{r})}{dw} \\ \frac{dP(v; \ell)}{dv} & -\frac{dP(w; \mathbf{r})}{dw} \end{pmatrix}.$$

Una volta determinata la soluzione $(v, w) = (v_{*,\ell}, v_{*,r})$ delle due equazioni, gli elementi finali della soluzione del problema di Riemann sono forniti dai valori $u_* = u(v; \ell) = u(w; \mathbf{r})$ e $P_* = P(v; \ell) = P(w; \mathbf{r})$.

L'esistenza e unicità della soluzione del problema di Riemann della gasdinamica può essere dimostrata sotto la condizione $\partial e(P, v)/\partial v > 0$. In questo caso il metodo di Newton convergerà alla soluzione purché la condizione di tentativo iniziale sia sufficientemente vicina alla soluzione. In particolare è comodo e risulta anche efficace prendere come soluzione di tentativo iniziale la media dei valori iniziali del volume specifico nello stato sinistro e destro, ovvero $v_{\text{in}} = w_{\text{in}} = \frac{1}{2}(v_\ell + v_r)$.





Q.6 Onde di rarefazione

Determiniamo ora l'andamento delle variabili nel caso dell'onda di rarefazione. Questa soluzione è già stata calcolata nel paragrafo 11.5, risolvendo le equazioni comprimibili instazionarie e determinando quindi come le variabili dipendono dalle coordinate spazio temporali x e t . In questo paragrafo siamo più interessati a descrivere lo stato del fluido lungo l'onda di rarefazione che non alla sua evoluzione nello spazio e nel tempo, ma l'impiego della variabile di similarità $\xi = x/t$ risulta ancora adatta per parametrizzare la curva integrale dell'onda di rarefazione.

Consideriamo l'onda di rarefazione che connette uno stato assegnato (v_i, u_i, s_i) del fluido, il cui moto è governato dalle equazioni di Eulero in una dimensione. L'andamento delle variabili all'interno dell'onda è determinato dalle **curve integrali** associate al modo genuinamente non lineare del sistema, cioè alle curve che sono tangenti in ogni punto alla direzione dell'autovettore corrispondente. Le onde di rarefazione associate al primo e al terzo autovalore, indicati da $\lambda_{1|3}(\mathbf{w})$, sono definite dalle curve integrali $\mathbf{w} = \mathbf{w}(q)$ soluzioni del seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{d\mathbf{w}}{dq} = \alpha(q) \mathbf{r}_{1|3}(\mathbf{w}),$$

soggetto alla condizione iniziale $\mathbf{w}(q_i) = \mathbf{w}_i = (v_i, u_i, s_i)$, dove $\alpha(q)$ è una funzione arbitraria che determina una parametrizzazione particolare della curva. Naturalmente, per il primo autovalore avremo $i = \ell$ e per il terzo autovalore $i = r$.

Dato che i due autovalori considerati sono genuinamente non lineari, risulta $\mathbf{r}_{1|3}(\mathbf{w}) \cdot \nabla \lambda_{1|3}(\mathbf{w}) \neq 0, \forall \mathbf{w}$. In questo caso il parametro della curva può essere scelto in modo da farlo coincidere con l'autovalore lungo la curva e sarà allora indicato con ξ , ovvero si pone $\xi = \lambda_{1|3}(\mathbf{w}(\xi))$. Derivando questa relazione rispetto a ξ si ottiene $1 = \nabla \lambda_{1|3}(\mathbf{w}) \cdot d\mathbf{w}/d\xi = \nabla \lambda_{1|3}(\mathbf{w}) \cdot \alpha(\xi) \mathbf{r}_{1|3}(\mathbf{w}) = \pm \alpha(\xi) c(s, v) \Gamma(s, v)$ da cui segue $\alpha(\xi) = \pm 1/c(s, v) \Gamma(s, v)$ e il sistema si scrive in forma canonica

$$\frac{d\mathbf{w}}{d\xi} = \frac{\pm \mathbf{r}_{1|3}(\mathbf{w})}{c(s, v) \Gamma(s, v)},$$

dove abbiamo utilizzato la derivata fondamentale $\Gamma(s, v)$ introdotta nel paragrafo Q.2 e dove il segno superiore si riferisce al primo autovalore λ_1 mentre quello inferiore al terzo autovalore λ_3 . Il sistema deve essere risolto con la condizione $\xi_i = \lambda_{1|3}(\mathbf{w}_i)$ che definisce il valore iniziale della variabile indipendente in funzione dei dati iniziali.

Nel caso del sistema iperbolico delle equazioni di Eulero, per le caratteristiche degli autovalori e del campo degli autovettori dei due modi in questione, si avrà

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\xi} = \frac{\pm v}{c(s, v) \Gamma(s, v)} \\ \frac{du}{d\xi} = \frac{1}{\Gamma(s, v)} \\ \frac{ds}{d\xi} = 0. \end{cases}$$

La terza equazione ha la soluzione immediata $s = \text{costante} = s_i$, per cui l'onda di rarefazione è isentropica. Si deve allora risolvere il sistema ridotto di solo due equazioni

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\xi} = \frac{\pm v}{c(s_i, v) \Gamma(s_i, v)} \\ \frac{du}{d\xi} = \frac{1}{\Gamma(s_i, v)} \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $v(\xi_i) = v_i$ and $u(\xi_i) = u_i$, essendo $\xi_i = \lambda_{1|3}(\mathbf{w}_i)$. La prima equazione è disaccoppiata dalla seconda, è a variabili separabili e si risolve mediante una semplice quadratura:

$$\xi = \xi(v) = u_i \mp c(s_i, v_i) \pm \int_{v_i}^v \frac{c(s_i, v') \Gamma(s_i, v')}{v'} dv'.$$





Una volta ottenuta la soluzione $v = v(\xi)$, essa è sostituita nella seconda equazione ottenendo un'altra equazione, per l'incognita u , separabile che si risolve mediante un'ulteriore quadratura:

$$u = u(\xi) = u_i + \int_{\xi_i}^{\xi} \frac{d\xi'}{\Gamma(s_i, v(\xi'))}.$$

A questo punto possiamo eliminare la variabile ξ per mezzo del cambiamento di variabili $\xi \rightarrow v(\xi)$, per cui la soluzione della velocità può essere scritta come

$$u^{\text{rar}}(v; \mathbf{i}) = u_i \pm \int_{v_i}^v \frac{c(s_i, v')}{v'} dv',$$

a condizione che sia $v > v_i$. La pressione lungo l'onda di rarefazione (isentropica) è ricavabile in modo più agevole. Infatti, grazie all'equazione di stato $P = P(s, v)$, si ottiene direttamente la seguente relazione:

$$P^{\text{rar}}(v; \mathbf{i}) = P(s_i, v).$$

Formazione del vuoto

L'espressione trovata della soluzione dell'onda di rarefazione permette di definire la condizione per cui si forma una zona di vuoto fra due onde di rarefazione. Questa situazione si verifica quando le due velocità u_ℓ e u_r dei dati del problema di Riemann sono tali che la soluzione consiste di due onde di rarefazione, come illustrato nella figura Q.5, e quando inoltre la densità si annulla sulla discontinuità di contatto. Allora le code delle due onde di rarefazione, allontanandosi, lasciando dietro di loro una regione priva di gas, ovvero il vuoto, come mostrato nella figura Q.6. La condizione per la formazione del vuoto, espressa in termini del volume specifico, equivale alla relazione $u^{\text{rar}}(\infty; \ell) = u^{\text{rar}}(\infty; r)$, ovvero sia

$$u_\ell + \int_{v_\ell}^{\infty} \frac{c(s_\ell, v)}{v} dv = u_r - \int_{v_r}^{\infty} \frac{c(s_r, v)}{v} dv.$$

Per valori maggiori della differenza delle velocità iniziali, $u_r - u_\ell$, ovvero quando

$$u_r - u_\ell \geq \int_{v_\ell}^{\infty} \frac{c(s_\ell, v)}{v} dv + \int_{v_r}^{\infty} \frac{c(s_r, v)}{v} dv \equiv u_{\text{vuoto}}^{\text{rel}},$$

la discontinuità di contatto degenera in una regione di vuoto e la soluzione del problema di Riemann consiste di due onde di rarefazione i cui limiti estremi si allontanano l'uno dall'altro con le velocità

$$u_{\text{vuoto}}(\ell) = u_\ell + \int_{v_\ell}^{\infty} \frac{c(s_\ell, v)}{v} dv \quad \text{e} \quad u_{\text{vuoto}}(r) = u_r - \int_{v_r}^{\infty} \frac{c(s_r, v)}{v} dv.$$

In tali estremi la densità, la temperatura e la pressione del gas sono nulle.

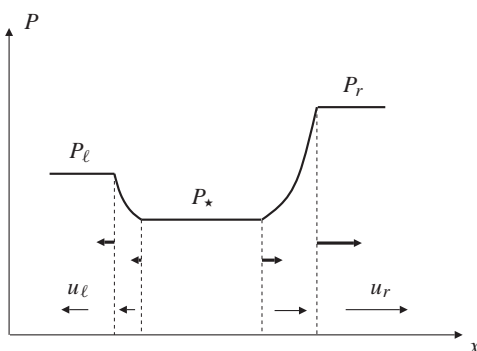


Figura Q.5 Due onde di rarefazione

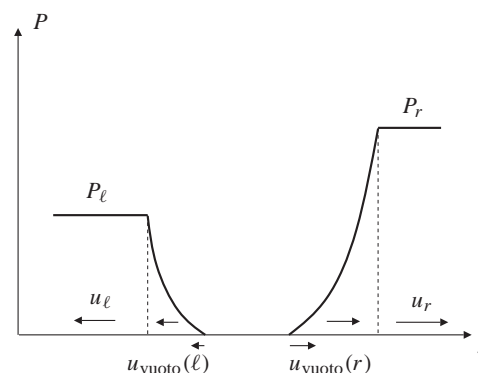


Figura Q.6 Formazione del vuoto





Q.7 Onde d'urto

In questo paragrafo ricaviamo la soluzione dell'onda d'urto. In generale, l'onda d'urto si muoverà con una velocità $\sigma \neq 0$ rispetto al sistema di riferimento in cui è enunciato il problema di Riemann. Le condizioni di salto di Rankine–Hugoniot fra uno stato iniziale \mathbf{w}_i e un generico stato \mathbf{w} consistono nella seguente relazione vettoriale $\mathbf{f}(\mathbf{w}) - \mathbf{f}(\mathbf{w}_i) = \sigma[\mathbf{w} - \mathbf{w}_i]$, dove $\mathbf{f}(\mathbf{w})$ è il vettore dei flussi del sistema iperbolico espresso in funzione del vettore $\mathbf{w} = (\rho, m = \rho u, E^t)$ delle variabili conservative. Per \mathbf{w}_i fissato, si ha un sistema di tre equazioni in quattro incognite (ρ, m, E^t) e σ , per cui le relazioni di Rankine–Hugoniot ammettono una famiglia a un parametro di soluzioni.

Per semplificare la risoluzione conviene scrivere le condizioni di salto nel sistema di riferimento dell'urto, nel quale la velocità del gas è indicata con $U = u - \sigma$, per cui esse assumono la forma $\mathbf{f}(\mathbf{W}) = \mathbf{f}(\mathbf{W}_i)$, dove $\mathbf{W} = (\rho, M = \rho U, E^t = \rho e + \frac{1}{2}U^2)$. Usando poi le variabili v, U ed e come incognite del sistema, le condizioni di salto di Rankine–Hugoniot assumono la forma seguente

$$\begin{aligned} U_i/v_i &= U/v, \\ U_i^2/v_i + P_i &= U^2/v + P, \\ [(\frac{1}{2}U_i^2 + e_i)/v_i + P_i]U_i &= [(\frac{1}{2}U^2 + e)/v + P]U, \end{aligned}$$

in cui $e = e(P, v)$ è l'equazione di stato del fluido in esame.

Indichiamo con $J = U/v = U_i/v_i$ il flusso di massa attraverso la superficie di discontinuità dell'urto. Consideriamo la prima equazione e ritorniamo nel sistema di riferimento del laboratorio, scrivendo

$$\frac{u_i - \sigma}{v_i} = J = \frac{u - \sigma}{v}.$$

Risolvendo la prima parte della relazione rispetto a σ fornisce $\sigma = u_i - Jv_i$. Eliminando σ nella seconda parte fornisce $J = (u - u_i + Jv_i)/v$ e quindi

$$J = \frac{u - u_i}{v - v_i}.$$

Consideriamo ora la seconda equazione delle condizioni di salto precedenti e riscriviamola come

$$\frac{U_i^2}{v_i^2} v_i + P_i = \frac{U^2}{v^2} v + P.$$

Poiché $U_i/v_i = U/v = J$, questa equazione è equivalente a

$$J^2 v_i + P_i = J^2 v + P \quad \implies \quad J^2 = -\frac{P - P_i}{v - v_i}.$$

Infine la terza equazione, usando ancora $U_i/v_i = U/v = J$ con $J \neq 0$ per cui la discontinuità non è una discontinuità di contatto, può essere scritta come

$$\frac{1}{2}U_i^2 + e_i + P_i v_i = \frac{1}{2}U^2 + e + P v,$$

ovvero, in modo equivalente,

$$\frac{1}{2}J^2 v_i^2 + e_i + P_i v_i = \frac{1}{2}J^2 v^2 + e + P v.$$

Eliminando J^2 per mezzo della relazione $J^2 = -\frac{P - P_i}{v - v_i}$, otteniamo

$$e - e_i + \frac{1}{2}(P_i + P)(v - v_i) = 0,$$





dove $e_i = e(P_i, v_i)$. Questa relazione è puramente termodinamica e si chiama **equazione di Hugoniot** o anche **equazione di Rankine–Hugoniot**. Sfruttando l'equazione termodinamica di stato $e = e(P, v)$, l'equazione di Hugoniot definisce implicitamente il valore della pressione P dietro l'urto in funzione di v , per una data coppia volume–pressione (v_i, P_i) ,

$$e(P, v) - e_i + \frac{1}{2}(P_i + P)(v - v_i) = 0$$

e quindi definisce una funzione $P = P^{\text{RH}}(v; \mathbf{i})$. Riunendo assieme le tre equazioni trovate abbiamo

$$\begin{cases} e(P, v) - e(P_i, v_i) + \frac{1}{2}(P_i + P)(v - v_i) = 0, \\ J = \frac{u - u_i}{v - v_i}, \quad J^2 = -\frac{P - P_i}{v - v_i}. \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema rappresenta una famiglia a un parametro di stati che soddisfano le condizioni di salto di Rankine–Hugoniot e dipende dalla forma dell'equazione di stato $e = e(P, v)$. La soluzione che soddisfa la condizione di aumento dell'entropia del fluido nell'attraversamento dell'urto è data da $P = P^{\text{RH}}(v; \mathbf{i})$, per $v < v_i$. Le altre due equazioni permettono poi di esprimere la velocità u del fluido dopo l'urto nel sistema di riferimento originario come

$$u = u_i - \text{sign}(J)\sqrt{-(P - P_i)(v - v_i)}.$$

Questa equazione è una definizione implicita della velocità u dato che il segno del flusso di massa J attraverso l'urto dipende da u stessa. L'ambiguità del segno può essere risolta sfruttando la conoscenza di quale onda corrisponde all'urto considerato. Ricordando che quando $\Gamma > 0$ l'onda d'urto è compressiva, si può mostrare che $J > 0$ per l'onda associata al primo autovalore e $J < 0$ per l'onda associata al terzo. Pertanto la velocità u del gas dopo l'urto è

$$u^{\text{RH}}(v; \mathbf{i}) = u_i \mp \sqrt{[P^{\text{RH}}(v; \mathbf{i}) - P_i](v - v_i)},$$

per $v < v_i$, dove il segno $-$ si riferisce al primo autovalore e il segno $+$ al terzo. La velocità σ dell'urto nel sistema di riferimento originario sarà infine

$$\sigma = \frac{\rho u - \rho_i u_i}{\rho - \rho_i}.$$

Approfondimento 1 Proprietà delle onde linearmente degeneri

Abbiamo visto che le soluzioni associate a un autovalore genuinamente non lineare possono essere onde di rarefazione oppure onde d'urto. È legittimo allora domandarsi quali siano le caratteristiche delle soluzioni del sistema iperbolico associate a un autovalore linearmente degenere. La risposta a questa domanda è alquanto sorprendente, nel senso che gli autovalori degeneri sono caratterizzati da onde aventi proprietà sia delle onde di rarefazione sia delle onde d'urto. Questo risultato deriva dal fatto che lungo le curve integrali relative a un autovalore linearmente degenere sono anche soddisfatte le condizioni di salto di Rankine–Hugoniot del sistema iperbolico. Dimostriamo formalmente questo importante risultato.

Supponiamo che l'autovalore k -esimo $\lambda_k(\mathbf{w})$ di un sistema iperbolico non lineare sia linearmente degenere, dove \mathbf{w} indica il vettore delle variabili conservative del sistema. Sia $\mathbf{r}_k(\mathbf{w})$ il campo dell'autovettore associato a $\lambda_k(\mathbf{w})$. La degenerazione lineare di questo autovalore significa che $\mathbf{r}_k(\mathbf{w}) \cdot \nabla_{\mathbf{w}} \lambda_k(\mathbf{w}) = 0$, per ogni \mathbf{w} permesso nello spazio delle variabili del sistema.





Consideriamo ora la linea integrale relativa all'autovalore k -esimo considerato e passante da un punto $\check{\mathbf{w}}$. Questa curva integrale sarà descritta dalla funzione vettoriale $\mathbf{w} = \mathbf{w}_k(q)$, dove q è un parametro scelto per percorrere la curva e che scegliamo assumere il valore $\check{q} = \lambda_k(\check{\mathbf{w}})$ nel punto $\check{\mathbf{w}}$. La curva integrale è la soluzione del problema differenziale ordinario ai valori iniziali

$$\frac{d\mathbf{w}_k}{dq} = \alpha(q) \mathbf{r}_k(\mathbf{w}_k(q)), \quad \mathbf{w}_k(\check{q}) = \check{\mathbf{w}},$$

dove $\alpha(q)$ è una funzione arbitraria la cui scelta determina la parametrizzazione della curva. Dimostriamo ora che la soluzione $\mathbf{w} = \mathbf{w}_k(q)$ soddisfa anche la condizione di salto di Rankine–Hugoniot, ossia,

$$\mathbf{f}(\mathbf{w}_k(q)) - \mathbf{f}(\check{\mathbf{w}}) = \sigma(q) [\mathbf{w}_k(q) - \check{\mathbf{w}}],$$

dove $\mathbf{f}(\mathbf{w})$ è il vettore dei flussi del sistema iperbolico e $\sigma(q)$ è la velocità di propagazione dell'onda lungo la curva integrale.

Definiamo la funzione scalare

$$G(q) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{w}_k(q)) - \mathbf{f}(\check{\mathbf{w}}) - \lambda_k(\mathbf{w}_k(q)) [\mathbf{w}_k(q) - \check{\mathbf{w}}]$$

e dimostriamo che $G(q) \equiv 0$. Calcolando la derivata della funzione si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dG(q)}{dq} &= \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{w}_k(q))}{\partial \mathbf{w}} \frac{d\mathbf{w}_k(q)}{dq} - \nabla_{\mathbf{w}} \lambda_k(\mathbf{w}_k(q)) \cdot \frac{d\mathbf{w}_k(q)}{dq} [\mathbf{w}_k(q) - \check{\mathbf{w}}] \\ &\quad - \lambda_k(\mathbf{w}_k(q)) \frac{d\mathbf{w}_k(q)}{dq}. \end{aligned}$$

Ma $\partial \mathbf{f}(\mathbf{w}) / \partial \mathbf{w} = \mathbf{A}(\mathbf{w})$, per cui, sopprimendo la variabile q per semplificare l'espressione e scrivendo $d\mathbf{w}_k/dq$ come \mathbf{w}'_k , abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dq} &= \mathbf{A}(\mathbf{w}_k) \mathbf{w}'_k - [\nabla_{\mathbf{w}} \lambda_k(\mathbf{w}_k) \cdot \mathbf{w}'_k] [\mathbf{w}_k - \check{\mathbf{w}}] - \lambda_k(\mathbf{w}_k) \mathbf{w}'_k \\ &= [\mathbf{A}(\mathbf{w}_k) - \lambda_k(\mathbf{w}_k) \mathbf{I}] \mathbf{w}'_k - [\nabla_{\mathbf{w}} \lambda_k(\mathbf{w}_k) \cdot \mathbf{w}'_k] [\mathbf{w}_k - \check{\mathbf{w}}], \end{aligned}$$

dove \mathbf{I} è la matrice identità avente la dimensione del sistema iperbolico. Ma \mathbf{w}'_k è parallelo all'autovettore $\mathbf{r}_k(\mathbf{w}_k)$ per cui il primo termine del secondo membro è nullo. Inoltre l'autovalore è linearmente degenere per cui anche il secondo termine è nullo, quindi $dG/dq = 0$ ovvero $G = \text{costante}$. D'altra parte $G(\check{q}) = \mathbf{f}(\check{\mathbf{w}}) - \mathbf{f}(\check{\mathbf{w}}) - \lambda_k(\check{\mathbf{w}}) [\check{\mathbf{w}} - \check{\mathbf{w}}] = 0$, e quindi $G \equiv 0$.

Infine, se $\mathbf{w}_k(q)$ è una curva integrale passante per $\check{\mathbf{w}}$, la funzione $\lambda_k(\mathbf{w}_k(q))$ dell'autovalore linearmente degenere è costante su di essa per cui $\lambda_k(\mathbf{w}_k(q)) = \lambda_k(\check{\mathbf{w}})$. Di conseguenza avremo

$$\mathbf{f}(\mathbf{w}_k(q)) - \mathbf{f}(\check{\mathbf{w}}) = \lambda_k(\check{\mathbf{w}}) [\mathbf{w}_k(q) - \check{\mathbf{w}}].$$

Pertanto lungo la curva integrale è soddisfatta la condizione di salto di Rankine–Hugoniot con una velocità di propagazione $\sigma = \lambda_k(\check{\mathbf{w}}) = \text{costante}$, cioè che non cambia lungo la curva. Ne deriva che le onde associate a un autovalore linearmente degenere possono avere delle componenti discontinue ma la velocità di propagazione non varia lungo di esse per cui tutte le variabili traslano rigidamente senza subire alcuna deformazione. In altre parole queste onde possono contenere delle discontinuità ma si propagano indeformate come le soluzioni della semplice equazione delle onde lineare con velocità di advezione costante. ■





Q.8 Funzioni non lineari del problema di Riemann

Possiamo a questo punto scrivere le funzioni della pressione e della velocità relative alle due onde che si propagano ai due lati della discontinuità di contatto. Per quanto riguarda l'onda a sinistra, le due funzioni sono definite dalle relazioni

$$P(v; \ell) \equiv \begin{cases} P(s_\ell, v) & \text{se } v > v_\ell \\ P^{\text{RH}}(v; \ell) & \text{se } v < v_\ell \end{cases}$$

$$u(v; \ell) \equiv \begin{cases} u_\ell + \int_{v_\ell}^v \frac{c(s_\ell, v')}{v'} dv' & \text{se } v > v_\ell \\ u_\ell - \sqrt{-[P^{\text{RH}}(v; \ell) - P_\ell](v - v_\ell)} & \text{se } v < v_\ell \end{cases}$$

mentre per l'onda a destra le funzioni sono

$$P(v; \mathbf{r}) \equiv \begin{cases} P(s_r, v) & \text{se } v > v_r \\ P^{\text{RH}}(v; \mathbf{r}) & \text{se } v < v_r \end{cases}$$

$$u(v; \mathbf{r}) \equiv \begin{cases} u_r - \int_{v_r}^v \frac{c(s_r, v')}{v'} dv' & \text{se } v > v_r \\ u_r + \sqrt{-[P^{\text{RH}}(v; \mathbf{r}) - P_r](v - v_r)} & \text{se } v < v_r \end{cases}$$

Queste quattro funzioni definiscono pertanto in modo completo il problema di Riemann della gasdinamica a condizione che risulti $\Gamma > 0$.

Q.9 Velocità relative limite

Le funzioni appena introdotte, con la loro scelta fra onda d'urto o di rarefazione, generano, a convergenza del metodo iterativo di Newton, la combinazione appropriata di onde che si propagano a sinistra e a destra della discontinuità di contatto. Tuttavia, i dati iniziali del problema di Riemann permettono di stabilire *a priori* il tipo di onde che scaturiscono dalla disintegrazione della discontinuità iniziale. Come descritto da Landau e Lifshitz, la quantità fisica il cui valore consente di determinare che tipi di onde esterne sono presenti nella soluzione del problema di Riemann è la velocità relativa $u^{\text{rel}} \equiv u_r - u_\ell$ fra le due regioni di gas a cavallo del salto iniziale. Questa grandezza è un invariante per trasformazioni delle coordinate spazio-temporali che collegano osservatori inerziali, note come trasformazioni di Galilei. In altri termini, la differenza $u_r - u_\ell$ è la stessa qualunque sia il sistema di riferimento inerziale in cui si misurano le velocità del fluido. Già alla fine del paragrafo Q.6 si è visto che la condizione per la formazione del vuoto assume la forma $u_r - u_\ell > u_{\text{vuoto}}^{\text{rel}}$, dove $u_{\text{vuoto}}^{\text{rel}}$ rappresenta un valore che dipende solo dai dati iniziali termodinamici del problema. In modo analogo, esistono due altri valori limite u_{2r}^{rel} e u_{2u}^{rel} (con $u_{2u}^{\text{rel}} < u_{2r}^{\text{rel}}$) che definiscono intervalli della velocità relativa $u_r - u_\ell$ all'interno dei quali la soluzione avrà due onde di rarefazione, o un'onda di rarefazione e una d'urto, oppure due onde d'urto, come mostra il ragionamento seguente.

Supponiamo per comodità di considerare un caso definito in cui $P_\ell < P_r$ e di determinare prima la soglia u_{2u}^{rel} affinché la soluzione contenga due onde d'urto, come mostrato nella figura Q.7. Grazie all'invarianza galileiana, i valori limite di u^{rel} sono indipendenti dal sistema di riferimento inerziale utilizzato per cui la disintegrazione della discontinuità iniziale è descritta nel modo più semplice nel riferimento della discontinuità di contatto.



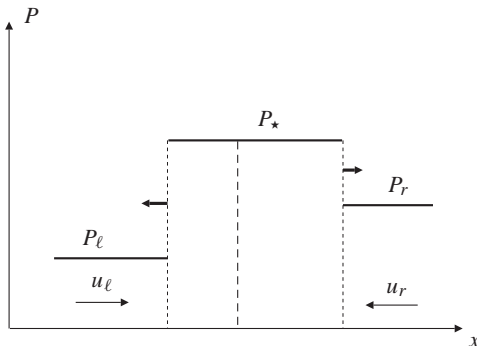


Figura Q.7 Due onde d'urto

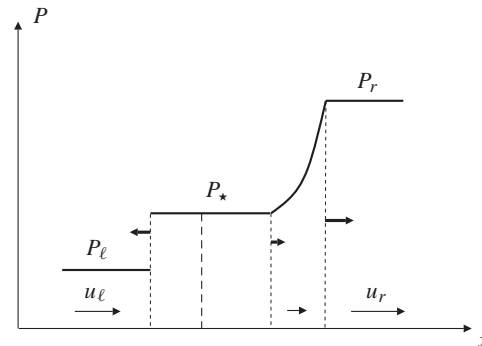


Figura Q.8 Onda d'urto e onda di rarefazione

Quando emergono due onde d'urto la pressione P_* da entrambi i lati della superficie di contatto supererà la pressione maggiore P_r e inoltre la velocità u_ℓ davanti all'urto che si propaga verso sinistra e la velocità u_r davanti all'urto che si propaga verso destra sono tali che

$$u_\ell = \sqrt{-(P_* - P_\ell)(v_{*,\ell} - v_\ell)} \quad \text{e} \quad u_r = -\sqrt{-(P_* - P_r)(v_{*,r} - v_r)},$$

dove $v_{*,\ell}$ e $v_{*,r}$ indicano i volumi specifici (in generale differenti) a sinistra e a destra della discontinuità di contatto. Il valore minimo che può assumere P_* , per valori P_ℓ e P_r assegnati, senza contraddire l'ipotesi $P_\ell < P_r < P_* \leq P_r$ è $P_* = P_r$. Tenendo conto che la differenza di velocità $u_\ell - u_r$ è una funzione monotona di P_* , otteniamo la disuguaglianza

$$u_\ell - u_r > \sqrt{-(P_r - P_\ell)[v^{\text{RH}}(P_r, \ell) - v_\ell]},$$

dove la funzione $v = v^{\text{RH}}(P, \ell)$ rappresenta l'inversa dell'adiabatica di Rankine-Hugoniot $P = P^{\text{RH}}(v; \ell)$. Pertanto definiamo il valore limite della velocità relativa $u^{\text{rel}} \equiv u_r - u_\ell$

$$u_{2u}^{\text{rel}} \equiv -\sqrt{-(P_r - P_\ell)[v^{\text{RH}}(P_r, \ell) - v_\ell]},$$

al di sotto del quale la soluzione del problema di Riemann ha due urti.

Quando nella soluzione è presente un'onda di rarefazione, l'ipotesi $P_\ell < P_r$ implica che l'onda isentropica si verifichi a destra, come mostrato nella figura Q.8. Quindi, come in precedenza la velocità a sinistra (sempre nel sistema di riferimento del contatto) è tale che

$$u_\ell = \sqrt{-(P_* - P_\ell)(v_{*,\ell} - v_\ell)},$$

mentre la variazione totale della velocità dentro l'onda di rarefazione sarà

$$u_r = -\int_{v_{*,r}}^{v_r} \frac{c(s_r, v)}{v} dv.$$

Di conseguenza, la velocità relativa $u_r - u_\ell$ è data da

$$u_r - u_\ell = -\sqrt{-(P_* - P_\ell)(v_{*,\ell} - v_\ell)} - \int_{v_{*,r}}^{v_r} \frac{c(s_r, v)}{v} dv.$$

Per P_ℓ e P_r dati, i valori di P_* sono compresi fra P_ℓ e P_r . Sostituendo $P_* = P_\ell$ nel primo contributo alla differenza $u_r - u_\ell$ otteniamo la disuguaglianza che assicura l'esistenza di un'onda di rarefazione assieme a un'onda d'urto:

$$u_r - u_\ell < -\int_{v_{*,r}}^{v_r} \frac{c(s_r, v)}{v} dv = \int_{v_r}^{v_{*,r}} \frac{c(s_r, v)}{v} dv.$$





Ma il valore $v_{*,r}$ non è noto a priori e, dato che si desidera esprimere la limitazione in termini dei dati del problema di Riemann, si può cambiare la variabile d'integrazione scegliendo la pressione che è costante attraverso la discontinuità di contatto e $P_* = P_\ell$. Pertanto, il valore limite della velocità relativa affinché la soluzione abbia un'onda di rarefazione e un'onda d'urto è definito da

$$u_{2r}^{\text{rel}} \equiv \int_{P_r}^{P_\ell} \frac{c(s_r, P)}{v(s_r, P)} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_{s_r} dP = \int_{P_\ell}^{P_r} \frac{v(s_r, P)}{c(s_r, P)} dP.$$

Le espressioni delle velocità relative limite per valori qualsiasi di P_ℓ e P_r si ottengono introducendo la definizione esplicita del valore minore della pressione e di quello maggiore, nel modo seguente

$$P_m \equiv \min(P_\ell, P_r) \quad \text{e} \quad P_M \equiv \max(P_\ell, P_r),$$

e contrassegnando anche le variabili v_ℓ, s_ℓ e v_r, s_r dei dati in conformità con l'ordine dei valori della pressione.

Se ricordiamo a questo punto anche il valore limite di $u_r - u_\ell$ per la formazione del vuoto trovato alla fine del paragrafo Q.6, possiamo scrivere assieme le tre velocità relative limite:

$$\begin{aligned} u_{\text{vuoto}}^{\text{rel}} &\equiv \int_{v_\ell}^{\infty} \frac{c(s_\ell, v)}{v} dv + \int_{v_r}^{\infty} \frac{c(s_r, v)}{v} dv, \\ u_{2r}^{\text{rel}} &\equiv \int_{P_m}^{P_M} \frac{v(s_M, P)}{c(s_M, P)} dP, \\ u_{2u}^{\text{rel}} &\equiv -\sqrt{-(P_M - P_m)[v^{\text{RH}}(P_M, \mathbf{m}) - v_m]}. \end{aligned}$$

Una volta determinati questi valori, si vede facilmente quali onde sono presenti nella soluzione del problema di Riemann in base a una delle quattro possibilità seguenti:

$$\begin{aligned} u_r - u_\ell &> u_{\text{vuoto}}^{\text{rel}} \longrightarrow \text{due onde di rarefazione con vuoto} \\ u_{2r}^{\text{rel}} < u_r - u_\ell < u_{\text{vuoto}}^{\text{rel}} &\longrightarrow \text{due onde di rarefazione senza vuoto} \\ u_{2u}^{\text{rel}} < u_r - u_\ell < u_{2r}^{\text{rel}} &\longrightarrow \text{un'onda di rarefazione e un'onda d'urto} \\ u_r - u_\ell < u_{2u}^{\text{rel}} &\longrightarrow \text{due onde d'urto} \end{aligned}$$

Q.10 Caso del gas ideale politropico

Sviluppiamo ora le equazioni del problema di Riemann per il caso particolare del gas ideale politropico. La relazione termodinamica fondamentale di questo modello di gas è, utilizzando la rappresentazione dell'energia,

$$e = e(s, v) = e_0 e^{\delta(s-s_0)/R} \left(\frac{v_0}{v} \right)^\delta,$$

dove si utilizza per comodità la costante

$$\delta = \gamma - 1 \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{c_P}{c_v},$$

e dove le quantità e_0 e s_0 sono costanti opportune. Notiamo che per evitare confusioni con il simbolo e dell'energia, la base della funzione esponenziale è indicata con il carattere diritto "e". Come ben noto, la relazione fondamentale fornisce una descrizione completa di tutte le proprietà termodinamiche del gas ideale politropico. Le equazioni termodinamiche di stato di questo gas sono state fornite nel primo paragrafo dell'appendice E. In queste pagine si ricavano da capo quelle relazioni avendo adottato una notazione leggermente diversa, con il parametro δ al posto di γ .





Mediante differenziazione diretta si ottiene

$$e_v(s, v) = e_0 e^{\delta(s-s_0)/R} \delta \left(\frac{v_0}{v}\right)^{\delta-1} \left(-\frac{v_0}{v^2}\right) = -\delta \frac{e_0}{v_0} e^{\delta(s-s_0)/R} \left(\frac{v_0}{v}\right)^{1+\delta},$$

$$e_{vv}(s, v) = \delta(1+\delta) \frac{e_0}{v_0^2} e^{\delta(s-s_0)/R} \left(\frac{v_0}{v}\right)^{2+\delta},$$

$$e_{vvv}(s, v) = -\delta(1+\delta)(2+\delta) \frac{e_0}{v_0^3} e^{\delta(s-s_0)/R} \left(\frac{v_0}{v}\right)^{3+\delta}.$$

Quindi $e_{vvv}(s, v) \neq 0$ e le onde associate ai due autovalori estremi del gas ideale politropico sono genuinamente non lineari.

Per determinare l'onda di rarefazione sono necessarie le equazioni di stato e l'espressione $c = c(s, v)$ della velocità del suono. Le prime si ottengono dalle derivate parziali prime della relazione fondamentale dell'energia:

$$T = \frac{\partial e(s, v)}{\partial s} = \frac{\delta}{R} e_0 e^{\delta(s-s_0)/R} \left(\frac{v_0}{v}\right)^{\delta} = \frac{\delta}{R} e,$$

$$P = -\frac{\partial e(s, v)}{\partial v} = +\delta \frac{e_0}{v_0} e^{\delta(s-s_0)/R} \left(\frac{v_0}{v}\right)^{1+\delta} = \delta \frac{e}{v}.$$

Combinando le due relazioni si ottiene anche l'equazione di stato $e = e(P, v) = Pv/\delta$. Per la velocità del suono, $c = c(s, v)$, un calcolo diretto fornisce:

$$c^2(s, v) = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = \delta(1+\delta) e_0 e^{\delta(s-s_0)/R} \left(\frac{v_0}{v}\right)^{-\delta}.$$

Quindi, gli integrali coinvolti nel calcolo dell'onda di rarefazione possono essere determinati analiticamente e si ottiene, per $v > v_i$,

$$\int_{v_i}^v \frac{c(s_i, v')}{v'} dv' = \int_{v_i}^v \sqrt{\delta(1+\delta) e_0 e^{\delta(s_i-s_0)/R} \left(\frac{v'}{v_0}\right)^{-\delta}} \frac{dv'}{v'}$$

$$= \sqrt{\delta(1+\delta) e_0 e^{\delta(s_i-s_0)/R}} v_0^{\frac{\delta}{2}} \int_{v_i}^v v'^{-\frac{\delta}{2}-1} dv'$$

$$= \frac{2}{\delta} \sqrt{(1+\delta) P_i v_i} \left[1 - \left(\frac{v_i}{v}\right)^{\frac{\delta}{2}}\right].$$

Pertanto, la velocità all'interno delle onde di rarefazione di un gas ideale politropico ha il seguente andamento

$$u^{\text{rar}}(v; \mathbf{i}) = u_i \pm \frac{2}{\delta} \sqrt{(1+\delta) P_i v_i} \left[1 - \left(\frac{v_i}{v}\right)^{\frac{\delta}{2}}\right].$$

Per quanto riguarda la condizione di formazione del vuoto, la velocità relativa limite si calcola facilmente

$$u_{\text{vuoto}}^{\text{rel}} = \frac{2\sqrt{1+\delta}}{\delta} \left(\sqrt{P_\ell v_\ell} + \sqrt{P_r v_r}\right)$$

e le velocità del gas agli estremi della zona di vuoto sono date da

$$u_{\text{vuoto}}(\ell) = u_\ell + \frac{2}{\delta} \sqrt{(1+\delta) P_\ell v_\ell} \quad \text{e} \quad u_{\text{vuoto}}(\mathbf{r}) = u_r - \frac{2}{\delta} \sqrt{(1+\delta) P_r v_r}.$$

Passando alla relazione di Hugoniot, nel caso del gas ideale politropico $e = Pv/\delta$, otteniamo

$$\frac{Pv}{\delta} - \frac{P_i v_i}{\delta} + \frac{1}{2}(P_i + P)(v - v_i) = 0,$$





per $v < v_i$. La relazione trovata è un'equazione lineare in P e la sua soluzione è

$$P = P^{\text{RH}}(v; \mathbf{i}) = P_i \frac{1 + \frac{2}{\delta} - \frac{v}{v_i}}{\left(1 + \frac{2}{\delta}\right) \frac{v}{v_i} - 1}, \quad v \leq v_i.$$

Notiamo che esiste un limite inferiore per la variabile v in conseguenza del fatto che $P > 0$ e si deduce facilmente che tale limite è espresso dalla condizione $(v/v_i) > \delta/(2 + \delta)$.

La funzione inversa dell'adiabatica di Rankine–Hugoniot si ottiene risolvendo l'equazione precedente rispetto a v :

$$v = v^{\text{RH}}(P; \mathbf{i}) = v_i \frac{1 + \frac{2}{\delta} + \frac{P}{P_i}}{\left(1 + \frac{2}{\delta}\right) \frac{P}{P_i} + 1},$$

e da questa si ricava agevolmente la velocità relativa limite per l'esistenza di due urti:

$$u_{2u}^{\text{rel}} = -(P_M - P_m) \sqrt{\frac{2v_m}{\delta P_m + (2 + \delta)P_M}}.$$

Se i dati indicano che non si ha formazione di vuoto, la soluzione del problema di Riemann di un gas ideale politropico si ottiene risolvendo il sistema di due equazioni non lineari stabilito nel paragrafo Q.5, nel quale si utilizzano le quattro funzioni definite, per lo stato sinistro, da

$$P(v; \ell) \equiv \begin{cases} P_\ell \left(\frac{v_\ell}{v}\right)^{1+\delta} & \text{se } v > v_\ell \\ P_\ell \frac{1 + \frac{2}{\delta} - \frac{v}{v_\ell}}{\left(1 + \frac{2}{\delta}\right) \frac{v}{v_\ell} - 1} & \text{se } \frac{\delta}{2 + \delta} v_\ell < v < v_\ell \end{cases}$$

$$u(v; \ell) \equiv \begin{cases} u_\ell + \frac{2}{\delta} \sqrt{(1 + \delta)P_\ell v_\ell} \left[1 - \left(\frac{v_\ell}{v}\right)^{\frac{\delta}{2}}\right] & \text{se } v > v_\ell \\ u_\ell - (v_\ell - v) \sqrt{\frac{2(1 + \delta)P_\ell}{(2 + \delta)v - \delta v_\ell}} & \text{se } \frac{\delta}{2 + \delta} v_\ell < v < v_\ell \end{cases}$$

e, per lo stato destro, da

$$P(v; \mathbf{r}) \equiv \begin{cases} P_r \left(\frac{v_r}{v}\right)^{1+\delta} & \text{se } v > v_r \\ P_r \frac{1 + \frac{2}{\delta} - \frac{v}{v_r}}{\left(1 + \frac{2}{\delta}\right) \frac{v}{v_r} - 1} & \text{se } \frac{\delta}{2 + \delta} v_r < v < v_r \end{cases}$$

$$u(v; \mathbf{r}) \equiv \begin{cases} u_r - \frac{2}{\delta} \sqrt{(1 + \delta)P_r v_r} \left[1 - \left(\frac{v_r}{v}\right)^{\frac{\delta}{2}}\right] & \text{se } v > v_r \\ u_r + (v_r - v) \sqrt{\frac{2(1 + \delta)P_r}{(2 + \delta)v - \delta v_r}} & \text{se } \frac{\delta}{2 + \delta} v_r < v < v_r \end{cases}$$

I valori limite della velocità relativa per stabilire *a priori* il tipo di onde nella soluzione del problema di Riemann di un gas ideale politropico si calcolano facilmente, tendo presente l'equazione di stato $v(s, P) = v_0 e^{[\delta/(1+\delta)](s-s_0)/R} \left(\frac{P}{P_0}\right)^{-1/(1+\delta)}$ e la relazione





$c(s, P) = \sqrt{(1 + \delta) v(s, P) P}$. Si ottiene:

$$u_{\text{vuoto}}^{\text{rel}} = \frac{2\sqrt{1+\delta}}{\delta} (\sqrt{P_\ell v_\ell} + \sqrt{P_r v_r}),$$

$$u_{2r}^{\text{rel}} = \frac{2\sqrt{(1+\delta)P_M v_M}}{\delta} \left[1 - \left(\frac{P_m}{P_M} \right)^{\frac{\delta}{2(1+\delta)}} \right],$$

$$u_{2u}^{\text{rel}} = -(P_M - P_m) \sqrt{\frac{2v_m}{\delta P_m + (2+\delta)P_M}}.$$

Parametrizzazione dell'entalpia specifica

La variabile indipendente da usare negli integrali richiesti per risolvere il problema di Riemann può essere scelta liberamente. Se si sceglie l'entalpia specifica h come seconda variabile indipendente assieme all'entropia s , la velocità del suono del gas ideale politropico è data dalla relazione $c = c(s, h) = \sqrt{\delta h} = c(h)$, per cui dipende solo da h . Questo facilita il calcolo degli integrali coinvolti. Infatti, per il cambiamento di variabile $v \rightarrow h$ si ha

$$\int \frac{c(s, v)}{v} dv = \int \frac{c(h)}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial h} \right)_s dh = \int \frac{c(h)}{v \left(\frac{\partial h}{\partial v} \right)_s} dh.$$

Inoltre, per la derivazione delle funzioni composte risulta

$$\left(\frac{\partial h}{\partial v} \right)_s = \left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_s \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_s = v \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \frac{d}{dv} \left(\frac{1}{v} \right) = -\frac{[c(h)]^2}{v},$$

dove si è usato il carattere convolutivo della trasformata di Legendre e la definizione della velocità del suono. L'integrale indefinito diventa quindi

$$\int \frac{c(s, v)}{v} dv = -\int \frac{dh}{c(h)} = -\frac{1}{\sqrt{\delta}} \int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{\delta}} + C.$$

I valori limite delle velocità relative sono pertanto

$$u_{\text{vuoto}}^{\text{rel}} \equiv \frac{2}{\sqrt{\delta}} (\sqrt{h_\ell} + \sqrt{h_r}),$$

$$u_{2r}^{\text{rel}} \equiv 2\sqrt{\frac{h_M}{\delta}} \left[1 - \left(\frac{P_m}{P_M} \right)^{\frac{\delta}{2(1+\delta)}} \right],$$

$$u_{2u}^{\text{rel}} \equiv -\frac{\sqrt{\frac{2}{1+\delta}} \left(\frac{P_M}{P_m} - 1 \right) \sqrt{h_m}}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{\delta} \right) \frac{P_M}{P_m} + 1}}.$$

Scriveremo allora le funzioni non lineari, che definiscono il problema di Riemann del gas ideale politropico, nella forma seguente: per lo stato sinistro avremo

$$P(h; \mathfrak{L}) \equiv \begin{cases} P_\ell \left(\frac{h}{h_\ell} \right)^{\frac{1+\delta}{\delta}} & \text{se } h < h_\ell \\ P^{\text{RH}}(h; \mathfrak{L}) & \text{se } h > h_\ell \end{cases}$$

$$u(h; \mathfrak{L}) \equiv \begin{cases} u_\ell + \frac{2}{\delta} (\sqrt{h_\ell} - \sqrt{h}) & \text{se } h < h_\ell \\ u_\ell - u^{\text{RH}}(h; \mathfrak{L}) & \text{se } h > h_\ell \end{cases}$$





e, per lo stato destro,

$$P(h; \mathbf{r}) \equiv \begin{cases} P_r \left(\frac{h}{h_r} \right)^{\frac{1+\delta}{\delta}} & \text{se } h < h_r \\ P^{\text{RH}}(h; \mathbf{r}) & \text{se } h > h_r \end{cases}$$

$$u(h; \mathbf{r}) \equiv \begin{cases} u_r - \frac{2}{\delta} (\sqrt{h_r} - \sqrt{h}) & \text{se } h < h_r \\ u_r + u^{\text{RH}}(h; \mathbf{r}) & \text{se } h > h_r \end{cases}$$

Usando h come parametro risulta particolarmente semplice la soluzione relativa all'onda di rarefazione, mentre si complicano le funzioni che descrivono l'onda d'urto. Infatti la pressione che soddisfa le condizioni di salto di Rankine–Hugoniot a partire da uno stato \mathbf{i} , è la radice con segno positivo dell'equazione di secondo grado

$$\left(\frac{P}{P_i} \right)^2 + \left(1 + \frac{2}{\delta} \right) \left(1 - \frac{h}{h_i} \right) \frac{P}{P_i} - \frac{h}{h_i} = 0$$

e la velocità corrispondente è data da

$$u = \sqrt{-\frac{\delta}{1+\delta} \left[h_i \left(1 - \frac{P}{P_i} \right) + h \left(1 - \frac{P_i}{P} \right) \right]}.$$

Q.11 Caso del gas di van der Waals

Consideriamo ora il problema di Riemann per un gas descritto dall'equazione di stato di van der Waals, che è denominato gas *di van der Waals* ed è stato descritto nel paragrafo E.3 dell'appendice riguardante le proprietà termodinamiche dei fluidi. In questo paragrafo richiamiamo inizialmente le equazioni di stato di questo gas nell'ipotesi che il suo calore specifico a volume costante sia costante, per cui si ottiene il modello di gas di van der Waals detto politropico. Poi calcoliamo le soluzioni che rappresentano le onde di rarefazione e le onde d'urto e scriviamo le funzioni non lineari che definiscono il problema di Riemann per questo modello di gas. Infine si formula il problema di Riemann nel caso più generale in cui il calore specifico del gas di van der Waals dipende della temperatura. Per questo gas di van der Waals non politropico è naturale e necessario, vista la dipendenza del calore specifico dalla temperatura, prendere questa variabile al posto del volume specifico come parametro per la formulazione del problema.

Relazioni termodinamiche

La relazione fondamentale energetica del gas di van der Waals è

$$e = e(s, v) = \left(e_0 + \frac{a}{v_0} \right) \left(\frac{v_0 - b}{v - b} \right)^\delta \exp[\delta (s - s_0)/R] - \frac{a}{v},$$

dove $R = \mathcal{R}/m$ è la costante associata al gas considerato di peso molecolare m , con $\mathcal{R} = 8.314 \text{ J}/(\text{mol K})$ che indica la costante universale dei gas ideali. Nell'espressione precedente a e b sono le costanti dimensionali del gas di van der Waals considerato mentre δ è il parametro adimensionale $\delta = R/c_v$, con c_v che indica il calore specifico a volume costante, supposto indipendente dalla temperatura. Le altre quantità e_0 , v_0 e s_0 sono i valori dell'energia, volume ed entropia per unità di massa in un determinato stato di riferimento. Introducendo la costante $K_0 = \left(e_0 + \frac{a}{v_0} \right) (v_0 - b)^\delta \exp(-\delta s_0/R)$, la relazione fondamentale considerata assume la forma:

$$e(s, v) = K_0 \frac{\exp(\delta s/R)}{(v - b)^\delta} - \frac{a}{v}.$$





Le equazioni di stato del gas di van der Waals politropico si ottengono facilmente dalla relazione fondamentale

$$T = e_s(s, v) = \frac{K_0 \delta}{R} \frac{\exp(\delta s/R)}{(v-b)^\delta},$$

$$P = -e_v(s, v) = K_0 \delta \frac{\exp(\delta s/R)}{(v-b)^{1+\delta}} - \frac{a}{v^2}.$$

L'eliminazione della variabile s in favore di e fornisce un forma alternativa delle equazioni di stato

$$T = \frac{\delta}{R} \left(e + \frac{a}{v} \right),$$

$$P = \delta \frac{e + \frac{a}{v}}{v-b} - \frac{a}{v^2}.$$

Per risolvere il problema di Riemann si richiede l'espressione della velocità del suono

$$c(s, v) \equiv \sqrt{-v^2 \frac{\partial P(s, v)}{\partial v}} = \left[K_0 \delta (1 + \delta) \frac{\exp(\delta s/R) v^2}{(v-b)^{2+\delta}} - \frac{2a}{v} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

L'eliminazione della variabile s in favore di P , ottenuta con l'aiuto di una delle equazioni di stato, fornisce

$$c(P, v) = \left[(1 + \delta) \frac{P v^2 + a}{v-b} - \frac{2a}{v} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Funzioni non lineari del problema di Riemann

La derivata fondamentale del gas di van der Waals politropico si ottiene facilmente con un calcolo diretto

$$\Gamma(P, v) \equiv \Gamma(s(P, v), v) = \frac{(1 + \delta)(2 + \delta) \frac{P + a/v^2}{(v-b)^2} - \frac{6a}{v^4}}{2(1 + \delta) \frac{P + a/v^2}{v(v-b)} - \frac{4a}{v^4}}.$$

Si può dimostrare che per $\delta > \check{\delta} = 1/16.66 = 0.06$ si ha $\Gamma > 0$ per qualunque stato termodinamico del gas all'esterno della regione di coesistenza delle fasi liquido e vapore. È possibile scendere al di sotto del valore limite $\check{\delta} = 1/16.66 = 0.06$ solo se le molecole del gas contengono almeno 7 atomi. In questo caso la derivata fondamentale diventa negativa in una regione molto piccola vicina alla curva di coesistenza delle due fasi. Pertanto, con l'esclusione di questi casi particolari, $\Gamma > 0$ e gli autovalori λ_1 e λ_3 sono genuinamente non lineari: la soluzione di ogni problema di Riemann del gas di van der Waals politropico ha allora le stesse caratteristiche della soluzione del caso di gas ideale. Per dettagli si rimanda al lavoro di L. Quartapelle *et al.*

Tenendo conto del legame fra P e v nelle trasformazioni isentropiche del gas di van der Waals, la pressione del gas nell'onda di rarefazione è data da

$$P^{\text{rar}}(v; \mathbf{i}) = \left(P_i + \frac{a}{v_i^2} \right) \left(\frac{v_i - b}{v - b} \right)^{1+\delta} - \frac{a}{v^2},$$

e, usando l'espressione trovata della velocità del suono $c = c(P, v)$, la velocità del gas di van der Waals all'interno dell'onda è data dall'integrale:

$$u^{\text{rar}}(v; \mathbf{i}) = u_i \pm \int_{v_i}^v \left[(1 + \delta) \left(P_i + \frac{a}{v_i^2} \right) \frac{(v_i - b)^{1+\delta}}{(v' - b)^{2+\delta}} - \frac{2a}{v'^3} \right]^{\frac{1}{2}} dv'.$$





L'adiabatica Hugoniot nel caso del gas di van der Waals politropico è ancora un'equazione lineare per la pressione e la sua soluzione è

$$P^{\text{RH}}(v; \mathbf{i}) = \frac{e_i - \frac{P_i}{2}(v - v_i) + a\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)\frac{1}{v} + \frac{ab}{\delta v^2}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\delta}\right)v - \left(\frac{v_i}{2} + \frac{b}{\delta}\right)}.$$

Da questa soluzione, la velocità degli stati che possono essere collegati allo stato \mathbf{i} da un'onda d'urto è data dall'espressione generale :

$$u^{\text{RH}}(v; \mathbf{i}) = u_i \mp \sqrt{-[P^{\text{RH}}(v; \mathbf{i}) - P_i](v - v_i)}.$$

Scrivendo quindi assieme le soluzioni dell'onda di rarefazione e dell'onda d'urto si ottengono le funzioni non lineari del problema di Riemann nel caso del gas di van der Waals politropico. Per lo stato sinistro abbiamo

$$P(v; \mathcal{L}) \equiv \begin{cases} \left(P_\ell + \frac{a}{v_\ell^2}\right)\left(\frac{v_\ell - b}{v - b}\right)^{1+\delta} - \frac{a}{v^2} & \text{se } v > v_\ell \\ \frac{e_\ell - \frac{P_\ell}{2}(v - v_\ell) + a\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)\frac{1}{v} + \frac{ab}{\delta v^2}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\delta}\right)v - \left(\frac{v_\ell}{2} + \frac{b}{\delta}\right)} & \text{se } v < v_\ell \end{cases}$$

$$u(v; \mathcal{L}) \equiv \begin{cases} u_\ell + \int_{v_\ell}^v \left[(1 + \delta) \left(P_\ell + \frac{a}{v_\ell^2}\right) \frac{(v_\ell - b)^{1+\delta}}{(v' - b)^{2+\delta}} - \frac{2a}{v'^3} \right]^{1/2} dv' & \text{se } v > v_\ell \\ u_\ell - \sqrt{-[P^{\text{RH}}(v; \mathcal{L}) - P_\ell](v - v_\ell)} & \text{se } v < v_\ell \end{cases}$$

mentre per lo stato destro abbiamo

$$P(v; \mathbf{r}) \equiv \begin{cases} \left(P_r + \frac{a}{v_r^2}\right)\left(\frac{v_r - b}{v - b}\right)^{1+\delta} - \frac{a}{v^2} & \text{se } v > v_r \\ \frac{e_r - \frac{P_r}{2}(v - v_r) + a\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)\frac{1}{v} + \frac{ab}{\delta v^2}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\delta}\right)v - \left(\frac{v_r}{2} + \frac{b}{\delta}\right)} & \text{se } v < v_r \end{cases}$$

$$u(v; \mathbf{r}) \equiv \begin{cases} u_r - \int_{v_r}^v \left[(1 + \delta) \left(P_r + \frac{a}{v_r^2}\right) \frac{(v_r - b)^{1+\delta}}{(v' - b)^{2+\delta}} - \frac{2a}{v'^3} \right]^{1/2} dv' & \text{se } v > v_r \\ u_r + \sqrt{-[P^{\text{RH}}(v; \mathbf{r}) - P_r](v - v_r)} & \text{se } v < v_r \end{cases}$$

Queste funzioni permettono di risolvere il problema di Riemann per il gas di van der Waals politropico purché la condizione di non linearità genuina si rispetti. Se $\delta < \check{\delta} = 0.06$, il che accade quando le molecole del gas considerato contengono almeno 7 atomi, allora la condizione di non linearità genuina non è più soddisfatta. La violazione è limitata tuttavia a una regione molto piccola del piano termodinamico (P, v) , in prossimità della curva di coesistenza del vapore con la fase liquida e vicino al punto critico. Di conseguenza, se la soluzione del problema di Riemann coinvolge stati termodinamici dentro o anche solo sufficientemente vicini a questa regione di violazione della non linearità genuina, allora è necessario estendere la teoria del problema di Riemann. Si devono infatti considerare, assieme alle usuali onde d'urto di compressione e ai ventagli di rarefazione, anche onde d'urto rarefattive e ventagli compressivi. Inoltre, si devono includere anche onde di tipo *ibrido* che comprendono componenti sia continue sia discontinue. In particolare si scopre che sono possibili onde ibride con due o tre componenti diverse. Si rimanda il lettore interessato a questi sviluppi al recente lavoro di M. Fossati, P. Di Lizia e L. Quartapelle.





Caso non politropico

Consideriamo ora un gas di van der Waals avente calore specifico a volume costante che dipende dalla temperatura e formuliamo il problema di Riemann per questo modello di gas. Il modello ora include il contributo delle vibrazioni molecolari all'energia interna del fluido ed è chiamato fluido di van der Waals non politropico. La maggiore complessità rispetto al caso politropico deriva dal fatto che, come già visto nel paragrafo E.3, non è possibile scrivere la relazione termodinamica fondamentale, esplicitamente, come una singola funzione, e si deve invece ricorrere a una sua rappresentazione parametrica in termini di due funzioni contenenti la temperatura come variabile libera. Il contributo delle vibrazioni molecolari all'energia interna è descritto a partire dal calore specifico a volume costante che abbiamo visto essere dato (per ragioni quantistiche) da

$$c_v(T) \equiv \frac{\partial e(T, v)}{\partial T} = \epsilon R + R \sum_{n=1}^{L_{\text{vib}}} \left(\frac{T_n}{T} \right)^2 \frac{\exp(T_n/T)}{[\exp(T_n/T) - 1]^2},$$

dove $\epsilon = \frac{5}{3}$ per una molecola lineare (cioè rettilinea) ed $\epsilon = 3$ per una molecola non lineare. Essendo $c_v(T)$ funzione solo della temperatura, l'energia interna e l'entropia per unità di massa del gas di van der Waals non politropico sono date dalle relazioni (vedi fine del paragrafo E.3)

$$e(T, v) = \epsilon R(T - T_0) + \sum_{n=1}^{L_{\text{vib}}} \frac{RT_n}{\exp(T_n/T) - 1} - \frac{a}{v},$$

$$\frac{s(T, v)}{R} = \ln \frac{v - b}{v_0 - b} + \ln \left(\frac{T}{T_0} \right)^\epsilon + \sum_{n=1}^{L_{\text{vib}}} \left\{ \ln \frac{1 - e^{-T_n/T_0}}{1 - e^{-T_n/T}} + \frac{T_n/T}{e^{T_n/T} - 1} \right\},$$

dove si è scelto il valore dell'entropia specifica s_0 nello stato di riferimento come $s_0 = R \sum_{n=1}^{L_{\text{vib}}} \frac{T_n/T_0}{e^{T_n/T_0} - 1}$. Come visto sempre alla fine del paragrafo E.3, la velocità del suono del gas di van der Waals non politropico è data dalla relazione

$$c(T, v) = \left\{ \left[1 + \frac{R}{c_v(T)} \right] \frac{RTv^2}{(v - b)^2} - \frac{2a}{v} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

e come quella del gas politropico dipende sia dalla temperatura sia dal volume, ma adesso la dipendenza dalla temperatura è più complicata.

Nel caso di un gas non politropico (anche ideale) la risoluzione dell'onda di rarefazione si ottiene agevolmente utilizzando la temperatura come variabile d'integrazione. Di conseguenza l'intero problema di Riemann per i gas di questo tipo è formulato più agevolmente definendo gli stati sinistro e destro come (v_ℓ, T_ℓ, u_ℓ) e (v_r, T_r, u_r) e prendendo come variabili incognite la temperatura $T_{\star, \ell}$ e $T_{\star, r}$ ai due lati della discontinuità di contatto; per semplificare la notazione le due incognite saranno indicate con $T \equiv T_{\star, \ell}$ e $W \equiv T_{\star, r}$.

Il procedimento per la risoluzione del problema di Riemann nel caso di gas di van der Waals non politropico ricalca quello appena visto nel caso politropico. Si introducono le funzioni $u(T; \ell)$ e $P(T; \ell)$ che forniscono, rispettivamente, la velocità e la pressione della famiglia a un parametro di stati. Questi possono essere connessi allo stato sinistro (v_ℓ, T_ℓ, u_ℓ) del problema di Riemann, tramite un'onda di rarefazione oppure un'onda d'urto, a seconda del valore di T rispetto a T_ℓ . In modo analogo, $u(T; r)$ e $P(T; r)$ denotano le funzioni della famiglia a un parametro di stati che possono essere connessi allo stato destro (v_r, T_r, u_r) . Queste due coppie di funzioni sono definite da

$$u(T; \ell) \equiv \begin{cases} u^{\text{RH}}(T; \ell) & \text{se } T > T_\ell \\ u^{\text{rar}}(T; \ell) & \text{se } T < T_\ell \end{cases} \quad \text{e} \quad u(T; r) \equiv \begin{cases} u^{\text{RH}}(T; r) & \text{se } T > T_r \\ u^{\text{rar}}(T; r) & \text{se } T < T_r \end{cases}$$





e

$$P(T; \ell) \equiv \begin{cases} P^{\text{RH}}(T; \ell) & \text{se } T > T_\ell \\ P^{\text{rar}}(T; \ell) & \text{se } T < T_\ell \end{cases} \quad \text{e} \quad P(T; \mathbf{r}) \equiv \begin{cases} P^{\text{RH}}(T; \mathbf{r}) & \text{se } T > T_r \\ P^{\text{rar}}(T; \mathbf{r}) & \text{se } T < T_r \end{cases}$$

L'uguaglianza dei valori della velocità della pressione ai due lati della discontinuità di contatto implica che T e W sono soluzione del sistema di due equazioni

$$\begin{cases} \phi_{(\ell,r)}(T, W) = 0, \\ \psi_{(\ell,r)}(T, W) = 0, \end{cases}$$

in cui le due funzioni sono definite nel modo seguente

$$\begin{aligned} \phi_{(\ell,r)}(T, W) &\equiv u(T; \ell) - u(W; \mathbf{r}), \\ \psi_{(\ell,r)}(T, W) &\equiv P(T; \ell) - P(W; \mathbf{r}). \end{aligned}$$

La soluzione di questo sistema non lineare può essere affrontata mediante il metodo di Newton che sarà comodo scrivere in forma incrementale e che richiede di valutare la seguente matrice jacobiana

$$\frac{\partial(\phi_{(\ell,r)}, \psi_{(\ell,r)})}{\partial(T, W)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{du(T; \ell)}{dT} & -\frac{du(W; \mathbf{r})}{dW} \\ \frac{dP(T; \ell)}{dT} & -\frac{dP(W; \mathbf{r})}{dW} \end{pmatrix}.$$

a ogni iterazione. Questo calcolo sarà tuttavia più complicato del caso politropico poiché le derivate rispetto alla variabili T e W coinvolgono delle funzioni composte: infatti la funzione della pressione $P = P(T; \mathbf{i})$ si ottiene dalla funzione $v = v(T; \mathbf{i})$ tramite l'equazione di stato $P(T; \mathbf{i}) = P(T, v(T, \mathbf{i}))$, come sarà mostrato fra un momento.

Determiniamo ora le onde di rarefazione e le onde d'urto per questo modello di gas, dal momento che il problema di Riemann richiede di conoscere le espressioni analitiche di tali soluzioni. L'onda di rarefazione del gas di van der Waals non politropico si ottiene calcolando l'integrale della velocità dopo avere effettuato il cambiamento di variabili $v \rightarrow T$ lungo la curva integrale e sfruttando la costanza dell'entropia nell'onda di rarefazione. Si pone quindi $s = \text{costante} = s_i$ nella relazione $s = s(T, v)$ e si esprime s_i in termini dei valori (T_i, v_i) . Da ciò si ottiene la relazione che rappresenta il volume specifico v della famiglia a un parametro di stati dell'onda di rarefazione connessa con lo stato iniziale (v_i, u_i, T_i) :

$$\ln \frac{v-b}{v_i-b} = \ln \left(\frac{T_i}{T} \right)^\epsilon + \sum_{n=1}^{L_{\text{vib}}} \left\{ \ln \frac{1 - e^{-T_n/T}}{1 - e^{-T_n/T_i}} + \frac{T_n/T}{1 - e^{T_n/T}} - \frac{T_n/T_i}{1 - e^{T_n/T_i}} \right\}.$$

Questa relazione può essere risolta rispetto a v e fornisce la seguente funzione esplicita di $v(T; \mathbf{i})$:

$$v(T; \mathbf{i}) = b + (v_i - b) \left(\frac{T_i}{T} \right)^\epsilon \prod_{n=1}^{L_{\text{vib}}} \frac{\exp\left(\frac{T_n/T}{1 - e^{T_n/T}}\right) - \exp\left(\frac{-T_n/T}{1 - e^{-T_n/T}}\right)}{\exp\left(\frac{T_n/T_i}{1 - e^{T_n/T_i}}\right) - \exp\left(\frac{-T_n/T_i}{1 - e^{-T_n/T_i}}\right)}.$$

Questa funzione è usata nell'integrale che esprime la velocità nell'onda di rarefazione, dove compare la velocità del suono data dalla relazione ricordata in precedenza. In questo modo si esprime quest'ultima in funzione della sola T , $c(T, v(T; \mathbf{i}))$, e si ottiene, per $T < T_i$,

$$u^{\text{rar}}(T; \mathbf{i}) = u_i \pm \int_{T_i}^T \left\{ \left[1 + \frac{R}{c_v(t)} \right] \frac{Rt}{[v(t; \mathbf{i}) - b]^2} - \frac{2a}{[v(t; \mathbf{i})]^3} \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{dv(t; \mathbf{i})}{dt} dt$$





dove $c_v(T)$ è la funzione fornita esplicitamente all'inizio. La derivata sotto il segno d'integrale è calcolata direttamente nel modo seguente:

$$\frac{dv(T; \mathbf{i})}{dT} = [v(T; \mathbf{i}) - b] \left\{ -\frac{\epsilon}{T} + \sum_{n=1}^{L_{\text{vib}}} \frac{\frac{d}{dT} \exp\left(\frac{T_n/T}{1 - e^{T_n/T}}\right) - \frac{d}{dT} \exp\left(\frac{-T_n/T}{1 - e^{-T_n/T}}\right)}{\exp\left(\frac{T_n/T}{1 - e^{T_n/T}}\right) - \exp\left(\frac{-T_n/T}{1 - e^{-T_n/T}}\right)} \right\}.$$

Differenziando le funzioni esponenziali e semplificando otteniamo

$$\frac{dv(T; \mathbf{i})}{dT} = [v(T; \mathbf{i}) - b] \left\{ -\frac{\epsilon}{T} + \sum_{n=1}^{L_{\text{vib}}} \frac{\frac{d}{dT} \left(\frac{T_n/T}{1 - e^{T_n/T}} \right) + e^{-T_n/T} \frac{d}{dT} \left(\frac{T_n/T}{1 - e^{-T_n/T}} \right)}{1 - e^{-T_n/T}} \right\}.$$

Nell'onda di rarefazione, la pressione è determinata in funzione della sola T tramite la funzione $v(T; \mathbf{i})$, per mezzo dell'equazione di stato della pressione, ossia,

$$P^{\text{rar}}(T; \mathbf{i}) = \frac{RT}{v(T; \mathbf{i}) - b} - \frac{a}{[v(T; \mathbf{i})]^2},$$

sempre per $T < T_i$.

Il gas non politropico ha anche la complicazione ulteriore, rispetto a quello politropico, che la soluzione delle relazioni di Rankine–Hugoniot non può essere espressa in forma chiusa e richiede quindi di introdurre un'iterazione interna a quella utilizzata per risolvere il sistema non lineare del problema di Riemann. Per trovare la soluzione delle condizioni di salto di Rankine–Hugoniot nel caso del gas di van der Waals non politropico, la forma usuale dell'equazione di Hugoniot con le variabili P e v non è conveniente poiché non è possibile esprimere analiticamente l'equazione di stato $e = e(P, v)$ in forma esplicita. È invece disponibile l'equazione di stato esplicita $e = e(T, v)$, per cui conviene formulare l'equazione di Hugoniot nel modo seguente:

$$e(T, v) - e(T_i, v_i) + \frac{1}{2} [P(T_i, v_i) + P(T, v)](v - v_i) = 0.$$

Utilizzando poi in questa relazione l'equazione di stato $P = P(T, v)$ otteniamo

$$\begin{aligned} \epsilon RT + \sum_{n=1}^{L_{\text{vib}}} \frac{RT_n}{e^{T_n/T} - 1} + \frac{1}{2} \left(\frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2} \right) (v - v_i) \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{RT_i}{v_i - b} - \frac{a}{v_i^2} \right) (v - v_i) - \frac{a}{v} - e_i = 0, \end{aligned}$$

dove $e_i = e(T_i, v_i)$. Questa relazione ha la forma $f^{\text{RH}}(T, v; \mathbf{i}) = 0$ e rappresenta quindi una definizione implicita della funzione $v = v(T; \mathbf{i})$, per $T > T_i$. Per ogni $T > T_i$ la soluzione v può essere determinata mediante l'iterazione di Newton, usando come soluzione iniziale di tentativo la soluzione dell'equazione del caso particolare con $a = b = 0$. Infatti, per $a = b = 0$ si ottiene la seguente equazione algebrica per $v = v_{\text{in}}$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{RT}{v} + \frac{RT_i}{v_i} \right) (v - v_i) + \epsilon R(T - T_i) + \sum_{n=1}^{L_{\text{vib}}} \left(\frac{RT_n}{e^{T_n/T} - 1} - \frac{RT_n}{e^{T_n/T_i} - 1} \right) = 0,$$

che è un'equazione quadratica per l'incognita adimensionale $v \equiv v/v_i$:

$$v^2 + 2\beta(\tau)v - \tau = 0,$$

dove $\tau \equiv T/T_i$ e

$$\beta(\tau) \equiv \left(\frac{1}{2} + \epsilon \right) (\tau - 1) + \sum_{n=1}^{L_{\text{vib}}} \frac{T_n}{T_i} \left(\frac{1}{e^{(T_n/T_i)/\tau} - 1} - \frac{1}{e^{T_n/T_i} - 1} \right).$$





Pertanto, il valore di partenza di v è preso come la sola soluzione fisicamente ammissibile dell'equazione, ovvero,

$$v_{\text{in}} = v_i \left[-\beta(\tau) + \sqrt{\beta(\tau)^2 + \tau} \right].$$

Una volta trovata la soluzione dell'equazione non lineare $f^{\text{RH}}(T, v; \mathbf{i}) = 0$, la pressione dietro l'urto è data immediatamente da

$$P^{\text{RH}}(T; \mathbf{i}) = \frac{RT}{v(T; \mathbf{i}) - b} - \frac{a}{[v(T; \mathbf{i})]^2},$$

e la velocità corrispondente si calcola mediante la relazione

$$u^{\text{RH}}(T; \mathbf{i}) = u_i \mp \sqrt{-[P^{\text{RH}}(T; \mathbf{i}) - P_i][v(T; \mathbf{i}) - v_i]},$$

sempre assumendo $T > T_i$.

Venendo al calcolo delle derivate degli elementi della matrice jacobiana, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{dP(T; \mathbf{i})}{dT} &= \left[\frac{\partial P(T, v)}{\partial T} + \frac{\partial P(T, v)}{\partial v} \frac{dv(T; \mathbf{i})}{dT} \right] \Big|_{v(T; \mathbf{i})} \\ &= \frac{R}{v(T; \mathbf{i}) - b} + \left\{ \frac{-RT}{[v(T; \mathbf{i}) - b]^2} + \frac{2a}{[v(T; \mathbf{i})]^3} \right\} \frac{dv(T; \mathbf{i})}{dT}, \end{aligned}$$

dove la derivata di $v(T; \mathbf{i})$ rispetto a T è data nel caso della rarefazione dalla semplice formula scritta in precedenza, mentre nel caso dell'onda d'urto dalla regola di derivazione per una funzione implicita:

$$\frac{dv(T; \mathbf{i})}{dT} = - \frac{\partial f^{\text{RH}}(T, v)}{\partial T} \Big|_{v(T; \mathbf{i})} / \frac{\partial f^{\text{RH}}(T, v)}{\partial v} \Big|_{v(T; \mathbf{i})}.$$

In conclusione, il carattere non politropico del gas fa aumentare sensibilmente la complessità dell'algoritmo di risoluzione del problema di Riemann rispetto al caso politropico. D'altra parte il solutore di Riemann non politropico che abbiamo descritto contiene tutti gli elementi necessari per affrontare il problema di Riemann nel caso di miscele di gas in cui possono verificarsi reazioni chimiche fra le diverse componenti.

Osservazione La soluzione che abbiamo trovato si basa sull'ipotesi di equilibrio termodinamico completo del fluido dopo l'urto. Questa ipotesi non è soddisfatta nella realtà e quindi introduce una semplificazione matematica che trascura l'esistenza di un tempo di rilassamento finito affinché le vibrazioni molecolari siano in equilibrio termodinamico con i modi traslazionali e rotazionali delle molecole del gas. Comunque, di solito la mancanza di equilibrio delle vibrazioni interne delle molecole con gli altri loro modi energetici si verifica in una regione di spessore molto ridotto dietro il fronte dell'urto, per cui il metodo proposto fornirà almeno una prima approssimazione alla soluzione del problema di Riemann per gas non politropici.

