Formule Utili – Analisi Matematica per Bioinformatici
a.a. 2007-2008

Dott. Simone Zuccher

14 settembre 2007

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

Indice

1 Geometria Analitica

1.1 Il piano cartesiano

Punto medio di un segmento	$M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$	$(x_1;y_1),(x_2;y_2)$ coordinate estremi
Distanza tra due punti	$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	$(x_1;y_1),(x_2;y_2)$ coordinate punti

1.2 La retta

Definizione: nessuna perché è un *ente primitivo*.

Forma implicita	$ax+by+c=0$		tutte le rette
	$x=-\frac{c}{a}=k$		retta verticale ($b=0$)
	$y=-\frac{c}{b}=h$		retta orizzontale ($a=0$)
Forma esplicita	$y=mx+q$ $m=-\frac{b}{a}, q=-\frac{c}{a}$		non comprende rette verticali perché sono espressioni valide solo se $a\neq 0$
Date due rette	$ax+by+c=0$	e	$a'x+b'y+c=0$ si ha:
	$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$		rette incidenti (una intersezione)
	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$		rette parallele (nessuna intersezione)
	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$		rette coincidenti (infinite intersezioni)
Date due rette	$m=m_1x+q_1$	e	$y=m_2x+q_2$ si ha:
	$m_1=m_2$		rette parallele
	$m_1m_2=-1\Leftrightarrow m_1=-\frac{1}{m_2}$		rette perpendicolari
Retta per un punto	$y-y_0=m(x-x_0)$		$(x_0;y_0)$ coordinate del punto
Retta per due punti	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$		$(x_1;y_1)$ e $(x_2;y_2)$ coordinate dei punti
Distanza punto retta	$d=\frac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$		Nota: retta in forma implicita

1.3 La circonferenza

Definizione: luogo geometrico dei punti del piano per i quali la distanza da un punto fisso detto *centro* è costante e congruente ad un segmento detto *raggio*.

Equazione noti centro $C(x_0; y_0)$ e raggio r	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
Equazione canonica	$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$
	$C\left(-\frac{\alpha}{2}; -\frac{\beta}{2}\right)$
	$r = \sqrt{\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma}$

1.4 La parabola

Definizione: luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto *fuoco* e da una retta fissa detta *direttrice*.
La figura così ottenuta ha un *asse di simmetria*. Il punto di intersezione tra l'asse di simmetria e la figura stessa è detto *vertice*.

Asse parallelo all'asse delle ordinate	$y = ax^2 + bx + c$	$a > 0 \Leftrightarrow \smile, a < 0 \Leftrightarrow \frown$
Posto $\Delta = b^2 - 4ac$, si ha	$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$	Vertice
	$F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$	Fuoco
	$x = -\frac{b}{2a}$	Asse di simmetria
	$y = -\frac{1+\Delta}{4a}$	Direttrice
Asse parallelo all'asse delle ascisse	$x = ay^2 + by + c$	$a > 0 \Leftrightarrow (, a < 0 \Leftrightarrow)$
	$V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$	Vertice
	$F\left(\frac{1-\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$	Fuoco
	$y = -\frac{b}{2a}$	Asse di simmetria
	$x = -\frac{1+\Delta}{4a}$	Direttrice

1.5 L'ellisse

Definizione: luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti *fuochi*.
La figura così ottenuta ha due *assi di simmetria* (o più semplicemente assi), il maggiore dei quali è detto asse maggiore (su di esso si trovano i fuochi) e l'altro asse minore. Il punto di intersezione degli assi è detto *centro*, i punti di intersezione tra gli assi e la figura stessa sono detti *vertici*.

Riferita a rette parallele agli assi	$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	Centro $O'(x_0;y_0)$
	$mx^2+ny^2+px+qy+r=0$	$\begin{cases} mn>0 \\ \dfrac{p^2}{4m}+\dfrac{q^2}{4n}-r>0 \\ O'\left(-\dfrac{p}{2m};-\dfrac{q}{2n}\right) \end{cases}$
Riferita agli assi	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \qquad a>b \quad \Leftrightarrow$	Fuochi sull'asse x, a semiasse maggiore b semiasse minore
	$F(\pm\sqrt{a^2-b^2};0)$	Coordinate dei fuochi
	$V(\pm a;0), V(0;\pm b)$	Coordinate dei vertici
Riferita agli assi	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \qquad a<b \quad \Leftrightarrow$	Fuochi sull'asse y, a semiasse minore b semiasse maggiore
	$F(0;\pm\sqrt{b^2-a^2})$	Coordinate dei fuochi
	$V(\pm a;0), V(0;\pm b)$	Coordinate dei vertici

1.6 L'iperbole

Definizione: luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti *fuochi*.
La figura così ottenuta ha due *assi di simmetria*. L'asse che interseca la figura stessa è detto *asse trasverso* (su di esso si trovano i fuochi) e l'altro *asse non trasverso*. Il punto di intersezione degli assi è detto *centro*, i punti di intersezione tra l'asse trasverso e la figura stessa sono detti *vertici*. Esistono due rette, detti *asintoti*, tali che la distanza tra ciasuna di esse e i punti dell'ellisse tende a zero al tendere all'infinito di x o y.

Riferita a rette parallele agli assi	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} \text{Centro } O'(x_0; y_0) \\ \text{Asse trasverso orizzontale} \end{cases}$
	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1$	$\begin{cases} \text{Centro } O'(x_0; y_0) \\ \text{Asse trasverso verticale} \end{cases}$
	$mx^2 + ny^2 + px + qy + r = 0$	$\begin{cases} mn < 0 \\ O'\left(-\frac{p}{2m}; -\frac{q}{2n}\right) \end{cases}$
	$\frac{p^2}{4m} + \frac{q^2}{4n} - r > 0$	Asse trasverso orizzontale
	$\frac{p^2}{4m} + \frac{q^2}{4n} - r < 0$	Asse trasverso verticale
Riferita agli assi	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	a semiasse trasverso b semiasse non trasverso
	$F(\pm\sqrt{a^2+b^2}; 0)$	Coordinate dei fuochi
	$V(\pm a; 0)$	Coordinate dei vertici
	$y = \pm\frac{b}{a}x$	Equazioni degli asintoti
Riferita agli assi	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$	a semiasse non trasverso b semiasse trasverso
	$F(0; \pm\sqrt{a^2+b^2})$	Coordinate dei fuochi
	$V(0; \pm b)$	Coordinate dei vertici
	$y = \pm\frac{b}{a}x$	Equazioni degli asintoti

1.7 L'iperbole equilatera

Definizione: iperbole con semiassi congruenti, ossia $a = b$.

Riferita agli assi	$x^2 - y^2 = a^2$	Fuochi sull'asse x
	$F(\pm a\sqrt{2}; 0)$	Coordinate dei fuochi
	$V(\pm a; 0)$	Coordinate dei vertici
	$y = \pm x$	Equazioni degli asintoti
Riferita agli assi	$x^2 - y^2 = -a^2$	Fuochi sull'asse y
	$F(0; \pm a\sqrt{2})$	Coordinate dei fuochi
	$V(0; \pm a)$	Coordinate dei vertici
	$y = \pm x$	Equazioni degli asintoti
Riferita ai propri asintoti	$xy = k \qquad k > 0, \qquad \Leftrightarrow$	occupa il I e III quadrante
	$F_1(\sqrt{2k}; \sqrt{2k}), F_2(-\sqrt{2k}; -\sqrt{2k})$	Coordinate dei fuochi
	$V_1(\sqrt{k}; \sqrt{k}), V_2(-\sqrt{k}; -\sqrt{k})$	Coordinate dei vertici
	$x = 0, \quad y = 0$	Equazioni degli asintoti
Riferita ai propri asintoti	$xy = k \qquad k < 0, \qquad \Leftrightarrow$	occupa il II e IV quadrante
	$F_1(-\sqrt{-2k}; \sqrt{-2k}), F_2(\sqrt{-2k}; -\sqrt{-2k})$	Coordinate dei fuochi
	$V_1(-\sqrt{-k}; \sqrt{-k}), V_2(\sqrt{-k}; -\sqrt{-k})$	Coordinate dei vertici
	$x = 0, \quad y = 0$	Equazioni degli asintoti
Funzione omografica	$y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$	$c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0$
	$\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$	Coordinate del centro
	$x = -\dfrac{d}{c}, \quad y = \dfrac{a}{c}$	Equazioni degli asintoti

2 Goniometria

Nota: in quanto segue, con il simbolo $\sin^2 x$ si intende $(\sin x)^2$. È chiaro che questa scrittura non è corretta perché $\sin^2 x = \sin(\sin x)$ ma, essendo entrata nell'uso corrente ed essendo più veloce da scrivere, la adottiamo anche qui.

2.1 Relazioni fondamentali

Descrizione	relazione matematica	restrizioni
Relazione fondamentale:	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\forall x \in \mathbb{R}$
Definizione di tangente:	$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Definizione di cotangente:	$\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Definizione di secante:	$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Definizione di cosecante:	$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2.2 Periodicità

$\sin(x + 2k\pi)$	$=$	$\sin x$	$\cos(x + 2k\pi)$	$=$	$\cos x$	$k \in \mathbb{Z}$
$\tan(x + k\pi)$	$=$	$\tan x$	$\cot(x + k\pi)$	$=$	$\cot x$	$k \in \mathbb{Z}$
$\sec(x + 2k\pi)$	$=$	$\sec x$	$\csc(x + 2k\pi)$	$=$	$\csc x$	$k \in \mathbb{Z}$

2.3 Formule di conversione

	noto $\sin x$	noto $\cos x$	nota $\tan x$
$\sin x =$	$\sin x$	$\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\pm\dfrac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$
$\cos x =$	$\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$
$\tan x =$	$\pm\dfrac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$

Una volta noti $\sin x$, $\cos x$ o $\tan x$, il passaggio alle altre funzioni trigonometriche è banale essendo $\cot x = 1/\tan x$, $\sec x = 1/\cos x$ e $\csc x = 1/\sin x$.

2.4 Archi associati

$f(x)$	$\sin f(x)$	$\cos f(x)$	$\tan f(x)$	$\cot f(x)$
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$\frac{\pi}{2}-x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$
$\frac{\pi}{2}+x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$
$\pi-x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$\pi+x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\frac{3}{2}\pi-x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cot x$	$\tan x$
$\frac{3}{2}\pi+x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$
$2\pi-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$

Nota: questi archi associati sono deducibili immediatamente dal cerchio goniometrico, quindi è inutile memorizzarli.

2.5 Formule di addizione e sottrazione

$$\begin{aligned}
\sin(x\pm y) &= \sin x\cos y\pm\cos x\sin y\\
\cos(x\pm y) &= \cos x\cos y\mp\sin x\sin y\\
\tan(x\pm y) &= \frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}\\
\cot(x\pm y) &= \frac{\cot x\cot y\mp 1}{\cot x\pm\cot y}
\end{aligned}$$

2.6 Formule di duplicazione e triplicazione

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= 2\sin x\cos x\\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1\\ \tan(2x) &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= 3\sin x - 4\sin^3 x\\ \cos(3x) &= 4\cos^3 x - 3\cos x\\ \tan(3x) &= \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}\end{aligned}$$

2.7 Formule di bisezione

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\\ \cos\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\\ \tan\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}\end{aligned}$$

2.8 Formule parametriche

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), x \neq \pi(1+2k)\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$	$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

2.9 Formule di prostaferesi e di Werner

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\ \sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\\ \cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\ \cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin x\sin y &= \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]\\ \cos x\cos y &= \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]\\ \sin x\cos y &= \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]\end{aligned}$$

2.10 Archi noti

x[rad]	x[deg]	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
0	0	0	1	0	$\nexists$
$\frac{\pi}{12}$	$15°$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{10}$	$18°$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{8}$	$22°30'$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3}{8}\pi$	$67°30'$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
$\frac{5}{12}\pi$	$75°$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	1	0	$\nexists$	0

Nota: sono qui riportati solo gli archi del primo quadrante in quanto gli altri sono riconducibili a tale quadrante tramite gli archi associati (vedi §2.4).

3 Derivate

3.1 Derivate fondamentali ed altre notevoli

derivate fondamentali

$f(x)$	$f'(x)$
$k, k \in \mathbb{R}$	0
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
a^x	$a^x \log a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \log a}$
$\log \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

altre derivate notevoli

$f(x)$	$f'(x)$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

4 Sviluppi in serie di Taylor

4.1 Principali sviluppi di McLaurin

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \\
&\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \cdots \cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \\
\arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) \\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}
$$

5 Integrali

5.1 Integrali indefiniti immediati (o quasi)

Integrali fondamentali		Altri integrali notevoli	
$\int x^\alpha \, dx$	$= \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \neq -1$	$\int f'(x) \cdot [f(x)]^\alpha \, dx$	$= \dfrac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \neq -1$
$\int \dfrac{1}{x} \, dx$	$= \log\|x\| + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} \, dx$	$= \log\|f(x)\| + c$
$\int a^x \, dx$	$= \dfrac{a^x}{\log a} + c,\ a > 0 \wedge a \neq 1$	$\int f'(x) \cdot a^{f(x)} \, dx$	$= \dfrac{a^{f(x)}}{\log a} + c,\ a > 0 \wedge a \neq 1$
$\int e^x \, dx$	$= e^x + c$	$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} \, dx$	$= e^{f(x)} + c$
$\int \sin x \, dx$	$= -\cos x + c$	$\int f'(x) \cdot \sin[f(x)] \, dx$	$= -\cos[f(x)] + c$
$\int \cos x \, dx$	$= \sin x + c$	$\int f'(x) \cdot \cos[f(x)] \, dx$	$= \sin[f(x)] + c$
$\int \dfrac{1}{(\cos x)^2} \, dx$	$= \tan x + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{[\cos f(x)]^2} \, dx$	$= \tan[f(x)] + c$
$\int \dfrac{1}{(\sin x)^2} \, dx$	$= -\cot x + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{[\sin f(x)]^2} \, dx$	$= -\cot[f(x)] + c$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$	$= \arcsin x + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \, dx$	$= \arcsin[f(x)] + c$
$\int \dfrac{1}{1+x^2} \, dx$	$= \arctan x + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} \, dx$	$= \arctan[f(x)] + c$